УДК 678.5.06:624.074.4.001

Э. Ф. Файзибаев, Т. Кадырбеков

Нелинейные колебания вязкоупругого цилиндра с упругой оболочкой

Рассмотрим радиальные нелинейные колебания вязкоупругого цилиндра, заключенного в упругую оболочку толщиной h, в предположении объемной несжимаемости материала. Очевидно, что в этом случае радиальное перемещение u точек кольца не будет зависеть от координаты φ, т. е. $u = u(r, t)$.

Граничные условия и связь между напряжением и деформацией зададим соответственно в виде [1—4].

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = P(t), \quad \sigma_r(r, t)|_{r=b} = -Q(t), \tag{1}$$

$$\sigma = E(\varepsilon + \gamma\varepsilon^3) - \int_0^t R(t-\tau)[\varepsilon(\tau) + \gamma\varepsilon^3(\tau)]\,d\tau, \tag{2}$$

где a и b—внутренний и внешний радиусы цилиндра; E — «мгновенный модуль» упругости; $R(t)$ — ядро релаксации — положительная, монотонно убывающая, интегрируемая в интервале $(0, +\infty)$ функция; $\gamma = \text{const}$.

После несложных преобразований получим уравнение линейных колебаний рассматриваемого цилиндра

$$\ddot{x}(t) + \lambda^2 x(t) = F(t) + \varepsilon\alpha x^3(t) + \varepsilon\int_0^t R(t-\tau)[\lambda^2 x(\tau) + \beta x^3(\tau)]\,d\tau, \tag{3}$$

где $x(t)$ — функция, характеризующая амплитуду колебаний; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; λ, α, β — константы; $F(t)$ — внешняя возмущающая сила.

Отметим, что к интегро-дифференциальному уравнению типа (3) могут быть сведены многие задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругих систем, поведение которых во времени характеризуется одной степенью свободы относительно перемещений.

В данной статье исследуется уравнение (3) в случае нерезонансных и резонансных колебаний, когда внешняя сила имеет вид $F(t) = a_1\sin\omega_1 t + a_2\sin\omega_2 t$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

1. Колебания вдали от резонансов. Пусть $\lambda \neq \omega_1$, ω_2, $\omega_1/3$, $\omega_2/3$, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $\omega_1 \pm 2\omega_2$, $\omega_2 \pm 2\omega_1$. Тогда, производя замену переменных в уравнении (3) по известным формулам

$$\begin{aligned} x &= c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t + \frac{a_1}{\lambda^2-\omega_1^2}\sin\omega_1 t + \frac{a_2}{\lambda^2-\omega_2^2}\sin\omega_2 t, \\ \dot{x} &= \lambda(-c_1\sin\lambda t + c_2\cos\lambda t) + \frac{a_1\omega_1}{\lambda^2-\omega_1^2}\cos\omega_1 t + \frac{a_2\omega_2}{\lambda^2-\omega_2^2}\cos\omega_2 t, \end{aligned} \tag{4}$$

приведем его к системе стандартного вида. Усредняя ее согласно второй схеме усреднения, находим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\varepsilon}{2\lambda}\left\{\left[\lambda^2 + \frac{3}{2}\beta(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2)\right]B_0\xi_1 + \left[\lambda^2 A_0 + \frac{3}{2}(\alpha+\beta A_0)(\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2)\right]\xi_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}\beta B_0(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_1 + \frac{3}{4}(\alpha+\beta A_0)(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_2\right\}, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\varepsilon}{2\lambda}\left\{\left[\lambda^2 A_0 + \frac{3}{2}(\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2)(\alpha+\beta A_0)\right]\xi_1 - \left[\lambda^2 + \frac{3}{2}\beta(\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2)\right]B_0\xi_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}(\alpha+\beta A_0)(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_1 - \frac{3}{4}\beta B_0(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_2\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\bar{a}_1 = \frac{a_1}{\lambda^2 - \omega_1^2}, \quad \bar{a}_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 - \omega_2^2}, \quad A_0 = \int_0^{+\infty} R(s) \cos \lambda s ds > 0,$$

$$B_0 = \int_0^{+\infty} R(s) \sin \lambda s ds > 0.$$

Для интегрирования системы (5) положим

$$\xi_1 = A \cos \varphi, \qquad \xi_2 = A \sin \varphi. \tag{6}$$

Тогда

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2\lambda} B_0 \left\{ \left[\lambda^2 + \frac{3}{2} \beta (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2) \right] A + \frac{3}{4} \beta A^3 \right\},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\lambda} \left\{ \left[\lambda^2 A_0 + \frac{3}{2} (\alpha + \beta A_0) (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2) \right] + \frac{3}{4} (\alpha + \beta A_0) A^2 \right\}. \tag{7}$$

Решение системы (7) имеет вид

$$A = \left[\frac{\nu c_1'^2 \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda} B_0 \nu\right) t}{1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t} \right]^{1/2},$$

$$\varphi = \bar{\nu} t + \bar{l} \ln \left[1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t \right] + c_2', \tag{8}$$

где $\nu = \lambda^2 + \frac{3}{2} \beta (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2)$; $l = \frac{3}{4} \beta$; $\bar{\nu} = \frac{\varepsilon}{2\lambda} \left[\lambda^2 A_0 + \frac{3}{2} (\alpha + \beta A_0) (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2) \right]$; $\bar{l} = \frac{3}{8} \frac{\alpha + \beta A_0}{l B_0}$; c_1', c_2' — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

С учетом (8) и (6), получаем

$$\xi_1 = \left[\frac{\nu c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t}{1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ c_1' \cos \left[\bar{\nu} t + \bar{l} \ln \left(1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t \right) \right] - \right.$$

$$\left. - c_2' \sin \left[\bar{\nu} t + \bar{l} \ln \left(1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t \right) \right] \right\},$$

$$\xi_2 = \left[\frac{\nu c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t}{1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t} \right]^{1/2} \left\{ c_1' \sin \left[\bar{\nu} t + \bar{l} \ln \left(1 - l c_1'^2 \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t \right) \right] + c_2' \cos \left[\bar{\nu} t + \bar{l} \ln \left(1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0 \nu\right) t \right) \right] \right\}.$$

Учитывая, что решения систем (3) и (5) близки при достаточно малом ε и для $t \geqslant 0$ [2], находим приближенное решение уравнения (3) вдали от резонансов:

$$x(t) = \left[\frac{\nu c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0\nu\right) t}{1 - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0\nu\right) t} \right]^{1/2} \left\{ c_1' \cos\left[(\lambda - \bar{\nu}) t - \bar{l} \ln\left(1 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - l c_1'^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0\nu\right) t\right)\right] + c_2' \sin\left[(\lambda - \bar{\nu}) t - \bar{l} \ln\left(1 - l c_1'^2 \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda} B_0\nu\right) t\right)\right]\right\} + \frac{a_1}{\lambda^2 - \omega_1^2} \sin\omega_1 t + \frac{a_2}{\lambda^2 - \omega_2^2} \sin\omega_2 t. \quad (9)$$

Заметим, что наличие нелинейной вязкости в системе (3) приводит к более быстрому затуханию свободных колебаний, чем в случае только линейной вязкости, и к появлению сдвига частот, зависящих от синус- и косинус-преобразований функции релаксации, а также коэффициента нелинейности. Решение (9) при $t \to \infty$ асимптотически стремится к функции

$$x_\infty(t) = \frac{a_1}{\lambda^2 - \omega_1^2} \sin\omega_1 t + \frac{a_2}{\lambda^2 - \omega_2^2} \sin\omega_2 t.$$

2. Колебания вблизи главного резонанса. Исследуем колебания вблизи главного резонанса, когда ω_1 близко к λ, $\omega_2 \neq 3\lambda$, $\omega_2 \neq \lambda/3$, $\omega_1 \neq \omega_2$, причем амплитуда одной из составляющих внешнего возмущения является малой величиной порядка ε.

Полагая $a_1 = \varepsilon m$, $\lambda^2 = \omega_1^2 - \varepsilon q$, $m = \text{const}$, $q = \text{const}$, приводим уравнение (3) к виду

$$\ddot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) = a_2 \sin\omega_2 t + \varepsilon \left\{ q x(t) + \alpha x^3(t) + m \sin\omega_1 t + \right.$$

$$\left. + \omega_1^2 \int_0^t R(t-\tau)\left[x(\tau) + \frac{\beta}{\omega_1^2} x^3(\tau)\right] d\tau \right\}. \quad (10)$$

Вводя новые переменные c_1 и c_2 по формулам

$$x = c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t + \frac{a_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sin\omega_2 t,$$

$$\dot{x} = \omega_1(-c_1 \sin\omega_1 t + c_2 \cos\omega_1 t) + \frac{a_2\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos\omega_2 t,$$

приводим уравнение (10) к системе стандартного вида. Усредняя последнее, находим усредненную систему

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left\{ \left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\beta\delta^2\right) B_0 \xi_1 + \left[\left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\beta\delta^2\right) A_0 + q + \frac{3}{2}\alpha\delta^2\right] \xi_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\beta B_0 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_1 + \frac{3}{4}(\alpha + \beta A_0)(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_2 + m \right\},$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left\{ \left[\left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\beta\delta^2\right) A_0 + q + \frac{3}{2}\alpha\delta^2\right] \xi_1 - \right.$$

$$- \left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\beta\delta^2\right) B_0 \xi_2 + \frac{3}{4}(\alpha + \beta A_0)(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_1 -$$

$$\left. - \frac{3}{4}\beta B_0 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_2 \right\}, \quad \delta = a_2/(\omega_1^2 - \omega_2^2). \quad (11)$$

Найдем установившееся решение $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0$ системы (11), для чего положим $\xi_1 = A\cos\varphi$, $\xi_2 = A\sin\varphi$.

Из системы (11) находим

$$A = -\frac{m(\alpha+\beta A_0)}{B_0(\alpha\omega_1^2-\beta q)}\cos\varphi + \frac{m\beta}{\alpha\omega_1^2-\beta q}\sin\varphi$$

и, полагая $y = \operatorname{tg}\varphi$, —

$$(D_1 + D_2N^2)Ny^3 - [(D_1+3D_2N^2)M - m]y^2 + \\ + (D_1+3D_2M^2)Ny - [(D_1+D_2M^2)M - m] = 0, \tag{12}$$

где

$$D_1 = \left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\beta\delta^2\right)B_0,\ D_2 = \frac{3}{4}\beta B_0,\ M = \frac{m(\alpha+\beta A_0)}{B_0(\alpha\omega_1^2-\beta q)},\quad N = \frac{m\beta}{\alpha\omega_1^2-\beta q}.$$

Сложением графиков нетрудно показать, что уравнение (12) имеет единственный вещественный корень. Обозначим его через $y^* = \operatorname{tg}\varphi^*$. Тогда установившееся положение равновесия системы (12) определится равенствами

$$\xi_1^* = -\frac{m(\alpha+\beta A_0)}{B_0(\alpha\omega_1^2-\beta q)}\cos^2\varphi^* + \frac{m\beta}{2(\alpha\omega_1^2-\beta q)}\sin 2\varphi^*,$$

$$\xi_2^* = -\frac{m(\alpha+\beta A_0)}{2B_0(\alpha\omega_1^2-\beta q)}\sin 2\varphi^* + \frac{m\beta}{\alpha\omega_1^2-\beta q}\sin^2\varphi^*. \tag{13}$$

Теперь исследуем решение (13) на устойчивость, составляя соответствующие уравнения в вариациях [6, 7] $\dot{y} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_1}\{(\omega_1^2B_0 + a_1)y + (\omega_1^2A_0 + q + a_2)z\}$, $\dot{z} = \frac{\varepsilon}{2\omega_1}\{(\omega_1^2A_0 + q + a_3)y - (\omega_1^2B_0 - a_4)z\}$ и характеристическое уравнение

$$k^2 + \frac{\varepsilon}{2\omega_1}(2\omega_1^2B_0 + a_1 - a_4)k + \frac{\varepsilon^2}{4\omega_1^2}\Big[(\omega_1^2A_0+q+a_2)(\omega_1^2A_0+q+a_3) + \\ + (\omega_1^2B_0+a_1)(\omega_1^2B_0-a_4)\Big] = 0, \tag{14}$$

где

$$a_1 = 1{,}5\,[(\delta^2 + \xi_1^{*2} + 0{,}5A^{*2})\beta B_0 + (\alpha+\beta A_0)\xi_1^*\xi_2^*],$$

$$a_2 = 1{,}5\,[(\delta^2 + \xi_2^{*2} + 0{,}5A^{*2})(\alpha+\beta A_0) + \beta B_0\xi_1^*\xi_2^*],$$

$$a_3 = 1{,}5\,[(\delta^2 + \xi_1^{*2} + 0{,}5A^{*2})(\alpha+\beta A_0) - \beta B_0\xi_1^*\xi_2^*],$$

$$a_4 = -1{,}5\,[(\delta^2 + \xi_2^{*2} + 0{,}5A^{*2})\beta B_0 - (\alpha+\beta A_0)\xi_1^*\xi_2^*].$$

Свободный член уравнения (14) представляет собой квадратный трехчлен относительно q с дискриминантом

$$D = \frac{9}{4}[(\alpha+\beta A_0)^2 - 3\beta^2B_0^2]A^{*4} - 6\beta B_0(3\beta\delta^2B_0 + \\ + 2\omega_1^2A_0)A^{*2} - 4\omega_1^4B_0^2 - 3\beta\delta^2B_0^2(3\beta\delta^2 + 4\omega_1^2).$$

Если $D < 0$, то уравнение (14) имеет положительные коэффициенты, поэтому решение (13) асимптотически устойчиво при любом q. В этом случае уравнение (10) имеет решение $x(t)$, близкое к функции

$$x(t) = \xi_1^*\cos\omega_1 t + \xi_2^*\sin\omega_1 t + \frac{a_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\sin\omega_2 t. \tag{15}$$

Если $D=0$, то решение (13), а следовательно, и (15) асимптотически устойчиво при любом $q \neq -\omega_1^2 A_0 - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2})(\alpha + \beta A_0)$ и устойчиво при $q = -\omega_1^2 A_0 - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2})(\alpha + \beta A_0)$. Если $D > 0$, то решение (15) неустойчиво при $-\omega_1^2 A_0 - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2})(\alpha + \beta A_0) - 0{,}5 D^{1/2} < q < -\omega_1^2 A_0 - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2})(\alpha + \beta A_0) + 0{,}5 D^{1/2}$ и асимптотически устойчиво при $q < -\omega_1^2 A - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2})(\alpha + \beta A_0) - 0{,}5 D^{1/2}$, $q > -\omega_1^2 A_0 - 1{,}5(\delta^2 + A^{*2}) \times (\alpha + \beta A_0) + 0{,}5 D^{1/2}$. Аналогично исследуется случай, когда $\omega_1 = \lambda$, $\omega_2 = \lambda/3$, $\omega_1 = \lambda/3$.

1. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент: Фан, 1971.— 280 с.
2. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент: Фан, 1974.— 216 с.
3. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейых колебаний.— М. : Наука, 1976.— 132 с.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкости, М.: Наука, 1970.— 280 с.
5. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа.— М. : Наука, 1976 г.— 432 с.
6. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация.— М.: Наука, 1976.— 500 с.
7. *Розовский М. И.* Интегро-операторный метод в наследственной теории ползучести.— Докл. АН СССР, 1965, **160**, № 4, с. 792—795.

Ташкентский институт
инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

Поступила в редакцию
26.02.82