УДК 517.5

А. И. Степанец, В. И. Рукасов

О приближении суммами Фурье треугольного вида на классах непрерывных периодических функций двух переменных

Обозначим через $H_{A,B}^{\omega_1,\omega_2}$ класс непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant A\omega_1(|x - x'|) + B\omega_2(|y - y'|), \tag{1}$$

где $\omega_i(\delta_i)$, $i = 1, 2$, — произвольные фиксированные модули непрерывности, A, B — положительные константы.

Пусть, далее,

$$\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} e^{i(kx+ly)} \tag{2}$$

— ряд Фурье функции $f(x, y)$, $c_{k,l}$ — ее комплексные коэффициенты Фурье. Наряду с прямоугольными частными суммами Фурье

$$S_{m,n}^{\square}(f; x, y) = \sum_{|k|\leqslant m} \sum_{|l|\leqslant n} c_{k,l} e^{i(kx+ly)} \tag{3}$$

представляет интерес рассмотрение частных сумм ряда (2) треугольного вида:

$$S_{n,n}^{\Delta}(f; x, y) = \sum_{|k|+|l|\leqslant n} c_{k,l} e^{i(kx+ly)}. \tag{4}$$

В то время как для величины

$$\mathcal{E}(H_{A,B}^{\omega_1,\omega_2}, S_{m,n}^{\square}) = \sup_{f\in H_{A,B}^{\omega_1,\omega_2}} \| f(x, y) - S_{m,n}^{\square}(f; x, y) \|_C \tag{5}$$

получены точные по порядку оценки сверху (а в случае, когда функции $\omega_i(\delta_i)$, $i = 1, 2$, выпуклые — асимптотические равенства, дающие решение задачи Колмогорова — Никольского) (см., например, [1]), поведение величины $\mathcal{E}(H_{A,B}^{\omega_1,\omega_2}, S_{n,n}^{\Delta})$ изучено мало. Это обстоятельство, по-видимому, обусловлено сравнительно сложной структурой ядра

$$\Delta_{n,n}(x, y) = \{\sin[(n+1)(x+y)/2]\sin[(n+1)(x-y)/2] + \sin[n(x+y)/2]\sin[n(x-y)/2]\}/\sin[(x+y)/2]\sin[(x-y)/2] \tag{6}$$

в интегральном представлении

$$S_{n,n}^{\Delta}(f; x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+z)\,\Delta_{n,n}(t, z)\,dtdz \tag{7}$$

для частных сумм треугольного вида (см. [2]).

Нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *При произвольном возрастании натурального числа n*

$$\mathcal{E}(H_{A,B}^{\omega}, S_{n,n}^{\Delta}) \leqslant \frac{8(A+B)}{\pi^4} \ln^2 n \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \times \sin u \sin v\,dudv + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right), \tag{8}$$

где $H^{\omega}_{A,B}$ — класс непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant A\omega(|x - x'|) + B\omega(|y - y'|), \tag{9}$$

$\omega(\delta)$ — *произвольный фиксированный модуль непрерывности, A и B — положительные постоянные.*

Теорема 2. *При произвольном возрастании натурального числа n*

$$\mathscr{E}(\bar{H}^{(2)}_{\omega}, S^{\Delta}_{n,n}) \leqslant \frac{8}{\pi^4}\ln^2 n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \sin u \sin v\, du dv +$$

$$+ O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right), \tag{10}$$

где $\overline{H}^{(2)}_{\omega}$ — класс непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leqslant \omega\left(\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}\right), \tag{11}$$

$\omega = \omega(\delta)$ — *произвольный фиксированный модуль непрерывности.*

Доказательству теоремы 1 предпошлем три леммы, которые по существу являются его этапами. В силу четности ядра (6), линейности оператора $S^{\Delta}_{n,n}(f; x, y)$ и инвариантности класса $H^{\omega}_{A,B}$ относительно сдвига вдоль координатных осей получаем

$$\mathscr{E}(H^{\omega}_{A,B}, S^{\Delta}_{n,n}) = \mathscr{E}_{n,n} = \sup_{f \in H^0_{A,B}} \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t, z)\, \Delta_{n,n}(t, z)\, dt dz \right|, \tag{12}$$

где через $H^0_{A,B}$ обозначен подкласс четных по каждой из переменных и обращающихся в нуль в начале координат функций класса $H^{\omega}_{A,B}$.

Выполнив в правой части равенства (12) замену переменных по формулам

$$t = (u - v)/\sqrt{2}, \qquad z = (u + v)/\sqrt{2} \tag{13}$$

и оценив соответствующие остатки, получим

$$\mathscr{E}_{n,n} \leqslant \sup_{F \in H_{(A+B)}} \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(u, v) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin[(n+1)u/\sqrt{2}]\sin[(n+1)v/\sqrt{2}] + \sin[nu/\sqrt{2}]\sin[nv/\sqrt{2}]}{\sin u/\sqrt{2}\sin v/\sqrt{2}}\, du dv \right| +$$

$$+ O(\omega(1/n)\ln n), \tag{14}$$

где через $H_{(A+B)}$ обозначен класс непрерывных $2\sqrt{2}\pi$-периодических по каждой из переменных функций $F(u, v)$, удовлетворяющих условиям

$$F(0, 0) = 0, \tag{15}$$

$$F(u, v) = F(v, u), \qquad F(u, v) = F(-v, -u), \tag{16}$$

$$|F(u', v') - F(u'', v'')| \leqslant (A + B)\omega(|u' - u''|) + (A + B)\omega(|v' - v''|). \tag{17}$$

Учитывая условие (16), заключаем, что

$$\mathscr{E}_{n,n} \leqslant \sup_{F \in H_{(A+B)}} |I(F)| + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right), \tag{18}$$

где

$$I(F)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi F(u,v)\frac{\sin\frac{n+1}{\sqrt{2}}u\sin\frac{n+1}{\sqrt{2}}v}{\sin\frac{u}{\sqrt{2}}\sin\frac{v}{\sqrt{2}}}\,dudv+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi F(u,v)\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u\sin\frac{n}{\sqrt{2}}v}{\sin\frac{u}{\sqrt{2}}\sin\frac{v}{\sqrt{2}}}\,dudv=I_{n+1,n+1}(F)+I_{n,n}(F). \quad (19)$$

Получим оценку сверху для величины $I_{nn}(F)$. Пользуясь рассуждениями, подобными использованным при доказательстве леммы 2.1 из [3], нетрудно показать, что для величины $I_{n,n}(F)$ имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Каковы бы ни были функция $F(u,v)\in H_{(A+B)}$ и натуральное число n, справедливо равенство*

$$I_{n,n}(F)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi F(u,v)\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u}{u}\,\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}v}{v}\,dudv+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right). \quad (20)$$

Пусть $\bar{x}_k$, $k=0,1,\dots,$ — нули функции

$$\int_\infty^x\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}t}{t}\,dt=\int_\infty^{\frac{n}{\sqrt{2}}x}\frac{\sin t}{t}\,dt=\operatorname{si}\left(\frac{n}{\sqrt{2}}x\right),$$

перенумерованные в порядке их возрастания. Если обозначить через x_k нули функции $\operatorname{si}t$, лежащие в промежутках $[k\pi,(k+1)\pi]$, то согласно [4] имеем $x_k=k\pi+\pi/2+\alpha_k$, $0<\alpha_k<\pi/6$, $\alpha_k\downarrow 0$. Отсюда $\bar{x}_k=\sqrt{2}x_k/n=\sqrt{2}k\pi/n+\pi/\sqrt{2}n+\sqrt{2}\alpha_k/n$, где $0<\alpha_k<0{,}8/(2k-1)$, $k\geqslant 4$.

Пусть далее,

$$\hat{L}_n(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\pi/2\sqrt{2}\pi],\\ \pi/2\sqrt{2}n, & t\in[\pi/2\sqrt{2}n,\ \pi/\sqrt{2}n),\\ (2i+1)/\sqrt{2}n, & t\in[\pi(2i+1)/\sqrt{2}n,\ \pi(2i+3)/\sqrt{2}n),\\ & i=0,1,\dots \end{cases}$$

В принятых обозначениях справедлива лемма.

Лемма 2. *Функция* $\Psi(x,n)=\displaystyle\int_{\bar{x}_{\left[\frac{n}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right]}}^{x}\sin\frac{n}{\sqrt{2}}t\,\frac{t-\hat{L}_n(t)}{t\cdot L_n(t)}\,dt$ *на каждом промежутке* $(\pi/2\sqrt{2}n,\ \pi/\sqrt{2}n)$, $(\sqrt{2}\pi k/n,\ \sqrt{2}\pi(k+1)/n)$, $k=1,2,\dots,[n/\sqrt{2}]-1$, $n\geqslant 8$, *имеет единственный простой нуль $\hat{x}_k$ так, что*

$$\pi/2\sqrt{2}n<\hat{x}_0<\pi/\sqrt{2}n,\quad \hat{x}_{[n/\sqrt{2}]-1}=\bar{x}_{[n/\sqrt{2}]-1}. \quad (21)$$

Эта лемма по существу является перефразировкой леммы 2.2 [3] применительно к нашей задаче.

Используя лемму 2 и рассуждения, подобные тем, с помощью которых доказывалась лемма 2.3 из [3], убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *При произвольном возрастании натурального числа n справедливо равенство*

$$I_{n,n}(F)=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi F(u,v)\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u}{L_n(u)}\frac{\sin\frac{n}{\sqrt{2}}v}{L_n(v)}\,dudv+\gamma_1, \tag{22}$$

где

$$\gamma_1=O(\omega(1/n)\ln n) \tag{23}$$

$$L_n(u)=\begin{cases}u, & u\in[0,\hat{u}_0],\\ \hat{L}_n(u), & u>\hat{u}_0,\end{cases}\qquad L_n(v)=\begin{cases}v, & v\in[0,\hat{v}_0],\\ \hat{L}_n(v), & v>\hat{v}_0,\end{cases} \tag{24}$$

$\hat{u}_0$ *и* $\hat{v}_0$ — *соответствующие нули функций* $\Psi(u,n)$ *и* $\Psi(v,n)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u_p=(2p+1)\pi/\sqrt{2}n$, $p=0,1,\dots,[(\sqrt{2}n-1)/2]$, $v_q=(2q+1)\pi/\sqrt{2}n$, $q=0,1,\dots,[\sqrt{2}n-1/2]$. Положим $u_{[(\sqrt{2}n-1)/2]}=u^*$, $v_{[(\sqrt{2}n-1)/2]}=v^*$.

Обозначив через $I^*_{n,n}(F)$ первое слагаемое в правой части (22), а через $\Phi(u,v)$ — подынтегральную функцию в нем, представим его в виде

$$I^*_{n,n}(F)=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}\int\limits_{v^*}^{\pi}+\int\limits_{u^*}^{\pi}\int\limits_{v^*}^{\pi}+\int\limits_{u^*}^{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}+\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{u^*}\int\limits_{v^*}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{u^*}^{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{v^*}+\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{u^*}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{v^*}+\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{u^*}\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{2}n}}^{v^*}\right)\Phi(u,v)\,dudv. \tag{25}$$

Обозначим через $I^{(i)}_{n,n}(F)$, $i=1,2,\dots,9$, соответственно каждое из слагаемых правой части (25). Тогда, пользуясь утверждениями следствий 7.1 и 5.2 из [1], нетрудно показать, что для любой функции $F\in H_{(A+B)}$

$$I^{(i)}_{n,n}(F)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad i=1,2,3,4,\quad I^{(i)}_{n,n}(F)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right),\ i=5,6,7,8. \tag{26}$$

Поэтому согласно (22) и (23)

$$I_{n,n}(F)=I^{(9)}_{n,n}(F)+\gamma_2, \tag{27}$$

где $\gamma_2=\gamma_2(n)$ имеет тот же порядок, что и γ_1:

$$\gamma_2=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right). \tag{28}$$

Оценим сверху верхнюю грань значений величины $I^{(9)}_{n,n}(F)$ на рассматриваемом классе функций. Имеем

$$\sup_{F\in H_{(A+B)}}|I^{(9)}_{n,n}(F)|\leqslant\frac{2n^2}{\pi^4}\sum_{p=0}^{[(\sqrt{2}n-1)/\sqrt{2}]-1}\frac{2}{2p+1}\sum_{q=0}^{[(\sqrt{2}n-1)/\sqrt{2}]-1}\frac{2}{2q+1}\times$$

$$\times\sup_{F\in H_{(A+B)}}\left|\int\limits_{u_p}^{u_{p+1}}\int\limits_{v_q}^{v_{q+1}}F(u,v)\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u\sin\frac{n}{\sqrt{2}}v\,dudv\right|. \tag{29}$$

Для отыскания величины $i_{p,q}=\sup\limits_{F\in H_{(A+B)}}\left|\int\limits_{u_p}^{u_{p+1}}\int\limits_{v_q}^{v_{q+1}}F(u,v)\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u\sin\times\right.$

$\times \frac{n}{\sqrt{2}} v du dv \Big|$ применим при каждом фиксированном p и q следствие 7.1 из теоремы 5.1 [1]. Пусть $\rho_p(u)$ и $\delta_q(v)$ — функции, определяемые соотношениями

$$\int\limits_{u_p}^{u} \sin\frac{n}{\sqrt{2}}\xi d\xi = \int\limits_{u_p}^{\rho_p(u)} \sin\frac{n}{\sqrt{2}}\xi d\xi, \quad u \in [u_p, u_{p+\frac{1}{2}}], \quad \rho_p(u) \in [u_{p+\frac{1}{2}}, u_{p+1}], \tag{30}$$

$$\int\limits_{v_q}^{v} \sin\frac{n}{\sqrt{2}}\eta d\eta = \int\limits_{v_q}^{\delta_q(v)} \sin\frac{n}{\sqrt{2}}\eta d\eta, \quad v \in [v_q, v_{q+\frac{1}{2}}], \quad \delta_q(v) \in [v_{q+\frac{1}{2}}, v_{q+1}], \tag{31}$$

где $u_{p+1/2} = 2(p+1)\pi/\sqrt{2}n$, $v_{q+1/2} = 2(q+1)\pi/\sqrt{2}n$. Применение следствия 7.1 из теоремы 5.1 [1] дает

$$i_{p,q} \leqslant \frac{4(A+B)}{n^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \ \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \sin u \sin v du dv. \tag{32}$$

Отсюда согласно (29) получим:

$$\sup_{F\in H_{(A+B)}} |I_{n,n}^{(9)}(F)| \leqslant \frac{4(A+B)}{\pi^4} \sum_{p=0}^{\left[\frac{\sqrt{2}n-1}{2}\right]-1} \frac{2}{2p+1} \sum_{q=0}^{\left[\frac{\sqrt{2}n-1}{2}\right]-1} \frac{2}{2q+1} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \ \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \sin u \sin v du dv. \tag{33}$$

Поэтому какова бы ни была $F(u, v) \in H_{(A+B)}$ в силу (27) и (28)

$$I_{n,n}(F) \leqslant \frac{4(A+B)}{\pi^4} \sum_{p=0}^{\left[\frac{\sqrt{2}n-1}{2}\right]-1} \frac{2}{2p+1} \sum_{q=0}^{\left[\frac{\sqrt{2}n-1}{2}\right]-1} \frac{2}{2q+1} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \ \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \sin u \sin v du dv + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right). \tag{34}$$

Используя известное соотношение (см. [3])

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{2}{2j+1} = \ln(2n+1) + O(1), \tag{35}$$

найдем

$$I_{n,n}(F) \leqslant \frac{4(A+B)}{\pi^4} \ln^2 n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}n}\right), \ \omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}n}\right)\right\} \sin u \sin v du dv +$$

$$+ O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right). \tag{36}$$

Аналогично доказывается, что

$$I_{n+1,n+1}(F)\leqslant\frac{4(A+B)}{\pi^4}\ln^2 n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\omega\left(\frac{4u}{\sqrt{2}(n+1)}\right),\right.$$

$$\left.\omega\left(\frac{4v}{\sqrt{2}(n+1)}\right)\right\}\sin u\sin v\,du\,dv+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right). \qquad (37)$$

Для завершения доказательства осталось вернуться к неравенству (18), учесть оценки (36)—(37) и монотонность функции $\omega(\delta)$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пользуясь рассуждениями, которыми было установлено соотношение (12), получаем

$$\mathscr{E}(\overline{H}_\omega^{(2)}, S_{n,n}^{\Delta})=\overline{\mathscr{E}}_{n,n}=\sup_{f\in\overline{H}_0}\left|\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,z)\,\Delta_{n,n}(t,z)\,dt\,dz\right|, \qquad (38)$$

где через $\overline{H}_0$ обозначен подкласс четных по каждой из переменных и обращающихся в нуль в начале координат функций класса $\overline{H}_\omega^{(2)}$.

Выполняя в правой части равенства (38) замену переменных по формулам (13), получим аналог соотношения (14):

$$\overline{\mathscr{E}}_{n,n}=\sup_{\varphi\in\overline{H}}\left|\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u,v)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\frac{n+1}{\sqrt{2}}u\sin\frac{n+1}{\sqrt{2}}v+\sin\frac{n}{\sqrt{2}}u\sin\frac{n}{\sqrt{2}}v}{\sin\frac{u}{\sqrt{2}}\sin\frac{v}{\sqrt{2}}}\,du\,dv\right|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right), \qquad (39)$$

где через $\overline{H}$ обозначен класс непрерывных, $2\sqrt{2}\pi$-периодических по каждой из переменных функций $\varphi(u,v)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(0,0)=0$, $\varphi(u,v)=\varphi(v,u)$, $\varphi(u,v)=\varphi(-v,-u)$ и $|\varphi(u',v')-\varphi(u'',v'')|\leqslant\omega(\sqrt{(u'-u'')^2+(v'-v'')^2})$.

Так как из условия $\varphi(u,v)\in\overline{H}$ следует, что $\varphi(u,v)\in H_{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}$, то для завершения доказательства теоремы 2 нам осталось повторить без изменений все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, положив $A=B=\dfrac{1}{2}$.

1. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
2. *Даугсвет И. К.* О постоянных Лебега двойных рядов Фурье.— В кн.: Методы вычислений. Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1970.— № 6, с. 8—13.
3. *Степанец А. И.* Приближение функций, удовлетворяющих условиям Липшица, суммами Фурье.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 6, с. 781—799.
4. *Дзядык В. К., Степанец А. И.* О последовательности нулей интегрального синуса.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1971, вып. II, с. 64—73.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
01.04.82
после переработки —
13.07.82