УДК 519.46

С. П. Панасюк, В. М. Полецких

О некоторых примерах топологических групп

Условимся под топологической группой понимать локально-компактную группу, а под ее подгруппой — замкнутую подгруппу. Введем следующие обозначения: U-группа — локально-нильпотентная топологическая группа без кручения; $B = B(G)$ — периодическая часть топологической группы G; G_0 — ее связная компонента единицы; $r(G)$ — топологический вариант специального ранга А. И. Мальцева, введенного в [1]; Q_p— поле p-адических чисел; R_p — его аддитивная часть; p^∞ — квазициклическая группа; Q — одномерный соленоид.

В работе [2] доказано следующее: пусть G — U-группа и $G_0 = 1$. Если $r(B) = s$ и $r(G/B) = t$, то $r(G) = s + t$. Покажем, что в этом утверждении условие $G_0 = 1$ существенно. Для этого рассмотрим пример, идея построения которого заимствована из [3].

П р и м е р 1. Пусть $A = \{\overline{a}\} \times Q$, где $\{\overline{a}\}$ — бесконечная дискретная циклическая группа. Обозначим через φ автоморфизм группы A, действующий по правилу $\varphi((a^i, c)) = (a^i, cb^i)$, где b — фиксированный образующий элемент группы Q. Пусть $G = \{\varphi\} \leftthreetimes A$. Взяв за полную систему окрестностей единицы группы G полную систему окрестностей единицы группы A, превращаем G в локально-компактную группу. При этом центр группы G равен Q, а G/Q — свободная абелева группа ранга 2.

Пусть $x = (\varphi^j, a^k, c)$, $y = (\varphi^i, a^m, d)$. Тогда

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = (\varphi^j, a^k, c)(\varphi^i, a^m, d)(\varphi^j, a^k, c)^{-1}(\varphi^i, a^m, d)^{-1} =$$

$$=(\varphi^j, a^k, c)(\varphi^i, a^m, d)(\varphi^{-j}, a^{-k}, c^{-1}b^{kj})(\varphi^{-i}, a^{-m}, d^{-1}b^{mi}) = (\varphi^{i+j}, a^{k+m}, cb^{ik}d)\times$$

$$\times(\varphi^{-j}, a^{-k}, c^{-1}b^{kj}), \quad (\varphi^{-i}, a^{-m}, d^{-1}b^{mi}) = (\varphi^i, a^m, cb^{ik-jm-jk}dc^{-1}b^{kj}),$$

$$(\varphi^{-i}, a^{-m}, d^{-1}b^{mi}) = (\varphi^i, a^m, b^{ik-jm}d)(\varphi^{-i}, a^{-m}, d^{-1}b^{mi}) = (1, 1, b^{ik-jm}db^{-mi}\times$$

$$\times d^{-1}b^{mi}) = (1, 1, b^{ik-jm}) = (1, 1, b^t).$$

Таким образом, если $[x, y] \neq 1$, то $[x, y]$ — образующий элемент $(1, 1, Q)$, ведь при $t \neq 0$ $\overline{Q^t = Q}$, значит, $\{\overline{b}^t\} = Q$.

Пусть $H = \{\overline{q_1, q_2, \dots, q_k}\}$ — подгруппа из G, тогда либо $r(H_1 = HZ/Z) = 1$, либо $r(H_1) = 2$. Если $r(H_1) = 1$, то в силу $HZ/Z \cong H/H \cap Z$ имеем $r(H) \leqslant 2$. Если $r(H_1) = 2$, то $H_1 = \{a\} \times \{b\}$. Пусть x, y — прообразы элементов a, b в H. Понятно, что $[x, y] \neq 1$. В самом деле, если $[x, y] = 1$, то подгруппа $\overline{\{x, y, z\}}$ абелева и, значит, ее изолятор, равный G, также абелев. А это не так. Таким образом, $H \supseteq \{\overline{[x, y]}\} = Q$. Следовательно, $H = \overline{\{x, y\}}$. А это означает, что $r(G) = 2$. А между тем $r(B) = 1$ и $r(G/B) = 2$.

Построим пример нильпотентной p-группы класса 2, не обладающей открытым компактным инвариантным подмножеством.

П р и м е р 2. Рассмотрим группу унитреугольных матриц

$$G = \left\{X : X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_i \in Q_p\right\}.$$

Топология в G естественным образом задается топологией Q_p.

Если $Z = Z(G)$ — центр G, то $Z \cong R_p$, а фактор-группа $G/Z \cong R_p \times \times R_p$. Ясно, что G — делимая группа.

Допустим, что A — открытое компактное инвариантное подмножество, тогда $H = \{\overline{A}\}$ — компактная открытая инвариантная подгруппа [4]. Причем в силу конечности ранга G подгруппа H имеет конечное число образующих и, значит, имеет конечное число открытых подгрупп конечного индекса n [5]. Если M_n — подгруппа индекса n из H, то число подгрупп, сопряженных с M_n в G, конечно. Пусть T_n — их пересечение, тогда $\langle T_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ образует инвариантную полную систему окрестностей единицы группы G. Так как дискретная нильпотентная делимая p-группа абелева [6], то любая фактор-группа G/T_n абелева. А это означает, что G — абелева группа. Получено противоречие.

В работе [7] доказаны следующие топологические аналоги проблемы Шмидта: 1) если G — некомпактная разрешимая группа и все собственные подгруппы компактны, то либо $G \cong R_p$, либо $G \cong p^{\infty}$; 2) если G — некомпактная ZA-группа и все собственные инвариантные подгруппы компактны, то либо $G \cong R_p$, либо $G \cong p^{\infty}$.

Следующий пример показывает, что нельзя в случае 1 собственные подгруппы заменить на собственные инвариантные подгруппы, а в случае 2 ZA-группы — на локально-нильпотентные группы.

Пример 3. Пусть $N = p^{\infty}$ и $\{a_x\}$ — циклическая группа порядка p^k, где $x \in N$. Пусть T — топологическое полное прямое произведение подгрупп $\{a_x\}$, т. е. $T = \prod_{x \in N} \{a_x\}$. Группа N задает на T группу автоморфизмов. Если $y \in N$, то соответствующий автоморфизм действует так: $\varphi_y(a_x^s) = a_{xy}^s$.

Пусть $G = N \leftthreetimes T$. Взяв за полную систему окрестностей единицы группы G окрестности единицы подгруппы T превращаем G в топологическую разрешимую и одновременно локально-нильпотентную группу. При этом T — открытая компактная подгруппа и $G/T \cong p^{\infty}$. Покажем, что $\overline{[G, G]} = T$. Обозначим $t_x = (\ldots 1\,1\,1 \ldots 1\, a_x\, 1 \ldots 1 \ldots)$. Очевидно, $\overline{\{t_x\}}_{x \in N} = T$ и порядок элемента a_x равен p^k. Пусть U — как угодно малая окрестность единицы, «x» — координата которой равна 1, и возьмем в этой окрестности элемент y вида $(1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1\, a_{y_1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_2}\, 1 \ldots 1\, a_{y_{p^k-1}}\, 1 \ldots)$. Элемент $y \cdot t_x = (\ldots 1 \ldots 1\, a_x\, 1 \ldots a_{y_1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_2}\, 1 \ldots 1\, a_{y_{p^k-1}}\, 1)$. Далее, $\varphi_{x^{-1}y_j} \times (a_x) = a_{y_j}$. Автоморфизму $\varphi_{x^{-1}y_j}$ соответствует такой элемент $b_j \in G$, что $b_j^{-1} t_x b_j = t_{y_j}$. Отсюда $d_j = b_j^{-1} t_x b_j t_x^{-1} = (\ldots 1 \ldots 1\, a_x^{-1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_j}\, 1 \ldots 1 \ldots)$. Значит, $d = \prod_{j=1}^{p^k-1} d_j = (1 \ldots 1\, a_x^{-p^k+1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_{p^k-1}}\, 1 \ldots) = (1 \ldots 1\, a_x\, 1 \ldots 1 \ldots$ $\ldots 1\, a_{y_1}\, 1 \ldots 1\, a_{y_{p^k-1}}\, 1 \ldots 1 \ldots)$. Очевидно, что $d \in [G, G]$ и $dt_x^{-1} \in U$. Следовательно, $\overline{[G, G]} = T$.

Пусть L — произвольная инвариантная некомпактная подгруппа в G. В силу слойной компактности G подгруппа L содержит $A \cong p^{\infty}$ [8]. Следовательно, $L \cdot T = G$. Пусть $L \cap T = V$, тогда $G/V = L/V \times T/V$ — абелева группа ($L/V \cong LT/T \cong p^{\infty}$). А это означает, что $V \supseteq T$ т. е. $L = G$.

Замечание. Подгруппа $S = \left\{\overline{\bigcup_{g \in G} g^{-1} N g}\right\}$ инвариантна и некомпактна, поэтому $G = S$. А это означает, что обладает всюду плотной делимой в смысле Черникова погруппой [6].

Отметим, что в [8] построен пример локально-нильпотентной недискретной топологической группы, все инвариантные подгруппы которой дискретны.

1. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга, II.—Укр. мат. журн., 1966, 18, № 3, с. 85—96.
2. *Полецких В. М.* Топологический изолятор подгруппы конечного ранга.— Там же, 1977, 29, № 5, с. 614—624.
3. *Протасов И. В.* Проектирование нульмерных нильпотентных групп.— Мат. заметки, 1978, 24, № 5, с. 717—722.
4. *Глушков В. М.* Локально нильпотентные локально бикомпактные группы.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, 4, с. 281—332.
5. *Серр Ж. П.* Когомологии Галуа.— М. : Мир, 1968.— 199 с.
6. *Черников С. Н.* Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом.— Мат. сб., 1946, вып. 18, с. 397—422.

7. *Полецких В. М.* О топологических группах, близких к группам ранга один.— Укр. мат. журн., 1975, 28, № 6, с. 722—782.
8. *Полецких В. М.* Слойно компактные нильпотентные группы.—Сиб. мат. журн., 1975, 16, № 3, с. 801—809.
9. *Кабенюк М. И.* Нормальные подгруппы локально компактных групп.— Там же, № 5, с. 1005—1010.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
21.05.81