УДК 517+519.2

И. П. Мазур (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ТЕОРЕМА СКИТОВИЧА – ДАРМУА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Let X be a finite Abelian group, let ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, be independent random variables with values in X and distributions μ_i, and let α_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, be automorphisms of X. We prove that the independence of n linear forms $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$ implies that all μ_i are shifts of the Haar distributions on some subgroups of the group X. This theorem is an analog of the Skitovich – Darmois theorem for finite Abelian groups.

Нехай X — скінченна абелева група, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X і розподілами μ_i, α_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — автоморфізми X. Доведено, що із незалежності n лінійних форм $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$ випливає, що всі μ_i — зрушення розподілів Хаара деякої підгрупи групи X. Ця теорема є аналогом теореми Скітовича – Дармуа для скінченних абелевих груп.

1. Введение. Классическая теорема Скитовича – Дармуа гласит (см. [1, 2], а также [3], гл. 3): Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины и α_i, β_i — ненулевые константы. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots \ldots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ независимы. Тогда все случайные величины ξ_i гауссовские.

Гурье и Олкин обобщили теорему Скитовича – Дармуа на случай, когда ξ_i — случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^m$ и α_i, β_i — несингулярные матрицы (см. [4], а также [3], гл. 3). Они доказали, что из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что все ξ_i — гауссовские векторы.

Теорема Скитовича – Дармуа обобщалась на различные классы локально компактных абелевых групп, такие как конечные, дискретные, компактные абелевы группы, а также на некоторые классы бесконечномерных линейных пространств [5 – 14]. В настоящей статье мы продолжаем эти исследования и изучаем теорему Скитовича – Дармуа в случае, когда случайные величины принимают значения в конечной абелевой группе и количество линейных форм больше двух.

В статье X будет обозначать конечную абелеву группу, если не оговорено противное. Пусть $\mathrm{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов группы X, $\mathbb{Z}(k) = \{0, 1, 2, \ldots, k - - 1\}$ — группа вычетов по модулю k. Положим $x \in X$. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в x. Пусть K — подгруппа X. Обозначим через m_K распределение Хаара на K. Обозначим через $I(X)$ множество всех сдвигов таких распределений, т. е. распределений вида $m_K * E_x$, где K — подгруппа X, $x \in X$. Распределения класса $I(X)$ называются идемпотентными. Отметим, что идемпотентные распределения на конечных абелевых группах могут рассматриваться как аналоги гауссовских распределений на прямой.

Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i, α_j, β_j — автоморфизмы X. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$. Проблема обобщения теоремы Скитовича – Дармуа на конечные абелевы группы впервые была рассмотрена в [5], где, в частности, доказано, что класс групп, на которых из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что все μ_i — идемпотентные распределения, беден и состоит из групп вида

$$\mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}(2^{m_l}), \quad 0 \le m_1 < \ldots < m_l. \tag{1}$$

С другой стороны, если мы рассмотрим две линейные формы от двух случайных величин, то теорема Скитовича – Дармуа становится справедливой для произвольной конечной абелевой группы. Именно, имеет место следующая теорема (см. [8], а также [15], § 13).

Теорема 1.1. *Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в X и распределениями μ_1 и μ_2, α_i, $\beta_i \in \mathrm{Aut}(X)$, $i = 1, 2$. Если линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы, то $\mu_i \in I(X)$, $i = 1, 2$.*

В статье мы рассматриваем n линейных форм L_j от n случайных величин ξ_i со значениями в конечной абелевой группе. Коэффициентами форм являются автоморфизмы группы. Мы доказываем, что из независимости L_j следует, что все ξ_i имеют идемпотентные распределения. Этот результат обобщает теорему 1.1 и может рассматриваться как естественный аналог теоремы Скитовича – Дармуа для конечных абелевых групп.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \ge 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i. Если линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, независимы, то $\mu_i \in I(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Отметим, что доказательство теоремы 1.2 отличается от доказательства теоремы 1.1 при $n = 2$ и не опирается на него.

Также мы покажем, что теорема 1.2 не верна, если рассматривать менее чем n линейных форм от n случайных величин.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся некоторые понятия и результаты из абстрактного гармонического анализа (см. [16]). Пусть $Y = X^*$ — группа характеров X. Поскольку группа X конечна, то $Y \cong X$. Значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$ обозначим через (x, y). Пусть $\alpha\colon X \to X$ — гомоморфизм. Для любого $y \in Y$ определим отображение $\tilde{\alpha}\colon Y \to Y$ по формуле $(\alpha x, y) = (x, \tilde{\alpha} y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Отображение $\tilde{\alpha}$ является гомоморфизмом. Оно называется сопряженным к α. Тождественный автоморфизм группы обозначим через I. Пусть B — подгруппа X. Положим $A(Y, B) = \{y \in Y\colon (x, y) = 1$ для всех $x \in B\}$. Множество $A(Y, B)$ называется аннулятором B в Y и является подгруппой в Y.

Подгруппа H группы X называется характеристической, если равенство $\gamma(H) = H$ выполняется для всех $\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть p — простое число. Напомним, что абелева группа называется элементарной p-группой, если каждый ненулевой элемент этой группы имеет порядок p. Отметим, что каждая конечная элементарная p-группа изоморфна группе вида $(\mathbb{Z}(p))^m$ для некоторого m. Положим $X_{(p)} = \{x \in X\colon px = 0\}$. Очевидно, что $X_{(p)}$ — элементарная p-группа. Также очевидно, что $X_{(p)}$ — характеристическая подгруппа в X.

Пусть E — конечномерное линейное пространство и γ — линейный оператор, действующий на E. Обозначим через $\dim E$ размерность E и через $\mathrm{Ker}\,\gamma$ ядро γ. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ — семейства линейных пространств. Обозначим через $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ прямую сумму линейных пространств E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть μ — вероятностное распределение на X. Обозначим через $\sigma(\mu)$ носитель μ. Положим $\bar{\mu}(M) = \mu(-M)$, где $M \subset X$, $-M = \{-m\colon m \in M\}$. Характеристическая функция распределения μ определяется по формуле

$$\hat{\mu}(y) = \sum_{x\in X}(x,y)\mu(\{x\}), \quad y\in Y.$$

Если ξ — случайная величина со значениями в X и распределением μ, то $\hat{\mu}(y) = \mathbf{E}[(\xi, y)]$. Положим

$$F_\mu = \{y\in Y\colon \hat{\mu}(y) = 1\}.$$

Множество F_μ является подгруппой в Y, справедливо включение $\sigma(\mu)\subset A(X, F_\mu)$ и выполняется равенство $\hat{\mu}(y+h) = \hat{\mu}(y)$ для всех $y\in Y$, $h\in F_\mu$. Если K — подгруппа в X, то

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y\in A(Y,K), \\ 0, & y\notin A(Y,K). \end{cases} \tag{2}$$

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теоремы 1.2 понадобятся некоторые леммы. При доказательстве следующей леммы используются стандартные рассуждения (см. [15], § 10).

Лемма 2.1. *Пусть ξ_i, $i = 1,2,\ldots,n$, $n\geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i. Рассмотрим линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i$, $j = 1,2,\ldots,k$, где α_{ij} — эндоморфизмы группы X. Линейные формы L_j независимы тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\prod_{i=1}^n \hat{\mu}_i\left(\sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_{ij}u_j\right) = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij}u_j), \quad u_j\in Y. \tag{3}$$

Доказательство. Отметим, что линейные формы L_j, $j = 1,2,\ldots,k$, независимы тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i, u_j\right)\right] = \prod_{j=1}^k \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i, u_j\right)\right], \quad u_i\in Y. \tag{4}$$

С учетом того, что случайные величины ξ_i независимы и $\hat{\mu}_i(y) = \mathbf{E}[(\xi_i, y)]$, преобразуем левую часть равенства (4) к виду

$$\mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i, u_j\right)\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^n\left(\xi_i, \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_{ij}u_j\right)\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\left(\xi_i, \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_{ij}u_j\right)\right] = \prod_{i=1}^n \hat{\mu}_i\left(\sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_{ij}u_j\right).$$

Рассуждая аналогично, преобразуем правую часть равенства (4):

$$\prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}\xi_i, u_j\right)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^k (\alpha_{ij}\xi_i, u_j)\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^k (\xi_i, \tilde{\alpha}_{ij}u_j)\right] = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k \mathbf{E}\left[(\xi_i, \tilde{\alpha}_{ij}u_j)\right] = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij}u_j).$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть Y — линейное пространство, β_{ij} — обратимые линейные операторы, действующие на Y и удовлетворяющие условиям $\beta_{1j} = I$, $\beta_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где I — тождественный оператор. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^n$, $\{F_i\}_{i=1}^n$ — семейства конечномерных линейных подпространств Y, удовлетворяющих условиям*

$$\beta_{ij}(E_j) \subset F_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dim F_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim E_i. \tag{6}$$

Тогда $E_i = F_j = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где F — линейное подпространство Y и $\beta_{ij}(F) = F$.

Доказательство. Положим $\dim E_i = m_i$, $\dim F_i = k_i$. Тогда неравенство (6) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{7}$$

Поскольку β_{ij} обратимы, получаем

$$\dim \beta_{ij}(E_j) = m_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Из (5) и (8) следует, что

$$m_i \leq k_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Из (9) получаем

$$\max_{1 \leq i \leq n} m_i \leq \min_{1 \leq j \leq n} k_j.$$

Отсюда и из (7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \leq n \min_{1 \leq j \leq n} k_j. \tag{10}$$

Следовательно, (10) влечет, что $k_j = k$ и (10) принимает форму

$$nk \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \leq nk.$$

Отсюда вытекает, что $\sum_{i=1}^{n} m_i = nk$. Учитывая это и $m_i \leq k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем $m_i = k$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда и из (5) вытекает

$$\beta_{ij}(E_j) = F_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Из (11) и равенств $\beta_{1j} = \beta_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$F_1 = \beta_{1j}(E_j) = I(E_j) = E_j,$$

$$F_i = \beta_{i1}(E_1) = I(E_1) = E_1,$$

откуда следует, что

$$E_i = F_j = F, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

где F — подпространство Y. Из (11) и (12) вытекает, что $\beta_{ij}(F) = F$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть Y — конечная элементарная p-группа. Пусть $\hat{\mu}_i(y)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $n \geq 2$, — неотрицательные характеристические функции на Y, удовлетворяющие уравнению*

$$\prod_{i=1}^{n} \hat{\mu}_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j \right) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_i(\beta_{ij} u_j), \quad u_j \in Y, \tag{13}$$

где $\beta_{ij} \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\beta_{1j} = \beta_{i1} = I$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Тогда $F_{\mu_i} = F$, $i = 1,2,\ldots,n$, где F — подгруппа Y и $\beta_{ij}(F) = F$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Отметим, что Y — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{Z}(p)$. При этом подгруппы Y — линейные подпространства Y, автоморфизмы группы Y — обратимые линейные операторы.

Пусть π — отображение из Y^n в Y^n, задаваемое формулой

$$\pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} u_j, \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} u_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} u_j \right), \tag{14}$$

где $u_j \in Y$. Тогда π — линейный оператор, вообще говоря, не обратимый.

Положим $N = \pi^{-1}(\bigoplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i})$. Очевидно, что

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i} \leq \dim N. \tag{15}$$

Пусть ϕ_i — проекция на i-е координатное подпространство Y^n. Положим $E_i = \phi_i(N)$. Тогда E_i — подпространство Y. Мы покажем, что семейства линейных подпространств $\{E_i\}_{i=1}^{n}, \{F_{\mu_i}\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют условиям (5), (6).

Очевидно, что $N \subseteq (\bigoplus_{i=1}^{n} E_i)$. Отсюда и из (15) получаем

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i} \leq \dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i. \tag{16}$$

Неравенство (16) влечет

$$\sum_{i=1}^{n} \dim F_{\mu_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.$$

Положим в (13) $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N$. Тогда левая часть уравнения (13) равна 1 и мы имеем

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_i(\beta_{ij} u_j), \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N. \tag{17}$$

Фиксируем j. Тогда для каждого $u \in E_j$ найдется $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N$ такой, что $u_j = u$. Отсюда, из (17) и $0 \le \hat{\mu}_i(y) \le 1$, $y \in Y$, следует, что $\hat{\mu}_i(\beta_{ij} u) = 1$, $u \in E_j$. Следовательно, справедливы включения

$$\beta_{ij}(E_j) \subset F_{\mu_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В итоге получаем, что выполнены условия леммы 2.2. Следовательно, $F_{\mu_i} = F$, где F — подгруппа Y и $\beta_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2.3 доказана.

***Следствие* 2.1.** *Пусть Y — конечная группа, $\hat{\mu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \ge 2$, — неотрицательные характеристические функции на Y, удовлетворяющие уравнению* (13), *где $\beta_{1j} = \beta_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда либо $F_{\mu_i} = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, либо $F_{\mu_i} \ne \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и существует ненулевая подгруппа H группы Y такая, что $H \subset \left(\bigcap_{i=1}^n F_{\mu_i}\right)$ и $\beta_{ij}(H) = H$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Предположим, что $F_{\mu_k} = \{0\}$ для некоторого k. Зафиксируем простое число p и рассмотрим $Y_{(p)}$. Поскольку $Y_{(p)}$ является характеристической подгруппой, можно рассмотреть сужение уравнения (13) на $Y_{(p)}$. Тогда $Y_{(p)} \cap F_{\mu_k} = \{0\}$. Отсюда и из леммы 2.3 следует, что $Y_{(p)} \cap F_{\mu_i} = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что каждая F_{μ_i} не содержит элементов порядка p. Так как p произвольно, получаем $F_{\mu_i} = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $F_{\mu_k} \ne \{0\}$ для всех k. Тогда, в частности, $F_{\mu_1} \ne \{0\}$. Следовательно, $Y_{(p)} \cap F_{\mu_1} \ne \{0\}$ для некоторого p. Из леммы 2.3 следует, что подгруппы $Y_{(p)} \cap F_{\mu_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ненулевые, совпадают и инвариантны относительно β_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Положим $H = Y_{(p)} \cap F_{\mu_i}$. Тогда H — искомая подгруппа.

Следствие доказано.

Следующая лемма является ключевой для доказательства теоремы 1.2.

Лемма 2.4. *Путь ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \ge 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i такие, что $\hat{\mu}_i(y) \ge 0$. Рассмотрим линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i$, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что выполняется следующее условие*:

(A) *для некоторого k никакая собственная подгруппа группы X не содержит носитель μ_k.*

Тогда из независимости L_j следует, что $\mu_i = m_X$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1 справедливо равенство

$$\prod_{i=1}^n \hat{\mu}_i\left(\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij} u_j\right) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} u_j), \quad u_j \in Y. \tag{18}$$

Из условия (A) следует, что

$$F_{\mu_k} = \{0\}. \tag{19}$$

Пусть $\pi\colon Y^n \to Y^n$ — гомоморфизм, определяемый по формуле

$$\pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{2j} u_j, \ldots, \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{nj} u_j\right),$$

где $u_j \in Y$. Покажем, что $\pi \in \mathrm{Aut}(Y^n)$. Предположим противное, т. е. что $\pi \notin \mathrm{Aut}(Y^n)$. Поскольку Y^n — конечная группа, то $\mathrm{Ker}\,\pi \neq \{0\}$. Положим в (18) $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathrm{Ker}\,\pi$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$:

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} u_j). \tag{20}$$

Из (20) и $\hat{\mu}_i(y) \geq 0$ вытекает, что все сомножители в правой части равенства (20) равны 1. В частности, так как $u_{j_0} \neq 0$ для некоторого j_0, получаем $\hat{\mu}_i(\alpha_{ij_0} u_{j_0}) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, откуда следует, что $F_{\mu_i} \neq \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это противоречит условию (19). Следовательно, $\pi \in \mathrm{Aut}(Y^n)$.

Покажем, что $\hat{\mu}_i(y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для всех $y \in Y$, $y \neq 0$. Предположим противное. Тогда для некоторого l найдется $\tilde{y} \neq 0$ такой, что

$$\hat{\mu}_l(\tilde{y}) \neq 0. \tag{21}$$

Без потери общности можем предполагать, что $l = 1$.

Полагая в (18) $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n) = \pi^{-1}(\tilde{y}, 0, \ldots, 0)$, получаем

$$\hat{\mu}_1(\tilde{y}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} \tilde{u}_j). \tag{22}$$

Отметим, что найдутся по крайней мере два номера j_1, j_2 таких, что $\tilde{u}_{j_1} \neq 0$, $\tilde{u}_{j_2} \neq 0$. Действительно, если $\tilde{u}_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то получаем противоречие с $\pi^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y^n)$. Если $\tilde{u}_{j_0} \neq 0$, $\tilde{u}_j = 0, j \neq j_0$, для некоторого j_0, то $\pi(0, 0, \ldots, \tilde{u}_{j_0}, \ldots, 0) = (\tilde{\alpha}_{1j_0} \tilde{u}_{j_0}, \tilde{\alpha}_{2j_0} \tilde{u}_{j_0}, \ldots, \tilde{\alpha}_{nj_0} \tilde{u}_{j_0}) = (\tilde{y}, 0, \ldots, 0)$. Это противоречит включению $\tilde{\alpha}_{ij_0} \in \mathrm{Aut}(Y)$. Следовательно, $\tilde{u}_{j_1}$, $\tilde{u}_{j_2} \neq 0$ для некоторых j_1 и j_2. Из неравенств

$$0 \leq \hat{\mu}_i(y) \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

и равенства (22) получаем

$$\hat{\mu}_1(\tilde{y}) \leq \prod_{i=1}^{n} \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij_1} \tilde{u}_{j_1}) \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij_2} \tilde{u}_{j_2}). \tag{24}$$

Положим

$$C = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{y \neq 0} \hat{\mu}_i(y). \tag{25}$$

Согласно следствию 2.1 из (19) имеем

$$F_{\mu_i} = \{0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Используя (23), (21) и (26), получаем, что $0 < C < 1$. Поскольку $\tilde{u}_{j_1} \neq 0$, $\tilde{u}_{j_2} \neq 0$ и $\tilde{\alpha}_{ij_1}$, $\tilde{\alpha}_{ij_2} \in \mathrm{Aut}(Y)$, имеем $\tilde{\alpha}_{ij_1} \tilde{u}_{j_1} \neq 0$, $\tilde{\alpha}_{ij_2} \tilde{u}_{j_2} \neq 0$. Следовательно, из (24) и (25) вытекает, что

$$\hat{\mu}_1(\tilde{y}) \leq C^{2n}.$$

Из неравенств (24) и $\hat{\mu}_1(\tilde{y}) \neq 0$ следует, что

$$\hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij_1}\tilde{u}_{j_1}), \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij_2}\tilde{u}_{j_2}) \neq 0, \tag{27}$$

где $\tilde{u}_{j_1} \neq 0$, $\tilde{u}_{j_2} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Используя (27), таким же образом, как (24) было получено из (21), получаем оценку для каждого сомножителя в правой части (24) и применяем эту оценку к (24). Повторяя этот процесс m раз, приходим к неравенству, из которого следует, что

$$\hat{\mu}_1(\tilde{y}) \leq C^{(2n)^{m+1}}.$$

Так как $C^{(2n)^{m+1}} \to 0$ при $m \to \infty$, то $\hat{\mu}_1(\tilde{y}) = 0$. Это противоречит предположению. Следовательно, $\hat{\mu}_i(y) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, для всех $y \in Y$, $y \neq 0$. Отсюда и из (2) получаем, что $\hat{\mu}_i(y) = \hat{m}_X(y)$, $y \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $\mu_i = m_X, i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2.4 доказана.

3. Доказательства основных теорем. ***Доказательство теоремы* 1.2.** Пусть $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Отметим, что линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные формы $\delta_j L_j$, $j = 1, 2, \ldots, n,$. Поскольку

$$L_j = \alpha_{1j}(\xi_1 + \alpha_{1j}^{-1}\alpha_{2j}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1j}^{-1}\alpha_{nj}\xi_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

без потери общности можно предполагать, что $\alpha_{1j} = I$, $j = 1, 2 \ldots, n$, т. е.

$$L_j = \xi_1 + \alpha_{2j}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nj}\xi_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Положим $\eta_i = \alpha_{i1}\xi_i$ и $\gamma_{ij} = \alpha_{ij}\alpha_{i1}^{-1}$. Тогда (28) можно записать в виде

$$L_1 = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$

$$L_j = \eta_1 + \gamma_{2j}\eta_2 + \ldots + \gamma_{nj}\eta_n, , \quad j = 2, \ldots, n,$$

где случайные величины η_i независимы. Очевидно, что достаточно доказать теорему 1.2, предположив что $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

По лемме 2.1 функции $\hat{\mu}_i(y)$ удовлетворяют уравнению (18). Положим $\nu_i = \mu_i * * \bar{\mu}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\hat{\nu}_i(y) = |\hat{\mu}_i(y)|^2$, $y \in Y$. Функции $\hat{\nu}_i(y)$ неотрицательны и также удовлетворяют уравнению (18). Докажем, что $\nu_i = m_K$, где K — подгруппа группы X. Отсюда вытекает, что $\mu_i = E_{x_i} * m_K$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\mu_i \in I(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Положим $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu_i}$. Рассмотрим множество подгрупп $\{G_l\} \subset F$ таких, что $\tilde{\alpha}_{ij}G_l = \tilde{\alpha}_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через H подгруппу группы Y, порожденную всеми $\{G_l\}$. Несложно показать, что H — максимальная подгруппа группы Y, удовлетворяющая условию

(B) $\hat{\nu}_i(y) = 1$, $y \in \tilde{H}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{\alpha}_{ij}\tilde{H} = \tilde{H}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

С учетом того, что $\hat{\nu}_i(y + h) = \hat{\nu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для всех $y \in Y$, $h \in H$ и сужения автоморфизмов $\tilde{\alpha}_{ij}$ группы Y на подгруппу H являются автоморфизмами H, рассмотрим уравнение, индуцированное уравнением (18) на фактор-группе Y/H, полагая $\tilde{\nu_i}([y]) = \hat{\nu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\hat{\alpha}_{ij}[y] = [\tilde{\alpha}_{ij}y]$, $y \in [y]$, $[y] \in Y/H$. Пусть $K = A(X, H)$. Отметим, что $Y/H = (K)^*$. Поэтому если мы покажем, что $\tilde{\nu_i}([y]) = \hat{m}_K([y])$, $[y] \in Y/H$, то получим $\hat{\nu}_i(y) = \hat{m}_K(y)$, $y \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку H — максимальная подгруппа Y, удовлетворяющая условию (B), то $\{0\}$ — максимальная подгруппа Y/H, удовлетворяющая условию (B) для индуцированных характеристических функций $\tilde{\nu}_i([y])$ и индуцированных автоморфизмов $\hat{\alpha}_{ij}$.

Поэтому без потери общности можем предполагать, что

$$H = \{0\}. \tag{29}$$

Покажем, что для некоторого k никакая собственная подгруппа группы X не содержит $\sigma(\nu_k)$. Это условие эквивалентно условию $F_{\nu_k} = \{0\}$. Предположим противное. Тогда согласно следствию 2.1 найдется ненулевая подгруппа $\widetilde{H}$ группы Y, удовлетворяющая условию (B). Но это противоречит (29). Следовательно, никакая собственная подгруппа X не содержит носитель распределения ν_k. Тогда по лемме 2.4 $\nu_i = m_X, i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1.2 доказана.

Из независимости линейных форм $L_j, j = 1, 2, \ldots, n, n \geq 2$, где $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, вытекает, что $\xi_i = m_K * E_{x_i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь, в отличие от общего случая, распределения случайных величин ξ_i являются сдвигами распределений Хаара одной и той же подгруппы группы X.

Покажем, что теорема 1.2 точна в следующем смысле: в классе конечных групп из независимости k линейных форм от n случайных величин, где $k < n$, не следует, что $\mu_i \in I(X)$.

Теорема 3.1. *Пусть n и k удовлетворяют условию $n > k > 1$, $X = (\mathbb{Z}(p))^n$, где $p > 2$ — простое число, такое, что p не является делителем n. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и распределениями $\mu_i \notin I(X)$ и автоморфизмы $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, k$, независимы.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для $k = n - 1$.

Пусть $\alpha_{i,i-1}x = 2x$, $x \in X$, $i = 2, 3, \ldots, n$, и $\alpha_{ij} = I$ в остальных случаях, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Ясно, что $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$. Отметим, что $Y \cong (\mathbb{Z}(p))^n, \tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}$.

Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, n) \in Y$. Рассмотрим на X функцию

$$\rho_i(x) = 1 + \mathrm{Re}\,(x, e_i).$$

Тогда $\rho_i(x) \geq 0$, $x \in X$, и

$$\sum_{x \in X} \rho_i(x) m_X(\{x\}) = 1.$$

Обозначим через μ_i распределение на группе X с плотностью $\rho_i(x)$ относительно распределения m_X. Видим, что

$$\hat{\mu}_i(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & y = \pm e_i, \\ 0, & y \in Y, \quad y \notin \{0, \pm e_i\}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\mu_i \notin I(X)$. Пусть $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i. Покажем, что линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$ независимы. По лемме 2.1 достаточно показать, что характеристические функции $\hat{\mu}_i(y)$ удовлетворяют уравнению (3), которое принимает вид

$$\hat{\mu}_1(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})\hat{\mu}_2(2u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) \ldots \hat{\mu}_n(u_1 + u_2 + \ldots + 2u_{n-1}) =$$

$$= \hat{\mu}_1(u_1)\hat{\mu}_1(u_2) \ldots \hat{\mu}_1(u_{n-1})\hat{\mu}_2(2u_1)\hat{\mu}_2(u_2) \ldots \hat{\mu}_2(u_{n-1}) \ldots$$

$$\ldots \hat{\mu}_n(u_1)\hat{\mu}_n(u_2) \ldots \hat{\mu}_n(2u_{n-1}). \tag{30}$$

Покажем, что левая часть уравнения (30) не равна 0 тогда и только тогда, когда $u_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$. Действительно, предположим, что что левая часть уравнения (30) не равна 0. Тогда u_j удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = b_1, \\ &2u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_1 + u_2 + \ldots + 2u_{n-1} = b_n, \end{aligned} \tag{31}$$

где $b_i \in \{0, \pm e_i\}$.

Из (31) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n} b_i = nb_1, \\ &u_1 = b_2 - b_1, \\ &u_2 = b_3 - b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_{n-1} = b_n - b_1. \end{aligned} \tag{32}$$

Первое уравнение системы (32) влечет $b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому единственным решением системы (31) является $u_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Принимая во внимание, что $\hat{\mu}_i(\pm e_j) = 0$ при $i \neq j$, легко видеть, что если $u_j \neq 0$ для некоторого j, то правая часть уравнения (30) равна 0, т. е. правая часть уравнения (30) не равна 0 тогда и только тогда, когда $u_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому равенство (30) выполняется для всех $u_j \in Y$.

Теорема 3.1 доказана.

Отметим, что теорема 3.1 может быть усилена при $n = 3$. Обозначим через G группу вида (1). Справедливы следующие утверждения [13]:

1. Пусть $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{Aut}(G),\ i = 1, 2, 3,\ \xi_i$ — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ независимы. Если $X = G$, то все μ_i – вырожденные распределения. Если $X = \mathbb{Z}(3) \times G$, то либо все μ_i — вырожденные распределения, либо $\mu_{i_1} * E_{x_1} = \mu_{i_2} * E_{x_2} = m_{\mathbb{Z}(3)},\ x_i \in X$, для как минимум двух распределений μ_{i_1} и μ_{i_2}. Если $X = \mathbb{Z}(5) \times G$, то либо все μ_i —

вырожденные распределения, либо $\mu_{i_1} * E_{x_1} = m_{\mathbb{Z}(5)}$, $x_1 \in X$, для как минимум одного распределения μ_{i_1}.

2. Если группа X не изоморфна ни одной из групп, упоминавшихся в утверждении 1, то найдутся $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{Aut}(X)$, $i = 1, 2, 3$, и независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_i со значениями в группе X и распределениями $\mu \notin I(X)$ такие, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$ независимы.

Докажем, что теорема 1.2 не верна, если α_{ij} — эндоморфизмы X и не все α_{ij} являются автоморфизмами.

Предложение 3.1. *Предположим, что группа X не изоморфна группе $\mathbb{Z}(p)$, где p — простое число. Тогда найдутся независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в X и распределением μ и ненулевые эндоморфизмы α, β группы Y такие, что*:

a) *линейные формы $L_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ независимы*;

b) $\mu \notin I(X)$;

c) $\sigma(\mu) = X$.

Доказательство. Сначала покажем, что существуют эндоморфизмы α, β группы X, удовлетворяющие условиям:

1) $\alpha \notin \mathrm{Aut}(X), \beta \in \mathrm{Aut}(X)$;

2) $\beta(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \mathrm{Ker}\,\alpha$;

3) $\alpha^2 x \neq \beta x$ для всех $x \in X, x \neq 0$.

Без потери общности можем предполагать, что X — p-примарная группа. По структурной теореме для конечных абелевых групп

$$X = \prod_{k=1}^{m} (\mathbb{Z}(p^k))^{k_l},$$

где $k_l \geq 0$. Возможны два случая: $X \cong \mathbb{Z}(p^k)$ и $X \ncong \mathbb{Z}(p^k)$. Если $X \cong \mathbb{Z}(p^k)$, где $k > 1$, то положим $\alpha x = px$, $x \in X$, $\beta = (p-1)x$, $x \in X$. Легко доказать, что α и β удовлетворяют условиям 1 – 3.

Если $X \ncong \mathbb{Z}(p^k)$, то $X = X_1 \times X_2$, где X_1, X_2 — нетривиальные подгруппы группы X. Обозначим через (x_1, x_2), $x_i \in X_i$, элементы группы X. Пусть $\alpha(x_1, x_2) = (0, x_1)$, $x \in X$, $\beta = I$. Несложно проверить, что условия 1 – 3 выполняются.

Итак, пусть α и β удовлетворяют условиям 1 – 3. Легко показать, что гомоморфизм $\pi\colon Y^2 \to Y^2$, определяемый по формуле

$$\pi(u, v) = (\tilde{\alpha}u + v, \tilde{\beta}u + \tilde{\alpha}v), \tag{33}$$

является автоморфизмом Y^2. Ясно, что $H = \mathrm{Ker}\,\tilde{\alpha} \neq \{0\}$. Из (33) и условия 2 следует, что $\pi H^2 \subset H^2$. Так как $\pi \in \mathrm{Aut}(Y^2)$ и Y^2 конечны, получаем

$$\pi H^2 = H^2. \tag{34}$$

Положим $K = A(X, H)$, $\mu = (1-b)m_X + bm_K$, где $0 < b < 1$. Тогда

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ b, & y \in H, y \neq 0, \\ 0, & y \notin H. \end{cases} \tag{35}$$

Очевидно, что $\mu \notin I(X)$ и $\sigma(\mu) = X$.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_i, ξ_2 со значениями в группе X и распределениями μ. Докажем, что L_1 и L_2 независимы. По лемме 2.1 достаточно показать, что характеристические функции $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяют уравнению (18), которое принимает вид

$$\hat{\mu}(\tilde{\alpha}u + v)\hat{\mu}(\tilde{\beta}u + \tilde{\alpha}v) = \hat{\mu}(\tilde{\alpha}u)\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(\tilde{\beta}u)\hat{\mu}(\tilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y. \tag{36}$$

Если $u, v \in H$, то очевидно, что (36) выполняется.

Покажем, что если либо $u \notin H$, либо $v \notin H$, то обе части равенства (36) равны 0.

Если либо $u \notin H$, либо $v \notin H$, то (35) влечет, что правая часть (36) равна 0. Покажем, что то же верно и для левой части (36). Предположим противное. Тогда справедливы включения

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}u + v \in H, \\ &\tilde{\beta}u + \tilde{\alpha}v \in H. \end{aligned} \tag{37}$$

Включения (37) означают, что $\pi(u, v) \in H^2$. Тогда (34) влечет, что $(u, v) \in H^2$, т. е. $u, v \in H$. Это противоречит предположению.

Предположение 3.1 доказано.

Автор выражает благодарность Г. М. Фельдману за постановку задачи и полезные обсуждения и А. И. Ильинскому за полезные обсуждения и комментарии.

1. *Skitovich V. P.* On a propherty of the normal distribution // Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.). – 1953. – **89**. – P. 217 – 219.
2. *Darmois G.* Analyse generale des liasions stochastiques. Etude particuliere de l‘analyse factorielle lineaire // Rev. Inst. Int. Statist. – 1953. – **21**. – P. 2 – 8.
3. *Kagan A. M., Linnik Yu. V., Rao C. R.* Characterization problems in mathematical statistics // Wiley Ser. in Probab. and Math. Statist. – New York etc.: John Wiley & Sons, 1973.
4. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 533 – 541.
5. *Feldman G. M.* On the Skitovich – Darmois theorem for finite abelian groups // Theory Probab. Appl. – 1992. – **37**. – P. 621 – 631.
6. *Feldman G. M.* On the Skitovich – Darmois theorem on compact groups // Theory Probab. Appl. – 1996. – **41**. – P. 768 – 773.
7. *Feldman G. M.* The Skitovich – Darmois theorem for discrete periodic Abelian groups // Theory Probab. Appl. – 1997. – **42**. – P. 611 – 617.
8. *Feldman G. M.* More on the Skitovich – Darmois theorem for finite Abelian groups // Theory Probab. Appl. – 2001. – **45**. – P. 507 – 511.
9. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich – Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2000. – **13**. – P. 859 – 869.
10. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich – Darmois theorem for discrete Abelian groups // Theory Probab. Appl. – 2005. – **49**. – P. 527 – 531.
11. *Feldman G. M., Graczyk P.* The Skitovich – Darmois theorem for locally compact Abelian groups // J. Austral. Math. Soc. – 2010. – **88**. – P. 339 – 352.
12. *Graczyk P., Feldman G. M.* Independent linear statistics on finite abelian groups // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, № 4. – P. 499 – 506.
13. *Krakowiak W.* The theorem of Darmois – Skitovich for Banach valued random variables // Ann. Inst. H. Poincare B. – 1975. – **11**, № 4. – P. 397 – 404.
14. *Myronyuk M. V.* On the Skitovich – Darmous and Heyde theorem in a Banach space // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 9. – P. 1437 – 1447 (transl. from Ukr. Mat. Zh. – 2008. – **60**, № 9. – P. 1234 – 1242).
15. *Feldman G.* Functional equations and characterizations problems on locally compact Abelian groups // EMS. – 2008.
16. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract harmonic analysis. – Berlin etc.: Springer, 1963. – Vol. 1.

Получено 23.05.11