УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
В. В. Лаюк (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Fundamental solutions of the Cauchy problem for three classes of degenerate parabolic equations are investigated. These equations are natural generalizations of the classical Kolmogorov equation of the diffusion with the inertia.

Для трех классов вырожденных параболических уравнений, естественно обобщающих классическое уравнение диффузии с инерцией А. Н. Колмогорова, исследованы фундаментальные решения задачи Коши.

Будемо розглядати класи рівнянь $\mathbf{E_{21}^B}$, $\mathbf{E_{22}^B}$ і $\mathbf{E_{23}^B}$, які узагальнюють відповідно клас $\mathbf{E_{21}}$ вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова порядку $2b$, клас $\mathbf{E_{22}}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова і клас $\mathbf{E_{23}}$ вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною (в сенсі Ейдельмана) частиною за основними змінними із монографії [1]. Ці класи характеризуються деякою сталою матрицею B, елементи якої входять у коефіцієнти молодших членів рівняння. Коли матриця B має найпростіший вигляд, то розглядувані класи є класами $\mathbf{E_{21}}$, $\mathbf{E_{22}}$ та $\mathbf{E_{23}}$. У цій статті доповнено результати з [1] для класів $\mathbf{E_{21}} - \mathbf{E_{23}}$ та наведено відповідні результати дослідження фундаментальних розв’язків задачі Коші (ФРЗК) для класів $\mathbf{E_{21}^B} - \mathbf{E_{23}^B}$. Доповнення результатів з [1] стосується оцінок приростів старших похідних від фундаментальних розв’язків. Доведені в статті теореми було анонсовано в [2].

1. Позначення, означення класів рівнянь, припущення. Вважатимемо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{l1}, \ldots, k_{ln_l}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Далі T — задане додатне число, $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | \, t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi_{[0,T]} := \{(t,x) | \, t \in [0,T], x \in \in \mathbb{R}^n\}$.

Розглянемо рівняння вигляду

$$(S_B - A_s(t, x, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1_s}$$

де $s \in \{1, 2, 3\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \right) \partial_{x_{3j}}, \tag{2}$$

$$A_1(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t,x) \partial_{x_1}^{k_1}, \tag{3}$$

$$A_2(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t,x), \tag{4}$$

$$A_3(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{\|k_1\|\le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{5}$$

У виразі (2) b_{sj}^1, b_{sj}^2 — задані дійсні числа, у виразі (3) b — задане натуральне число і $|k_1| := \sum_{j=1}^{n_1} k_{1j}$, у виразі (5) b — найменше спільне кратне заданих натуральних чисел $b_1,\ldots,b_{n_1}$ і $\|k_1\| := \sum_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, де $m_j := b/b_j$, $j\in\{1,\ldots,n_1\}$.

Диференціальний вираз (2) можна записати як

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x), \tag{6}$$

де B — матриця розміру $n\times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{7}$$

B^1, B^2 — матриці, складені відповідно з дійсних чисел b_{sj}^1, $s\in\{1,\ldots,n_1\}$, $j\in\{1,\ldots,n_2\}$, b_{sj}^2, $s\in\{1,\ldots,n_2\}$, $j\in\{1,\ldots,n_3\}$, O — нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := \mathrm{col}(\partial_{x_{11}},\ldots,\partial_{x_{1n_1}},\partial_{x_{21}},\ldots,\partial_{x_{2n_2}},\partial_{x_{31}},\ldots,\partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Для рівнянь (1_s) використовуватимемо такі умови:

$\boldsymbol{\alpha_1}$) матриця (7), в якій блоки B^1 і B^2 записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1, B_1^2 і B_2^2 — матриці відповідно розмірів $n_2\times n_2$, $(n_1-n_2)\times n_2$, $n_3\times n_3$ і $(n_2-n_3)\times n_3$, задовольняє умови $\det B_1^j \ne 0$, $j\in\{1,2\}$;

$\boldsymbol{\alpha_{2s}}$) існує така стала $\delta>0$, що для кожної точки $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re}\Phi_s(t,x,\sigma_1) \le -\delta K_s(\sigma_1),$$

де

$$\Phi_1(t,x,\sigma_1) := \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1}, \quad \Phi_2(t,x,\sigma_1) := \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1s},$$

$$\Phi_3(t,x,\sigma_1) := \sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1},$$

$$K_1(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b}, \quad K_2(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2}, \quad K_3(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Клас рівнянь (1_s), які задовольняють умови $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, позначатимемо через $\mathbf{E_{2s}^B}$.

Припущення щодо гладкості коефіцієнтів диференціальних виразів A_s, які наведено нижче, гарантуватимуть лише існування розв'язків (у тому числі й фундаментальних) рівнянь із класів $\mathbf{E_{2s}^B}$ у певному послабленому сенсі. Наведемо відповідні означення, які є аналогічними до означень, наведених у [3, 4].

Означення 1. *Функція u називається диференційовною за Лі в точці (t, x) відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом* (2) (*або* (6)), *якщо існує скінченна границя*

$$(S_B^L u)(t,x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))),$$

де $\gamma(t,x,h) := (t-h, (e^{hB'}x')')$, $h \in \mathbb{R}^n$, *— інтегральна крива заданого векторного поля, яка проходить через точку* (t,x) (*тут і далі штрих означає транспонування матриці*).

Границя $(S_B^L u)(t,x)$ *називається похідною Лі від функції* u *в точці* (t,x) *відносно заданого векторного поля.*

Зауважимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$ і $\partial_{x_{3j}} u$ в точці (t,x), то $(S_B^L u)(t,x) = (S_B u)(t,x)$.

Означення 2. *Функцію u називатимемо L-розв'язком рівняння (1_s) в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_B^L u$ та звичайні похідні від u по x_1, які входять у рівняння (1_s), і в кожній точці $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ задовольняється рівняння*

$$(S_B^L - A_s(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0. \qquad (8_s)$$

Далі під розв'язками рівнянь (1_s) розумітимемо L-розв'язки, а під виразом $S_B u$ — похідну Лі $S_B^L u$.

Зауважимо, що у випадку, коли коефіцієнти диференціальних виразів A_s не залежать від просторових змінних, L-розв'язки є звичайними класичними розв'язками відповідних рівнянь.

Використовуючи структуру матриці B, описану в умові $\boldsymbol{\alpha_1}$, легко переконатись, що

$$(e^{hB'}x')' = X(h) := (X_1(h), X_2(h), X_3(h)),$$

$$X_s(h) := (X_{s1}(h), \ldots, X_{sn_s}(h)), \quad s \in \{1,2,3\},$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j}, \quad j \in \{1,\ldots,n_1\},$$

$$X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, \quad j \in \{1,\ldots,n_2\}, \qquad (9)$$

$$X_{3j}(h) := x_{3j} + h\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{ks}^1 x_{1k}, \quad j \in \{1,\ldots,n_3\},$$

$$\gamma(t,x,h) = (t-h, X(h)), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що далі крім точки $X(h)$ використовуватимуться інші аналогічні точки, побудовані не за змінною x, а за іншими змінними (наприклад, точки $Y(h)$ і $\Xi(h)$, які побудовані за змінними y і ξ).

Щоб сформулювати наступні припущення щодо коефіцієнтів виразів A_s, введемо відповідні поняття гельдерових функцій. Для цього розглянемо спеціальні відстані між точками x і ξ, (t,x) і (τ,ξ), де $\{t,\tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x := (x_1,x_2,x_3), \xi := := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_l := (x_{l1},\ldots,x_{ln_l}), \xi_l := (\xi_{l1},\ldots,\xi_{ln_l})\} \subset \mathbb{R}^{n_l}$. Ці відстані враховують специфіку кожного із рівнянь (1_s). Приймемо, що

$$d_1(x;\xi) := \sum_{s=1}^{3} |x_s - \xi_s|^{1/(2b(s-1)+1)}, \quad d_1(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/(2b)} + d_1(x;\xi),$$

$$d_2(x;\xi) := \sum_{s=1}^{3} |x_s - \xi_s|^{1/(2(s-1)+1)}, \quad d_2(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/2} + d_2(x;\xi), \quad (10)$$

$$d_3(x;\xi) := \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - \xi_{sj}|^{1/(2b(s-1)+m_j)}, \; d_3(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/(2b)} + d_3(x;\xi).$$

Для приростів функцій далі будемо використовувати позначення типу

$$\Delta_t^{\tau} f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\tau,\cdot),$$

$$\Delta_x^{\xi} f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,\xi),$$

$$\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t,x,\cdot) := f(t,x,\cdot) - f(\tau,\xi,\cdot).$$

Означення 3. *Функцію $f(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, називатимемо B_s-гельдеровою з показником $\alpha \in (0,1]$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $H_s > 0$, що для будь-яких $\{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ виконується нерівність*

$$|\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t,x)| \leq H_s \left(d_s(t, X(t-\tau); \tau, \xi)\right)^{\alpha},$$

де $s \in \{1,2,3\}$, $X(t-\tau)$ означено формулами (9), *а d_s — формулами* (10).

Крім умов $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, використовуватимемо ще такі умови:

$\boldsymbol{\alpha_{3s}}$) коефіцієнти виразу $A_s(t,x,\partial_{x_1})$ обмежені та B_s-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$;

$\boldsymbol{\alpha_{4s}}$) коефіцієнти виразу $A_s(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені та B_s-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять.

2. Зв'язок класів рівнянь $\mathbf{E_{2s}^B}$ з класами $\mathbf{E_{2s}}$. Виконаємо в рівняннях (1_s) заміну просторових змінних за допомогою системи рівностей

$$\hat{x}_{1j} := \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{n_1} b_{ks}^1 x_{1k} \right) b_{sj}^2, & j \in \{1,\ldots,n_3\}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, & j \in \{n_3+1,\ldots,n_2\}, \\ x_{1j}, & j \in \{n_2+1,\ldots,n_1\}, \end{cases}$$

$$\hat{x}_{2j} := \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s}, & j \in \{1,\ldots,n_3\}, \\ x_{2j}, & j \in \{n_3+1,\ldots,n_2\}, \end{cases}$$

$$\hat{x}_{3j} := x_{3j}, \quad j \in \{1, \ldots, n_3\},$$

яку скорочено можна записати у вигляді

$$\hat{x}' = Ux', \quad U := \begin{pmatrix} U_1 & O & O \\ O & U_2 & O \\ O & O & U_3 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де U_s — матриця розміру $n_s \times n_s$. Як доведено у [5], за умови $\boldsymbol{\alpha_1}$ заміна змінних (11) є невиродженою.

Після реалізації заміни (11) рівняння (1_s) переходить у рівняння

$$(S_{\hat{B}} - \hat{A}_s(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t, \hat{x}) = 0, \quad (t, \hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{12_s}$$

в якому

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} O & \hat{B}_1 & O \\ O & O & \hat{B}_2 \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_1 := \begin{pmatrix} I_{n_2} \\ O \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}_2 := \begin{pmatrix} I_{n_3} \\ O \end{pmatrix}$$

(I_r — одинична матриця порядку r); $\hat{A}_s(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1})$, $s \in \{1, 2, 3\}$, — диференціальні вирази того самого вигляду, що й вирази $A_s(t, x, \partial_{x_1})$, їхні коефіцієнти $\hat{a}_{k_1}$, $\hat{a}_{js}$, $\hat{a}_j$ і $\hat{a}_0$ виражаються через виражені в нових змінних $\hat{x}$ коефіцієнти a_{k_1}, a_{js}, a_j і a_0 та елементи матриць B^1 і B^2. При цьому з умов $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$ випливають для рівнянь (12_s) відповідно умови $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{2s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{3s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{4s}}$, які відрізняються від попередніх лише тим, що в них $X(h)$ замінено на $\hat{X}(h) := (UX'(h))'$, де

$$\hat{X}_s(h) := (U_s X_s'(h))',$$

$$\hat{X}_{sj}(h) := \sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{r!} h^r \hat{x}_{(s-r)j}, \quad j \in \{1, \ldots, n_s\}, \quad s \in \{1, 2, 3\}. \tag{13}$$

Отже, за допомогою заміни (11) рівняння (1_s), для яких виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$, $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$, зводяться до рівнянь (12_s), які задовольняють умови $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{2s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{3s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{4s}}$.

Класи рівнянь (12_s), для яких виконуються умови $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{2s}}$, $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{3s}}$ і $\boldsymbol{\hat{\alpha}_{4s}}$, є класами $\mathbf{E_{2s}}$, $s \in \{1, 2, 3\}$, розглянутими в [1].

Зауважимо, що в [1] фактично розглядаються розв'язки рівнянь (12_s) в сенсі означення 2, в якому рівняння (8_s) слід замінити відповідно рівняннями

$$(S^L_{\hat{B}} - \hat{A}_s(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t, \hat{x}) = 0,$$

де $S^L_{\hat{B}}\hat{u}$ — похідна Лі від функції $\hat{u}$ відносно векторного поля, заданого виразом $S_{\hat{B}}$.

3. Про оцінки ФРЗК для рівнянь із класів $\mathbf{E_{21}}$ – $\mathbf{E_{23}}$. У цьому пункті, по-перше, наведено результати з [1], які стосуються ФРЗК для рівнянь із класів $\mathbf{E_{21}}$ – $\mathbf{E_{23}}$ і далі будуть використовуватися, а по-друге, одержано нові точні оцінки приростів ФРЗК та його похідних. Детальні доведення дано тільки для класу $\mathbf{E_{21}}$, для інших класів рівнянь вони аналогічні.

Під S будемо розуміти диференціальний вираз (2), в якому B замінено на $\hat{B}$; під точкою $X(t)$ — точку $\hat{X}(t)$, означену в (13); під умовами $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$ — такі самі умови, в яких гельдеровість функцій береться у сенсі означення 3, лише за точку $X(t)$ взято вищевказану точку $\hat{X}(t)$.

Спочатку розглянемо рівняння

$$(S - A_1)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

в якому диференціальний вираз A_1 збігається з виразом

$$A_1(\beta, y, \partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(\beta, y)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{15}$$

Припускатимемо, що виконуються такі умови:

$\boldsymbol{\beta_1}$) коефіцієнти виразу (15) обмежені та існує стала $\delta > 0$ така, що для будь-яких $(\beta, y) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(\beta, y)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b};$$

$\boldsymbol{\beta_2}$) коефіцієнти виразу (15) B_1-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1]$ в $\Pi_{[0,T]}$.

Встановимо деякі властивості функції

$$Z_1(t,x;\tau,\xi) := G_0(t,x;\tau,\xi;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

яка береться за параметрикс для рівняння (14) із залежними від усіх змінних коефіцієнтами. Тут $G_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;\beta,y)$ — ФРЗК для рівняння

$$(S - \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(\beta, y)\partial_{x_1}^{k_1})u = 0.$$

Властивість 1. *Нехай виконуються умови $\boldsymbol{\beta_1}$ і $\boldsymbol{\beta_2}$. Тоді справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(t-\tau)^{-M_1-M_{k0}} E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi), \tag{16}$$

$$\begin{gathered} |\Delta_x^{x'} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi)| \le \\ \le C_k (d_1(x;x'))^{\alpha_0} (t-\tau)^{-M_1-M_{k0}-\alpha_0/(2b)} E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi), \\ (d_1(x;x'))^{2b} \le t-\tau, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,y)dy \right| \le C_k(t-\tau)^{-M_{k0}+\alpha/(2b)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{18}$$

$$|SZ_1(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_1-1} E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi), \tag{19}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\tau,y)dy \right| \le C(t-\tau)^{-1+\alpha/(2b)}, \tag{20}$$

$$\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,y)dy\right| \le C_k(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_{k0}-(\alpha_0-\alpha)/(2b)},$$

$$k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\},\quad (d_1(x;x'))^{2b}\le t-\tau, \tag{21}$$

$$\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\tau,y)dy\right|\le$$

$$\le C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)},\quad (d_1(x;x'))^{2b}\le t-\tau, \tag{22}$$

де

$$E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\left\{-c\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{1-qs}|X_s(t-\tau)-\xi_s|^q\right\}, \tag{23}$$

$M_1 := \sum_{s=1}^{3}(s-1+1/(2b))n_s$, $M_{k0} := |k_1|/(2b)+(1+1/(2b))|k_2|+(2+1/(2b))|k_3|$, $q := 2b/(2b-1)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, C_k, C *і* c *— деякі додатні сталі,* α_0 *— довільне фіксоване число з проміжку* $(0,1]$, α *— число з умови* $\boldsymbol{\beta_2}$.

Доведення. Оцінки (16)–(20) доведено в [1]. Доведемо оцінку (21). Для цього використаємо зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{\tau,z}^{t,x}\partial_x^k G_0(t,x;\tau,y;\tau,z)|_{z=y}dy$$

і

$$\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,y)dy = \sum_{j=1}^{n_1}\int\limits_{x_{1j}}^{x'_{1j}}\partial_{\zeta_{1j}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{\zeta_1^{(j)}}Z_1(t,\zeta_1^{(j)};\tau,y)dy\right)d\zeta_{1j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{x_{2j}}^{x'_{2j}}\partial_{\zeta_{2j}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{\zeta_2^{(j)}}Z_1(t,\zeta_2^{(j)};\tau,y)dy\right)d\zeta_{2j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{x'_{3j}}\partial_{\zeta_{3j}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{\zeta_3^{(j)}}Z_1(t,\zeta_3^{(j)};\tau,y)dy\right)d\zeta_{3j}=$$

$$=\sum_{s=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^k_{\zeta_s^{(j)}}Z_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,y)dy\right)\right)d\zeta_{sj},$$

де

$$\zeta_1^{(j)} := (x_{11},\ldots,x_{1,j-1},\zeta_{1j},x'_{1,j+1},\ldots,x'_{1n_1},x'_{21},\ldots,x'_{2n_2},x'_{31},\ldots,x'_{3n_3}),$$

$$j \subset \{1, \ldots, n_1\},$$

$$\zeta_2^{(j)} := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2,j-1}, \zeta_{2,j}, x'_{2,j+1}, \ldots, x'_{2n_2}, x'_{31}, \ldots, x'_{3n_3}),$$

$$j \subset \{1, \ldots, n_2\},$$

$$\zeta_3^{(j)} := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, x_{31}, \ldots, x_{3,j-1}, \zeta_{3,j}, x'_{3,j+1}, \ldots, x'_{3n_3}),$$

$$j \subset \{1, \ldots, n_3\}.$$

За допомогою оцінок [1] (властивість 3.2)

$$|\Delta_{\beta,y}^{\lambda,z} \partial_x^k \partial_\xi^l G(t, x; \tau, \xi; \beta, y)| \leq C_{kl} H(d_1(\beta, Y(\beta - \lambda); \lambda, z))^\alpha \times$$

$$\times (t - \tau)^{-M_1 - M_{kl}} E_c^{(1,1)}(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{(\beta, y), (\lambda, z)\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

нерівності

$$(d_1(t, X(t - \tau); \tau, y))^\alpha E_c^{(1,1)}(t, x; \tau, y) \leq C(t - \tau)^{\alpha/(2b)} E_{c_1}^{(1,1)}(t, x; \tau, y),$$
$$\tau < t, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_1 \in (0, c), \tag{24}$$

і рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} (t - \tau)^{-M_1} E_{c_2}^{(1,1)}(t, x; \tau, y) dy = C, \quad \tau < t, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

одержуємо

$$\left| \Delta_x^{x'} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t, x; \tau, y) dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_s} \left| \int_{x_{sj}}^{x'_{sj}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_{\tau,z}^{t,\zeta_s^{(j)}} \partial_{\zeta_{sj}} \partial_{\zeta_s^{(j)}}^k G_0(t, \zeta_s^{(j)}; \tau, y; \tau, z) \right| \Big|_{z=y} dy \right) d\zeta_{sj} \right| \leq$$

$$\leq C_k H \sum_{s=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_s} \left| \int_{x_{sj}}^{x'_{sj}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(d_1(t, \Xi_s^{(j)}(t - \tau); \tau, y) \right)^\alpha \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (t - \tau)^{-M_1 - M_{k0} - (2b(s-1)+1)/(2b)} E_c^{(1,1)}(t, \zeta_s^{(j)}; \tau, y) dy \right) d\zeta_{sj} \right| \leq$$

$$\leq C_k H \sum_{s=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - x'_{sj}| (t - \tau)^{-M_{k0} - (2b(s-1)+1-\alpha)/(2b)}, \tag{25}$$

де

$$\Xi_1^{(j)}(t) := \zeta_1^{(j)}, \quad j \subset \{1,\ldots,n_1\}, \quad \Xi_2^{(j)}(t) := \zeta_2^{(j)} + t\zeta_1^{(j)}, \quad j \subset \{1,\ldots,n_2\},$$

$$\Xi_3^{(j)}(t) := \zeta_3^{(j)} + t\zeta_2{}^{(j)} + \frac{t^2}{2}\zeta_1{}^{(j)}, \quad j \subset \{1,\ldots,n_3\}.$$

Оскільки $(d_1(x;x'))^{2b} \le t-\tau$, тобто

$$\left(|x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'|^{1/(2b+1)} + |x_3 - x_3'|^{1/(4b+1)}\right)^{2b} \le t-\tau,$$

то звідси випливають такі нерівності:

$$|x_{sj} - x_{sj}'|^{2b/(2b(s-1)+1)} \le t-\tau, \quad j \subset \{1,\ldots,n_s\}, \quad s \in \{1,2,3\}. \tag{26}$$

Використавши (26), оцінимо

$$\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - x_{sj}'|(t-\tau)^{-(2b(s-1)+1)/(2b)} \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - x_{sj}'|^{\alpha_0/(2b(s-1)+1)}(t-\tau)^{-\alpha_0/(2b)} \le$$

$$\le C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-\alpha_0/(2b)}. \tag{27}$$

Тоді з нерівностей (25) і оцінки (27) матимемо

$$\left|\Delta_x^{x'} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,y)dy\right| \le C_k(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_{k0}-(\alpha_0-\alpha)/(2b)},$$

$$(d_1(x;x'))^{2b} \le t-\tau, \quad \{x,x'\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Доведемо тепер оцінку (22). Для цього використовуватимемо зображення

$$\Delta_x^{x'} \int\limits_{\mathbb{R}^n} S^x Z_1(t,x;\tau,y)dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1} \int\limits_{x_{1j}}^{x_{1j}'} \partial_{\zeta_{1j}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S^{\zeta_1^{(j)}} Z_1(t,\zeta_1^{(j)};\tau,y)dy \right) d\zeta_{1j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{x_{2j}}^{x_{2j}'} \partial_{\zeta_{2j}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S^{\zeta_2^{(j)}} Z_1(t,\zeta_2^{(j)};\tau,y)dy \right) d\zeta_{2j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{x'_{3j}}\partial_{\zeta_{3j}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}S^{\zeta_3^{(j)}}Z_1(t,\zeta_3^{(j)};\tau,y)dy\right)d\zeta_{3j}=$$

$$=\sum_{s=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}S^{\zeta_s^{(j)}}Z_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,y)dy\right)\right)d\zeta_{sj} \tag{28}$$

і рівність

$$S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)=\sum_{|k_1|=2b}a_{k_1}(\tau,\xi)\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\tau,\xi), \tag{29}$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$S^x:=\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}.$$

Оцінимо далі приріст

$$\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}S^xZ_1(t,x;\tau,y)dy\right|\le$$

$$\le\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\Delta_{\tau,\zeta}^{t,x}\partial_{\zeta_{sj}}\partial_{\zeta_s^{(j)}}^{k_1}G_0(t,\zeta_s^{(j)};\tau,y;\tau,z)\Big|_{z=y}\right|dy\right)d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le CC_kH\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(d_1(t;\Xi_s^{(j)}(t-\tau);\tau,y)\right)^{\alpha}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(t-\tau)^{-M_1-1-(2b(s-1)+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,y)dy\right)d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}|x_{sj}-x'_{sj}|(t-\tau)^{-1-(2b(s-1)+1-\alpha)/(2b)}. \tag{30}$$

Оскільки $(d_1(x;x'))^{2b}\le t-\tau$, то справджуються нерівності (26). Використавши їх, одержимо

$$\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}|x_{sj}-x'_{sj}|(t-\tau)^{-(2b(s-1)+1)/(2b)}\le$$

$$\leq \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}|x_{sj}-x'_{sj}|^{\alpha_0/(2b(s-1)+1)}(t-\tau)^{-\alpha_0/(2b)} \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-\alpha_0/(2b)}. \tag{31}$$

З нерівностей (30) і (31) випливає оцінка

$$\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\tau,y)dy\right| \leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)},$$

$$(d_1(x;x'))^{2b} \leq t-\tau, \quad \{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n, \quad 0\leq\tau<t\leq T.$$

Властивість 1 доведено.

Наступна властивість стосується інтеграла

$$W_1(t,x;\tau,\xi) :=$$

$$:= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t,x;\beta,y)Q(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad 0\leq\tau<t\leq T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{32}$$

Властивість 2. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$ *і неперервна функція* Q *задовольняє умови*

$$|Q(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \tag{33}$$

$$|\Delta_x^y Q(t,x;\tau,\xi)| \leq C(d_1(x;y))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha_2/(2b)}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,y;\tau,\xi)), \tag{34}$$

де

$$E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) := E_c^{(1,0)}(t,x_1;\tau,\xi_1)\sum_{s=0}^{\infty}(\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))\times$$

$$\times(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^s(\Gamma(s\alpha/(2b)))^{-1}E_{c\delta_0^s}^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$E_c^{(1,0)}(t,x_1;\tau,\xi_1) := \exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q\}, \tag{35}$$

$\hat{C}$ *і* δ_0 *— деякі додатні сталі, причому* $\delta_0<1$, Γ *— гамма-функція Ейлера,* $0\leq\tau<$ $<t\leq T$, $\{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\alpha_1\in(0,\alpha)$ *і* $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$. *Тоді функція* (32) *має неперервні похідні* $\partial_{x_1}^{k_1}W_1$, $|k_1|\leq 2b$, *і* SW_1, *для яких справджуються формули*

$$\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\beta,y)Q(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad |k_1|<2b,$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\beta,y) Q(\beta,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\beta,y) \Delta_y^{X(t-\beta)} Q(\beta,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k_1} Z_1(t,x;\beta,y) dy \right) Q(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta, \quad |k_1| = 2b,$$

$$SW_1(t,x;\tau,\xi) = Q(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\beta,y) Q(\beta,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\beta,y) \Delta_y^{X(t-\beta)} Q(\beta,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} SZ_1(t,x;\beta,y) dy \right) Q(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_1 := t - (t-\tau)/2. \tag{36}$$

Цю властивість доведено в [1] (властивість 3.6).

Розглянемо далі рівняння

$$(S - A_1(t,x,\partial_{x_1})) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{37}$$

в якому диференціальний вираз A_1 задано формулою (3). Для цього рівняння будемо використовувати умови $\boldsymbol{\alpha_{21}}$, $\boldsymbol{\alpha_{31}}$ та $\boldsymbol{\alpha_{41}}$.

Якщо виконується умова $\boldsymbol{\alpha_{41}}$, то для рівняння (37) існує спряжене рівняння, яке має вигляд

$$S^* v(\tau,\xi) - \sum_{|k_1| \le 2b} (-\partial_{\xi_1})^{k_1} (\bar{a}_{k_1}(\tau,\xi) v(\tau,\xi)) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)}, \tag{38}$$

де

$$S^* := -\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j} \partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j} \partial_{\xi_{3j}},$$

а риска над a_{k_1} означає комплексне спряження. При цьому для коефіцієнтів цього рівняння виконується умова $\boldsymbol{\alpha_{31}}$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_{21}}$ *і* $\boldsymbol{\alpha_{31}}$, *то для рівняння* (37) *існує ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_1 - |k_1|/(2b)} E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \quad |k_1| \le 2b, \tag{39}$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_1-1}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \tag{40}$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|+\alpha)/(2b)}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,x';\tau,\xi)), \quad |k_1|\le 2b, \tag{41}$$

$$|\Delta_x^{x'}SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1-\alpha/(2b)}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,x';\tau,\xi)), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{42}$$

За додаткової умови $\boldsymbol{\alpha_{41}}$ *для спряженого рівняння* (38) *існує ФРЗК* Z^*, *зв'язаний з ФРЗК* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x)=\bar{Z}(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{43}$$

і для Z *є правильною формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \tag{44}$$

де $0\le\tau<\lambda<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$.

Доведення. ФРЗК для рівняння (37) шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=Z_1(t,x;\tau,\xi)+W_1(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{45}$$

де Z_1 — параметрикс із властивостями 1 і 2, а функція W_1 визначається формулою (32), в якій Q — невідома функція. Вважається, що ця функція неперервна і для неї справджуються оцінки (33) і (34).

В [1] встановлено оцінки (33) і (34), обґрунтовано існування ФРЗК Z та доведено оцінки (39), (40) і рівності (43), (44).

Доведемо далі, що для функції Q справджується нерівність

$$|\Delta_x^{x'}Q(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,x';\tau,\xi)), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{46}$$

Якщо $(d_1(x;x'))^{2b}>(t-\tau)/4$, то ця нерівність безпосередньо випливає з (33). Нехай $(d_1(x;x'))^{2b}\le(t-\tau)/4$. За допомогою рівності

$$Q(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\lambda,y)Q(\lambda,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

маємо

$$|\Delta_x^{x'}Q(t,x;\tau,\xi)| \le |\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)|+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} K(t,x;\lambda,y)||Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta} d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} K(t,x;\lambda,y)||\Delta_y^x Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\lambda,y)dy \right| \times$$

$$\times |Q(\lambda,x;\tau,\xi)|d\lambda + \int_{\eta}^{t} d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |K(t,x;\lambda,y)dy||Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy+$$

$$+\int_{\eta}^{t} d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |K(t,x';\lambda,y)||Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy =: \sum_{s=1}^{6} J_s, \tag{47}$$

де $t_1 := t-(t-\tau)/2$ і $\eta := t-(d_1(x;x'))^{2b}$.

Оцінимо J_s, $s \in \{1,\ldots,6\}$. В [1] одержано оцінку

$$|J_1| \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (d_1(x;x'))^{2b} < t-\tau, \quad c_1 \in (0,c). \tag{48}$$

За допомогою оцінки (24), нерівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1,1)}(t,x;\beta,y)E_c^{(1)}(\beta,y;\tau,\xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M_1}dy \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \quad \tau<\beta<t, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad c_1<c, \tag{49}$$

одержаної в [1] оцінки

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{50}$$

а також оцінок (33), (34) і (48) знаходимо

$$J_2 \le C(d_1(x;x'))^{\alpha} \int_{\tau}^{t_1} (t-\lambda)^{-1}(\lambda-\tau)^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1}dy \le$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^1_{c_2}(t,x;\tau,\xi),$$

$$J_3 \leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1}(\lambda-\tau)^{-1+\alpha_2/(2b)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(d_1(x;x'))^{\alpha_1/(2b)}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t,x;\lambda,y)(E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(\lambda,x;\tau,\xi))\times$$

$$\times((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1}dy \leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1+\alpha_1/(2b)}(\lambda-\tau)^{-1+\alpha_2/(2b)}d\lambda E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$J_5 \leq C\int\limits_{\eta}^{t}((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1}dy \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Аналогічно одержуємо також оцінку

$$J_6 \leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Залишилось оцінити J_4. Спочатку оцінимо інтеграл

$$J := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_x^{x'}K(t,x;\lambda,y)dy.$$

Маємо

$$J = \sum_{|k_1|\leq 2b}\Delta_x^{x'}a_{k_1}(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)dy+$$

$$+\sum_{|k_1|<2b}a_{k_1}(t,x')\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)dy+$$

$$+\sum_{|k_1|=2b}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{t,x'}^{\lambda,y}a_{k_1}(t,x')\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)dy.$$

Застосовуючи оцінки (16), (17) з $\alpha_0>\alpha$, (18), (21) з $\alpha_0=\alpha$ і використовуючи умову $\boldsymbol{\alpha_{31}}$, нерівність (24) і те, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M_1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,y)dy = C, \quad \tau<t, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{51}$$

отримуємо

$$|J| \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)} + C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\lambda)^{-1+1/(2b)} +$$

$$+C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(d_1(t,X(t-\lambda);\lambda,y))^{\alpha}(t-\lambda)^{-M_1-1-\alpha_0/(2b)}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t,x;\lambda,y)dy \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)} +$$

$$+C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\lambda)^{-1+(\alpha-\alpha_0)/(2b)}.$$

За допомогою цієї оцінки та оцінки (33) маємо

$$J_4 \le C\int\limits_{t_1}^{\eta}((d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)} + (d_1(x;x'))^{\alpha_0}\times$$

$$\times(t-\lambda)^{-1+(\alpha-\alpha_0)/(2b)})(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(\lambda,x;\tau,\xi)d\lambda.$$

Використовуючи нерівності

$$t-\tau \ge \lambda-\tau \ge t_1-\tau = (t-\tau)/2, \quad \lambda\in[t_1,\eta],$$

$$\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda = (2b/\alpha)((t-t_1)^{\alpha/(2b)} - (t-\eta)^{\alpha/(2b)}) \le$$

$$\le (2b/\alpha)(t-t_1)^{\alpha/(2b)} = (2b/\alpha)((t-\tau)/2)^{\alpha/(2b)},$$

$$\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1+(\alpha-\alpha_0)/(2b)}d\lambda =$$

$$=(2b/(\alpha-\alpha_0))((t-\eta)^{(\alpha-\alpha_0)/(2b)} - (t-t_1)^{(\alpha-\alpha_0)/(2b)}) \le$$

$$\le (2b/(\alpha-\alpha_0))(t-\eta)^{(\alpha-\alpha_0)/(2b)} = (2b/(\alpha-\alpha_0))(d_1(x;x'))^{\alpha-\alpha_0},$$

одержуємо

$$J_4 \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

З (47) і одержаних оцінок J_s, $s\in\{1,\ldots,6\}$, випливає правильність оцінки (46) у випадку, коли $(d_1(x;x'))^2 \le (t-\tau)/4$.

Доведемо тепер оцінки (41). Згідно з оцінками (17) для першого доданка з (45) справджуються оцінки (41). Залишилось оцінити прирости для похідних від W_1. Вважатимемо, що $(d_1(x;x'))^{2b} \le (t-\tau)/2$. Якщо $(d_1(x;x'))^{2b} > (t-\tau)/2$, то потрібна оцінка приросту $\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}W_1$ безпосередньо випливає з одержаних у [1] оцінок

$$|\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|-\alpha)/(2b)} E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \quad |k_1| \le 2b.$$

Використовуючи формулу

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) \Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi) d\lambda, \quad |k_1| \le 2b,$$

в якій число t_1 таке саме, як і в (47), записуємо

$$\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) \times$$

$$\times Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy + \int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) \Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{t} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) \Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy -$$

$$- \int\limits_{\eta}^{t} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1'}^{k_1} Z_1(t,x';\lambda,y) \Delta_y^{X'(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi) dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta} \Delta_x^{x'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y) dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\eta} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1'}^{k_1} Z_1(t,x';\lambda,y) dy \right) Q(\lambda, X'(t-\lambda)';\tau,\xi) d\lambda =: \sum_{j=1}^{7} L_j,$$

де числа t_1 і η такі самі, як і в (47).

Доданок L_1 оцінимо за допомогою нерівностей (17) з $\alpha_0 = \alpha$, (33) і (49):

$$|L_1| \leq \int\limits_{\tau}^{t_1} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y)||Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0} \int\limits_{\tau}^{t_1} (t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0)/(2b)}(\lambda-\tau)^{-(1-\alpha)/(2b)} d\lambda \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y) E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1} dy \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-(|k_1|+\alpha_0)/(2b)}(t-\tau)^{-M_1} \times$$

$$\times E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi) \int\limits_{\tau}^{t_1} (\lambda-\tau)^{-(1-\alpha)/(2b)} d\lambda \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-|k_1|/(2b)} E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \quad c_1 \in (0,c).$$

Щоб оцінити L_2, використаємо оцінки (17) з $\alpha_0 = \alpha$ при $|k_1| < 2b$ і $\alpha_0 > \alpha$ при $|k_1| = 2b$, (45), (24), рівність (51), нерівність (49) і нерівність

$$E_c^{(1)}(\beta, X(t-\beta);\tau;\xi) \leq E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi), \tag{52}$$

$$\tau < \beta < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c_1 \in (0,c).$$

Маємо

$$|L_2| \leq \int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\lambda,y)||\Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} (d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\lambda)^{-M_1-(|k_1|+\alpha_0)/(2b)} E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y) \times$$

$$\times (d_1(X(t-\lambda);y))^{\alpha}(\lambda-\tau)^{-M_1-1} \times$$

$$\times (E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi) + E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi))dy =$$

$$= C(d_1(x;x'))^{\alpha_0} \int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\lambda)^{-M_1-(|k_1|+\alpha_0)/(2b)} \times$$

$$\times (\lambda-\tau)^{-M_1-1}(d_1(X(t-\lambda);y))^{\alpha} \times$$

$$\times E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)(E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi) + E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi))dy \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}(\lambda-\tau)^{-1}d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)E_c^1(\lambda,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}\times$$

$$\times(\lambda-\tau)^{-M_1-1}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)dyE_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda.$$

Оскільки

$$\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda=\begin{cases}C(t-t_1)^{(1-|k_1|)/(2b)}), & |k_1|<2b,\\ C(t-\eta)^{(\alpha-\alpha_0)/(2b)}, & |k_1|=2b,\end{cases}$$

то

$$|L_2|\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-|k_1|/(2b)}E_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Інтеграли L_3 і L_4 оцінюються однаково, розглянемо, наприклад, L_3. За допомогою оцінок (16), (24) і (46), нерівностей (49) і (52) та рівності (51) одержуємо

$$|L_3|\leq\int\limits_{\eta}^{t}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)||\Delta_y^{X(t-\lambda)}Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy\leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{\eta}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-M_1-|k_1|/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)(d_1(X(t-\lambda);y))^{\alpha}\times$$

$$\times(t-\lambda)^{-M_1-1}(E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi))dy\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|-\alpha)/(2b)}d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)dyE_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1}(t-\eta)^{1-(|k_1|-\alpha)/(2b)}E_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-|k_1|/(2b)}E^{(1)}_{c_2}(t,x;\tau,\xi).$$

Використовуючи оцінки (33) і (21) з $\alpha_0=\alpha$ для $|k_1|\in(0,2b)$ і $\alpha_0>\alpha$ для $|k_1|=2b$, як і для L_2, у випадку $|k_1|\in(0,2b]$ маємо

$$|L_5|\leq\int\limits_{t_1}^{\eta}\left|\Delta_x^{x'}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)dy\right)\right||Q(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)|d\lambda\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|-\alpha_0+\alpha)/(2b)}\times$$

$$\times(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}\times$$

$$\times E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-(|k_1|+\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|-\alpha)/(2b)}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi).$$

При $|k_1|=0$ справджується оцінка

$$|L_5|\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi),$$

оскільки в цьому випадку на підставі (17) з $|k_1|=0$ і $\alpha_0=\alpha$ маємо

$$\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_1(t,x;\lambda,y)dy\right|\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1-\alpha/(2b)}\times$$

$$\times E^{(1)}_{c}(t,x;\lambda,y)dy\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\lambda)^{-\alpha/(2b)},$$

$$0\leq\lambda<t\leq T,\quad\{x,x'\}\in\mathbb{R}^n,\quad(d_1(x;x'))^{2b}\leq(t-\lambda).$$

Залишилося розглянути інтеграли L_6 і L_7. Оскільки вони оцінюються однаково, то розглянемо лише L_6. Використовуючи оцінки (18) і (33) у випадку, коли $|k_1|\in$ $\in(0,2b]$, одержуємо

$$|L_6|\leq\int\limits_{\eta}^{t}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\lambda,y)dy||Q(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)\right|d\lambda\leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-(|k_1|-\alpha)/(2b)}(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda\leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-(|k_1|-\alpha)/(2b)}d\lambda=C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times(t-\eta)^{1-(|k_1|-\alpha)/(2b)}\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|-\alpha)/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Для $|k_1|=0$ з використанням оцінок (16) маємо

$$|L_6|\leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}\int\limits_{\eta}^{t}E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\eta}^{t}d\lambda=$$

$$=C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)(d_1(x;x'))^{2b}\leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Отже, справджуються оцінки

$$|\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi)|\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-|k_1|/(2b)}\times$$
$$\times(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,x';\tau,\xi)),$$
$$0\leq\tau<t\leq T,\quad\{x,x',\xi\}\in\mathbb{R}^n,\quad|k_1|\leq 2b. \tag{53}$$

З оцінок (17), (53) і формули (45) одержуємо оцінки (41).

Доведемо тепер оцінки (42). Спочатку оцінимо прирости виразу SZ_1. Для цього використовуватимемо зображення

$$\Delta_x^{x'}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)=S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)-S^{x'}Z_1(t,x';\tau,\xi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_1}\int\limits_{x_{1j}}^{x'_{1j}}\partial_{\zeta_{1j}}S^{\zeta_1^{(j)}}Z_1(t,\zeta_1^{(j)};\tau,\xi)dyd\zeta_{1j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{x_{2j}}^{x'_{2j}}\partial_{\zeta_{2j}}S^{\zeta_2^{(j)}}Z_1(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi)dyd\zeta_{2j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{x'_{3j}}\partial_{\zeta_{3j}}S^{\zeta_3^{(j)}}Z_1(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi)dyd\zeta_{3j}, \tag{54}$$

де $\zeta_s^{(j)}$, $j\in\{1,\ldots,n_s\}$, $s\in\{1,2,3\}$, такі самі, як у доведенні властивості 1.

Будемо користуватись далі оцінкою (16), рівністю (29) та нерівністю

$$E_c^{(1,1)}(t,y;\tau,\xi)\le C_1E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),\quad c_1\in(0,c), \tag{55}$$

де y — точка, що належить відрізку прямої, який з'єднує точки x і x'.

Оцінимо похідні $\partial_{x_{sj}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)$, $j\in\{1,\ldots,n_s\}$, $s\in\{1,2,3\}$. За допомогою рівності (29) та оцінок (16) одержуємо

$$|\partial_{x_{1j}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)|=\left|\sum_{|k_1|=2b}a_{k_1}(\tau,\xi)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\tau,\xi)\right|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=C(t-\tau)^{-M_1-1-1/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\partial_{x_{2j}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)|=\left|\sum_{|k_1|=2b}a_{k_1}(\tau,\xi)\partial_{x_{2j}}\partial_{x_1}^{k_1}Z_1(t,x;\tau,\xi)\right|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|+2b+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=C(t-\tau)^{-M_1-1-(2b+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\partial_{x_{3j}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)|=\left|\sum_{|k_1|=2b}a_{k_1}(\tau,\xi)\partial_{x_{3j}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)\right|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-(|k_1|+4b+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=C(t-\tau)^{-M_1-1-(4b+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Отже, ми одержали такі оцінки:

$$|\partial_{x_{sj}}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M_1-1-(2b(s-1)+1)/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$
$$j\in\{1,\ldots,n_s\},\quad s\in\{1,2,3\}. \tag{56}$$

Оцінимо приріст виразу S^xZ_1. Використовуючи зображення (54), нерівність (55) та оцінки (56), маємо

$$|\Delta_x^{x'}S^xZ_1(t,x;\tau,\xi)|\le\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}S^{\zeta_s^{(j)}}Z_1(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi)d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\leq \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{x'_{sj}} C(t-\tau)^{-M_1-1-(2b(s-1)+1))/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi)d\zeta_{sj}\right| \leq$$

$$\leq E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi)(t-\tau)^{-M_1-1}\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}|x_{sj}-x'_{sj}|(t-\tau)^{-(2b(s-1)+1)/(2b)}.$$

Якщо вважати, що $(d_1(x;x'))^{2b} \leq t-\tau$, то справджуються нерівності (26), (27), і одержуємо оцінку

$$|\Delta_x^{x'} SZ_1(t,x;\tau,\xi)| \leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1-\alpha_0/(2b)}E_c^{(1,1)}(t,x;\tau,\xi),$$
$$(d_1(x;x'))^{2b} \leq t-\tau. \tag{57}$$

Залишилось оцінити прирости виразу SW_1. Для цього скористаємося формулою (36), яку запишемо у вигляді $SW_1 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Оцінимо кожен із доданків I_s, $s \in \{1,\ldots,4\}$. Для I_1 справджується оцінка (33). Оцінимо I_2. На підставі оцінок (20), (33) і (49) одержуємо

$$|I_2| \leq \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |SZ_1(t,x;\beta,y)||Q(\beta,y;\tau,\xi)|dy \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M_1-1}E_c^{(1,1)}(t,x;\beta,y)(\beta-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(\beta,y;\tau,\xi)dy \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\tau}^{t_1} (t-\beta)^{-1}(\beta-\tau)^{-1+\alpha/(2b)}d\beta \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1,1)}(t,x;\beta,y)E_c^{(1)}(\beta,y;\tau,\xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M_1}dy \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+\alpha/(2b)}d\beta \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi). \tag{58}$$

Щоб оцінити I_3, використаємо оцінки (19), (46), (49) і (52). Одержимо

$$|I_3| \leq \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |SZ_1(t,x;\beta,y)|\Delta_y^{X(t-\beta)}Q(\beta,y;\tau,\xi)|dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t-\beta)^{-M_1-1}E_c^{(1,1)}(t,x;\beta,y)(d_2(X(t-\beta);y))^{\alpha} \times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M_1-1}(E_c^{(1)}(\beta,y;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi))dy \le$$

$$\le \int\limits_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}(\beta-\tau)^{-1}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c^{(1,1)}(t,x;\beta,y)E_c^{(1)}(\beta,y;\tau,\xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M_1}dy+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}(\beta-\tau)^{-M_1-1}d\beta E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\le$$

$$\le C_1(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}d\beta+$$

$$+C_2(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}d\beta\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi). \tag{59}$$

Оцінимо I_4. За допомогою оцінок (20), (33) і (52) одержуємо

$$|I_4|\le C\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}(\beta-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\alpha/(2b)}d\beta\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi). \tag{60}$$

З оцінок (33), (58)–(60) і формули (36) випливає оцінка

$$|SW_1|\le C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,y\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{61}$$

Оцінимо далі прирости виразу SW_1. Будемо вважати, що $(d_1(x;x'))^{2b}\le(t-\tau)/2$. Якщо $(d_1(x;x'))^{2b}>(t-\tau)/2$, то потрібна оцінка приросту $\Delta_x^{x'}SW_1$ безпосередньо випливає з оцінки (61). Використовуючи формулу (36), записуємо

$$\Delta_x^{x'}S^xW_1(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=\Delta_x^{x'}Q(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_x^{x'}S^xZ_1(t,x;\lambda,y)Q(\lambda,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} S^x Z_1(t,x;\lambda,y) \Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{t} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} S^x Z_1(t,x;\lambda,y) \Delta_y^{X(t-\lambda)} Q(\lambda,y;\tau,\xi)dy-$$

$$-\int\limits_{\eta}^{t} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} S^{x'} Z_1(t,x';\lambda,y) \Delta_x^{X'(t-\lambda)} Q(\lambda,x;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta} \Delta_x^{x'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S^x Z_1(t,x;\lambda,y)dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S^x Z_1(t,x;\lambda,y)dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t}^{\eta} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S^{x'} Z_1(t,x';\lambda,y)dy \right) Q(\lambda, X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda =: \sum_{j=1}^{8} L'_j,$$

де t_1 і η такі самі, як і в (47), а S^x таке саме, як і в (28).

Для L'_1 справджується оцінка (46). Щоб оцінити L'_2, використовуватимемо оцінки (33), (57) з $\alpha_0 = \alpha$ і нерівність (24). Одержимо

$$|L'_2| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} S^x Z_1(t,x;\lambda,y)||Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy \le$$

$$\le C(d_1(x;x'))^{\alpha_0} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\lambda)^{-M_1-1-\alpha_0/(2b)} E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)\times$$

$$\times(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)} E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)dy \le$$

$$\le C(d_1(x;x'))^{\alpha_0} \int\limits_{\tau}^{t_1} (t-\lambda)^{-1-\alpha_0/(2b)} (\lambda-\tau)^{-1-\alpha/(2b)} d\lambda\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y) E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1} dy \le$$

$$\le C(d_1(x;x'))^{\alpha_0} (t-\tau)^{-M_1-1-\alpha_0/(2b)} E_{c_1}^{(1)}(t,x;\tau,\xi) \int\limits_{\tau}^{t_1} (\lambda-\tau)^{-1+\alpha/(2b)} d\lambda \le$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

За допомогою оцінок (46), (57) з $\alpha_0 = \alpha$, нерівностей (24), (52) та рівності (51) маємо

$$|L'_3| \leq \int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{x'}_x S^x Z_1(t,x;\lambda,y)||\Delta^{X(t-\lambda)}_y Q(\lambda,y;\tau,\xi)|dy \leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{\eta} d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n}(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\lambda)^{-M_1-1-\alpha_0/(2b)}E^{(1,1)}_c(t,x;\lambda,y)\times$$

$$\times(d_1(X(t-\lambda);y))^{\alpha}(\lambda-\tau)^{-M_1-1}(E^{(1)}_c(\lambda,y;\tau,\xi)+E^{(1)}_c(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi))dy \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-M_1-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(1,1)}_{c_1}(t,x;\lambda,y)(\lambda-\tau)^{-M_1-1}\times$$

$$\times(E^{(1)}_c(\lambda,y;\tau,\xi)+E^{(1)}_{c_2}(t,x;\tau,\xi))dyd\lambda \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\left(\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-M_1-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}\times\right.$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(1,1)}_{c_1}(t,x;\lambda,y)E^{(1)}_c(\lambda,y;;\tau,\xi)dy(\lambda-\tau)^{-M_1-1}d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-M_1-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(1,1)}_{c_1}(t,x;\lambda,y)dy\times$$

$$\left.\times(\lambda-\tau)^{-M_1-1}d\lambda E^{(1)}_{c_2}(t,x;\tau,\xi)\right) \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}\left((t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_3}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda+\right.$$

$$\left.+(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_2}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda\right) \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}d\lambda \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)(t-\eta)^{(\alpha-\alpha_0)/(2b)}d\lambda =$$

$$= C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi).$$

Інтеграли L_4' і L_5' оцінюються однаково, розглянемо, наприклад, L_4'. На підставі оцінок (19), (46), нерівностей (24), (52) та рівності (51) одержуємо

$$|L_4'| \leq \int\limits_{\eta}^{t}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}|S^xZ_1(t,x;\lambda,y)||\Delta_y^{X(t-\tau)}Q(\lambda,y;\tau,\xi)dy \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta}^{t}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1-1}E_c^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)(d_1(X(t-\lambda);y))^{\alpha}\times$$

$$\times(\lambda-\tau)^{-M_1-1}(E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi))dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{\eta}^{t}d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)(\lambda-\tau)^{-M_1-1}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)+E_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi))dy \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}(\lambda-\tau)^{-1}d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)E_c^{(1)}(\lambda,y;\tau,\xi)((t-\lambda)(\lambda-\tau))^{-M_1}dy+$$

$$+C\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}(\lambda-\tau)^{-M_1-1}d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\lambda)^{-M_1}E_{c_1}^{(1,1)}(t,x;\lambda,y)dyE_{c_2}^{(1)}(t,x;\tau,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1}E_{c_3}^{(1)}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda+$$

$$+C(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_4}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_5}(t,x;\tau,\xi)\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}d\lambda =$$

$$= C(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_5}(t,x;\tau,\xi)(t-\eta)^{\alpha/(2b)} \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}E^{(1)}_{c_5}(t,x;\tau,\xi).$$

За допомогою (22) та (33) знаходимо

$$|L'_6| \leq \int\limits_{t_1}^{\eta}\left|\Delta_x^{x'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}S^xZ_1(t,x;\lambda,y)dy\right||Q(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)|d\lambda \leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{\eta}(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\lambda)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/(2b)}(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}\times$$

$$\times E^{(1)}_{c}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta}(t-\lambda)^{-1-(\alpha_0-\alpha)/2}d\lambda E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi) \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha_0}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}(d_1(x;x'))^{-\alpha_0+\alpha}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi).$$

Залишилось розглянути інтеграли L'_7 і L'_8. Оскільки вони оцінюються однаково, то розглянемо лише L'_7. Використовуючи оцінки (20) і (33), маємо

$$|L'_7| \leq \int\limits_{\eta}^{t}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}S^xZ_1(t,x;\lambda,y)dy||Q(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)\right|d\lambda \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta}^{t}(t-\lambda)^{-1+\alpha/(2b)}(\lambda-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c}(\lambda,X(t-\lambda);\tau,\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi)(t-\eta)^{\alpha/(2b)} \leq$$

$$\leq C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1+\alpha/(2b)}E^{(1)}_{c_1}(t,x;\tau,\xi).$$

Отже, справджуються оцінки

$$\begin{gathered}|\Delta_x^{x'} SW_1(t,x;\tau,\xi)| \le \\ \le C(d_1(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_1-1}(E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(1)}(t,x';\tau,\xi)), \\ 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{62}$$

З оцінок (19), (57), (62) і формули (45) випливають оцінки (42).

Теорему 1 доведено.

Сформулюємо аналогічну до теореми 1 теорему для рівнянь із класу $\mathbf{E_{23}}$ вигляду

$$(S - A_3(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{63}$$

де диференціальний вираз A_3 задано формулою (5). Рівняння, спряжене до цього рівняння, має вигляд

$$S^* v(\tau,\xi) - \sum_{||k_1|| \le 2b} (-\partial_{\xi_1})^{k_1}(\bar{a}_{k_1}(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)}. \tag{64}$$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_{23}}$ *і* $\boldsymbol{\alpha_{33}}$, *то для рівняння* (63) *існує ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$\begin{gathered}|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_3-||k_1||/(2b)} E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi), \quad \|k_1\| \le 2b, \\ |SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_3-1} E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi), \\ |\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_3(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_3-(||k_1||+\alpha)/(2b)} \times \\ \times (E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(3)}(t,x';\tau,\xi)), \quad \|k_1\| \le 2b, \\ |\Delta_x^{x'} SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_3(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_3-1-\alpha/(2b)} \times \\ \times (E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(3)}(t,x';\tau,\xi)), \\ 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\end{gathered}$$

де

$$E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi):=E_c^{(3,0)}(t,x_1;\tau,\xi_1)\sum_{s=0}^{\infty}(\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))\times$$

$$\times(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^s(\Gamma(s\alpha/(2b)))^{-1}E_{c\delta_0^s}^{(3,1)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$E_c^{(3,0)}(t,x_1;\tau,\xi_1):=\exp\left\{-c\sum_{k=1}^{n_1}(t-\tau)^{1-q_k}|x_{1k}-\xi_{1k}|^{q_k}\right\},$$

$$E_c^{(3,1)}(t,x_1;\tau,\xi_1):=\exp\left\{-c\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{n_s}(t-\tau)^{1-q_k s}|X_{sk}(t-\tau)-\xi_{sk}|^{q_k}\right\},\tag{65}$$

$$q_j:=(2b_j)/(2b_j-1),$$

$$M_3:=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(j-1+1/(2b_i)).$$

За додаткової умови $\boldsymbol{\alpha_{43}}$ *для спряженого рівняння* (64) *існує ФРЗК* Z^*, *зв'язаний з ФРЗК* Z *рівністю* (43), *і для* Z *є правильною формула згортки* (44).

Розглянемо тепер рівняння із класу $\mathbf{E_{22}}$. Воно має вигляд

$$(S-A_2(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{66}$$

в якому диференціальний вираз A_2 задано формулою (4). Спряженим до нього є рівняння

$$S^*v(\tau,\xi)-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}(\bar{a}_{js}(\tau,\xi)v(\tau,\xi))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}(\bar{a}_j(\tau,\xi)v(\tau,\xi))-\bar{a}_0(\tau,\xi)v(\tau,\xi)=0,\quad (\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)}.\tag{67}$$

Сформулюємо теорему про ФРЗК для рівняння (66). Для цього рівняння, як частинного випадку рівняння (37), також справджується теорема 1. Але оскільки для цього випадку замість оцінюючої функції $E_c^{(1)}$ можна брати функцію

$$E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi):=\exp\left\{-c\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{1-2s}|X_s(t-\tau)-\xi_s|^2\right\},\tag{68}$$

$$t>\tau,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

то для рівняння (66) твердження теореми 1 істотно покращуються. А саме є правильною наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_{22}}$ *і* $\boldsymbol{\alpha_{32}}$, *то для рівняння* (66) *існує ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M_2-|k_1|/2}E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi),\quad |k_1|\le 2,$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_2-1}E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_2(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_2-(|k_1|+\alpha)/2}\times$$

$$\times(E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(2)}(t,x';\tau,\xi)), \quad |k_1|\le 2,$$

$$|\Delta_x^{x'}SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_2(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_2-1-\alpha/2}\times$$

$$\times(E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(2)}(t,x';\tau,\xi)),$$

$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$M_2 := \sum_{j=1}^{3}(j-1+1/2)n_j.$$

За додаткової умови $\boldsymbol{\alpha_{42}}$ *для спряженого рівняння* (67) *існує ФРЗК* Z^*, *зв'язаний з ФРЗК* Z *рівністю* (43), *і для* Z *є правильною формула згортки* (44).

4. Існування та властивості ФРЗК для рівнянь із класів $\mathbf{E_{21}^B}-\mathbf{E_{23}^B}$. Наведемо результати щодо ФРЗК для рівнянь (1_s), $s\in\{1,2,3\}$. Використовуватимемо числа

$$M_s := \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{3}(l-1+1/(2b))n_l & \text{для} \quad s=1, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{3}(l-1/2)n_l & \text{для} \quad s=2, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(l-1+1/(2b_j)) & \text{для} \quad s=3 \end{cases}$$

і

$$\|k_1\|_s := \begin{cases} |k_1| & \text{для} \quad s\in\{1,2\}, \\ \|k_1\| & \text{для} \quad s=3, \end{cases} \qquad k_1\in\mathbb{Z}_+^{n_1},$$

оцінюючі функції $E_c^{(1,1)}$, $E_c^{(1)}$, $E_c^{(2)}$, $E_c^{(3,1)}$ і $E_c^{(3)}$ із формул (23), (35), (68) і (65), в яких точки $X(t) := (X_1(t),X_2(t),X_3(t))$, $X_s(t) := (X_{s1}(t),\ldots,X_{sn_s}(t))$, $s\in$ $\in\{1,2,3\}$, означено в (9), та диференціальні вирази

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1}b_{sj}^1\xi_{1s}\right)\partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2}b_{sj}^2\xi_{2s}\right)\partial_{\xi_{3j}}$$

і $A_s^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1})$, які є спряженими відповідно до S_B і $A_s(t,x,\partial_{x_1})$.

Із вказаного у п. 2 зв'язку між класами рівнянь $\mathbf{E_{21}^B}-\mathbf{E_{23}^B}$ і $\mathbf{E_{21}}-\mathbf{E_{23}}$ та теорем 1 – 3 випливає наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $s \in \{1,2,3\}$ і виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_{2s}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{3s}}$. Тоді для рівняння (1_s) існує ФРЗК Z_s, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_s-||k_1||_s/r_s} E_c^{(s)}(t,x;\tau,\xi), \quad \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$|S_B Z_s(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_s-1} E_c^{(s)}(t,x;\tau,\xi),$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_s(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_s-(||k_1||_s+\alpha)/r_s} \times$$

$$\times (E_c^{(s)}(t,x;\tau,\xi) + E_c^{(s)}(t,x';\tau,\xi)), \quad \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$|\Delta_x^{x'} S_B Z_s(t,x;\tau,\xi)| \le C(d_s(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M_s-1-\alpha/r_s} \times$$

$$\times (E_c^{(s)}(t,x;\tau,\xi) + E_c^{(s)}(t,x';\tau,\xi)),$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_s(t,x;\tau,\xi) d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-(||k_1||_s-\alpha)/r_s}, \quad 0 < \|k_1\|_s \le r_s,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} S_B Z_s(t,x;\tau,\xi) d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-1+\alpha/r_s},$$

в яких $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, C і c — додатні сталі, а $r_1 := 2b$, $r_2 := 2$ і $r_3 := 2b$.

Якщо додатково виконується умова $\boldsymbol{\alpha_{4s}}$, то для спряженого рівняння

$$(S_B^* - A_s^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}))v(\tau,\xi) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)},$$

існує ФРЗК Z_s^*, який зв'язаний із Z_s рівністю (43), *і для Z_s є правильною формула згортки* (44).

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
2. *Івасишен С. Д., Лаюк В. В.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 56 – 65.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 635 с.
4. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – № 3. – P. 77 – 116.
5. *Лаюк В. В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. – 2005. – **239**. – С. 82 – 85.

Одержано 29.03.11