УДК 517.946

М. В. Гончаренко, Е. Я. Хруслов

(Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ЗАТУХАНИИ КОЛЕБАНИЙ УВЛАЖНЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ*

We consider a homogenized system of equations that is a macroscopic model of nonstationary vibrations of an elastic medium with a large number of small cavities filled with viscous incompressible liquid (wet elastic medium). It is proved that the solution of the initial boundary-value problem for this system in a bounded domain Ω tends to zero in the metric of $L_2(\Omega)$ exponentially with time.

Розглядається усереднена система рівнянь, що є макроскопічною моделлю коливань пружного середовища з дрібними кавернами, заповненими в'язкою нестисливою рідиною (зволожене пружне середовище). Доведено, що розв'язок початково-крайової задачі для цієї системи у обмеженій області Ω експоненціально за часом прямує до нуля у метриці $L_2(\Omega)$.

В работе [1] была рассмотрена простейшая модель увлажненной упругой среды, представляющая собой однородную упругую среду с большим числом мелких каверн, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью. Изучалось асимптотическое поведение нестационарных колебаний такой композитной среды, когда диаметры каверн стремятся к нулю, их число неограниченно увеличивается и распределяются они все более плотно в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Было показано, что главный член асимптотики описывается в Ω следующим уравнением, являющимся усредненной моделью увлажненной упругой среды:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\int\limits_0^t A_{npqr}(x,t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma_{qr}[u(x,\tau)]d\tau\right)e^p = 0.$$

Здесь $u = \{u_i(x,t), i = 1,2,3\}$ — вектор смещений,

$$\left\{\gamma_{lm}[u] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right]\right\}_{l,m=1}^{3}$$

— тензор деформации, $\mathbf{e}^k$, $k = 1,2,3,$ — базисные векторы в $\mathbb{R}^3$, функция $\rho = \rho(x)$ — массовая плотность, а тензор $A_{iklm}(x,t)_{i,k,l,m=1}^{3}$ характеризует упругие и релаксационные свойства эффективной сплошной среды, эквивалентной рассматриваемой композитной среде.

Тензор $\{A_{iklm}(x,t)\}_{i,k,l,m=1}^{3}$ зависит от свойств упругой фазы композита, геометрии каверн и от вязкости μ жидкости, заполняющей каверны. В данной работе будет получено асимптотическое разложение этого тензора по степеням вязкости и с его помощью доказано, что нестационарные колебания увлажненной упругой среды затухают экспоненциально с показателем, пропорциональным вязкости.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Будем рассматривать простейшую ситуацию, когда каверны G_ε^i в упругой среде распределены периодически. А именно, пусть

*Частично поддержана совместным украинско-французским грантом PICS.

$$G_\varepsilon^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \frac{x - x_\varepsilon^i}{\varepsilon} \in G \right\},$$

где G — некоторая фиксированная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью S, содержащей начало координат внутри, а $\{x_\varepsilon^i\}$ — периодическая решетка в $\mathbb{R}^3$ с периодами $(\varepsilon a_1, \varepsilon a_2, \varepsilon a_3)$, т. е.

$$x_\varepsilon^i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon a_k m_k^i \mathbf{e}^k, \quad m_k^i \in \mathbb{Z},$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Будем предполагать, что $\bar{G} \subset \Pi$, где

$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon -\frac{a_k}{2} < x_k < \frac{a_k}{2},\ k = 1, 2, 3 \right\}$$

— параллелепипед в $\mathbb{R}^3$. Тогда области G_ε^i располагаются в $\mathbb{R}^3$ периодически и не пересекаются.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} G_\varepsilon^i,$$

где объединение берется по тем i, $1 \le i \le N_\varepsilon$, для которых $\bar{G}_\varepsilon^i \subset \Omega$.

Ясно, что Ω_ε — связная подобласть в Ω. Предположим, что она заполнена однородной упругой средой, а каверны G_ε^i, $i = 1, \ldots, N_\varepsilon$, в ней — вязкой несжимаемой жидкостью. Малые нестационарные колебания такой композитной среды описываются уравнениями

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} (a_{npqr} \gamma_{qr}[u_\varepsilon]) \mathbf{e}^p = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\rho_f \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta v_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \qquad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \quad x \in G_\varepsilon^i, t > 0, \quad i = 1, \ldots, N_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = v_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$\sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr} \gamma_{np}[u_\varepsilon] \nu_q \mathbf{e}^r =$$

$$= 2\mu \sum_{q,r=1} \gamma_{qr}[v_\varepsilon] \nu_q \mathbf{e}^r - \nu p_\varepsilon \quad x \in \partial G_\varepsilon^i, \quad t > 0, \quad i = 1, \ldots, N_\varepsilon. \tag{1.4}$$

Здесь $u_\varepsilon(x,t)$ — смещение упругой среды, $v_\varepsilon(x,t)$ — скорость жидкости, p_ε — давление, ρ_s, ρ_f — удельные плотности упругой и жидкой фаз, μ — вязкость жидкости, a_{npqr} — тензор упругости упругой фазы, $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂G_ε^i. Два последних равенства означают совпадение векторов скорости и напряжений в упругой и жидкой фазах на границах раздела. Для определенности будем считать, что упругая среда закреплена на внешней границе $\partial\Omega$, т. е.

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.5}$$

а начальные условия имеют вид

$$u_\varepsilon(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = U_\varepsilon^1(x), \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon,$$

$$v_\varepsilon(x,0) = V_\varepsilon^1(x), \quad x \in G_\varepsilon = \bigcup_i G_\varepsilon^i, \tag{1.6}$$

$$U_\varepsilon^1 \in W_2^1(\Omega_\varepsilon), \quad V_\varepsilon^1 \in W_2^1(G_\varepsilon), \quad \operatorname{div} V_\varepsilon^1 = 0, \quad V_\varepsilon^1 = U_\varepsilon^1, \quad x \in \partial G_\varepsilon.$$

Можно показать, что начально-краевая задача (1.1) – (1.6) имеет единственное решение. В работе [1] было исследовано его асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$. Для строгой формулировки результата введем некоторые определения.

Рассмотрим в области Π краевую задачу (ячеечная задача)

$$\mu\Delta v^{qr}(x,\lambda) = \nabla p^{qr}, \qquad \operatorname{div} v^{qr}(x,\lambda) = 0, \quad x \in G,$$

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}\gamma_{lm}[w^{qr}]\right)\mathbf{e}^k = 0, \quad x \in \Pi \setminus G,$$

$$v^{qr} = w^{qr}, \quad x \in \partial G,$$

$$2\mu \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\left[v^{qr}\right]\nu_i \mathbf{e}^k - p^{qr}\nu = \tag{1.7}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{lm}[w^{qr}]\nu_i\mathbf{e}^k, \quad x \in \partial G,$$

$$u^{qr} - \phi^{qr} \in H^1_{\mathrm{per}}[\Pi],$$

где через $H^1_{\mathrm{per}}[\Pi]$ обозначен класс вектор-функций, являющихся ограничением на Π вектор-функций из $W_2^1(\mathbb{R}^3, \mathrm{loc})$, Π-периодических в $\mathbb{R}^3$, вектор-функции ϕ^{qr} и u^{qr} определены равенствами

$$\phi^{qr} = \frac{1}{2}(x_q\mathbf{e}^r + x_r\mathbf{e}^q), \qquad u^{qr} = v^{qr}\chi_G(x) + w^{qr}\chi_{\Pi\setminus G}(x),$$

$\chi_B(x)$ — характеристическая функция области $B \in \Pi$, λ — произвольное комплексное число с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Эта задача имеет единственное с точностью до постоянного вектора решение (w^{qr}, v^{qr}).

Положим

$$\tilde{A}_{npqr}(\lambda) = 2\mu \int\limits_G \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\left[v^{np}\right]\gamma_{ik}\left[v^{qr}\right]dx +$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[w^{np}]\gamma_{lm}[w^{qr}]dx. \tag{1.8}$$

Тензор $\tilde{A}_{npqr}(\lambda)$ аналитичен в области $\operatorname{Re}\lambda > 0$, обладает симметриями $\tilde{A}_{iklm} = \tilde{A}_{kilm} = \tilde{A}_{lmik} = \tilde{A}_{ikml}$, $\tilde{A}_{npqr}(\bar{\lambda}) = \overline{\tilde{A}_{npqr}(\lambda)}$, положительно определен при $\lambda > 0$ и справедлива оценка

$$|\tilde{A}_{npqr}| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Следовательно, существует обратное преобразование Лапласа

$$A_{npqr}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{A}_{npqr}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda, \quad \sigma > 0, \tag{1.9}$$

причем $A_{npqr}(t) \in L_2(-\infty,\infty)$, $A_{npqr}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\operatorname{Im} A_{npqr}(t) = 0$.

Введем вектор-функцию смещения

$$\hat{u}_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x,t)\chi_\varepsilon(x) + (1-\chi_\varepsilon(x)) \int\limits_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau, \tag{1.10}$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция области Ω_ε.

Следующая теорема является частным случаем основного результата работы [1].

Теорема 1. *Пусть начальные скорости задачи* (1.1) – (1.6) *сходятся к вектор-функциям* $U^1 \in L_2(\Omega)$, $V^1 \in L_2(\Omega)$ *так, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |U^1_\varepsilon - U^1|^2 dx = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{G_\varepsilon} |V^1_\varepsilon - V^1|^2 dx = 0.$$

Тогда вектор-функция смещения $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ *сходится в* $L_2(\Omega_T)$ ($\Omega_T = \Omega\times[0,T]$) *к вектор-функции* $u(x,t)$, *являющейся решением задачи*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\int\limits_0^t A_{npqr}(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma_{qr}[u(x,\tau)]d\tau\right)e^p = 0, \tag{1.11}$$

$$x \in \Omega\times[0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.12}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = V(x), \quad x\in\Omega, \tag{1.13}$$

где

$$\rho = \rho_f \frac{|G|}{|\Pi|} + \rho_s \frac{|\Pi \setminus G|}{|\Pi|}, \qquad V(x) = \frac{\rho_f}{\rho} \frac{|G|}{|\Pi|} V^1(x) + \frac{\rho_s}{\rho} \frac{|\Pi \setminus G|}{|\Pi|} U^1(x),$$

а коэффициенты $A_{npqr}(t)$ *определяются формулами* (1.8), (1.9).

Рассматриваемая композитная среда частично заполнена фрагментами поглощающей (демпфирующей) среды (каверны с вязкой жидкостью). Поэтому, исходя из физических соображений, можно ожидать, что в отличие от чисто упругой среды колебания такой среды будут затухать со временем. Авторам не известны работы, в которых бы приводились исследования затухания колебаний композитной среды, описываемой системой (1.1) – (1.4). Скалярный аналог этой системы (уравнение теории упругости заменено волновым уравнением, а уравнение Навье – Стокса — уравнением теплопроводности) рассматривалися в ряде работ (см., например, [2, 5]), в которых было установлено, что характер затухания (степенной, или экспоненциальный) зависит от расположения подобластей, заполненных демпфирующей средой. Грубо говоря, колебания затухают экспоненциально, если в области Ω не существует замкнутой ломаной, звенья которой не пересекают подобласти, заполненные демпфирующей средой, и отражаются от границы $\partial\Omega$ по закону зеркального отражения. Поскольку при выводе усредненного уравнения (1.11), являющегося моделью эффективной среды, соответствующей рассматриваемой композитной среде, проводится дробление демпфирующих включений и все более плотное размещение их в области Ω, вероятность существования такой ломаной становится все меньшей (для границ $\partial\Omega$ общего положения). Поэтому можно ожидать, что решения задачи (1.11) – (1.13) будут затухать экспоненциально. В данной работе мы строго докажем это в случае, когда вязкость μ жидкости, заполненяющей каверны, достаточно мала.

Сначала мы исследуем поведение компонент тензора $\{A_{npqr}(t) = A_{npqr}(t, \mu)\}$ при $\mu \to 0$ и покажем, что имеет место асимптотическая формула

$$A_{npqr}(t) \sim A^0_{npqr} + \mu A^1_{npqr} \delta(t) \quad \mu \to 0, \tag{1.14}$$

где $\{A^0_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ и $\{A^1_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ — положительно определенные тензоры в $\mathbb{R}^3$, $\delta(t)$ — функция Дирака. Затем, используя этот результат, докажем, что решения задачи (1.11) – (1.13) в $L_2(\Omega)$-метрике затухают экспоненциально.

Точный математический смысл формулы (1.14) дает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой функции* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ *справедлива оценка*

$$\int (A_{npqr}(t) - A^0_{npqr} - \mu A^1_{npqr} \delta(t)) \varphi(t) dt = O(\mu^2).$$

Тензоры $\{A^0_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ и $\{A^1_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ выражаются с помощью решений соответствующих краевых задач в областях $\Pi \setminus G$ и G.

Доказательство леммы 1 и точное определение $\{A^0_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ и $\{A^1_{npqr}\}^3_{n,p,q,r=1}$ приведены в п. 2.

Согласно (1.14) задача (1.11) – (1.13) при малых μ принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(A^0_{npqr} \gamma_{qr}[u] \right) e^p -$$

$$-\mu \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(A^1_{npqr} \gamma_{qr} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right) e^p = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = V(x). \tag{1.15}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи* (1.15) *при* $t \to \infty$ *убывает экспоненциально в следующем смысле*:

$$\int |u(x,t)|^2 dx \leq C e^{-\mu \alpha t},$$

где положительные постоянные C *и* α *зависят только от* ρ, $\{A^0_{npqr}\}$, $\{A^1_{npqr}\}$ *и* Ω.

Доказательство теоремы приведено в п. 3.

2. Асимптотическое разложение тензора $\{A_{npqr}(t)\}$. Рассмотрим ячеечную задачу (1.7). Будем искать ее решение $\{w^{qr}(x,\lambda), v^{qr}(x,\lambda), p^{qr}(x,\lambda)\}$ в виде разложения по степеням μ

$$w^{qr}(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n w^{qr}_n(x,\lambda),$$

$$v^{qr}(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n v^{qr}_n(x,\lambda),$$

$$p^{qr}(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n p^{qr}_n(x,\lambda).$$

Подставляя эти разложения в (1.7), получаем, что вектор-функции $w^{qr}_0(x,\lambda)$, $v^{qr}_0(x,\lambda)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$L[w_0] \equiv \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \left(a_{iklm} \gamma_{lm}[w_0] \right) e^k = 0, \quad x \in \Pi \setminus G,$$
$$T_s[w_0] \equiv \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{lm}[w] \nu_i e^k = -p_0 \nu, \quad p_0 = \text{const}, \tag{a_0}$$
$$\int_{\partial G} w_0 \cdot \nu dS = 0,$$
$$w_0 \chi_{\Pi \setminus G} + v_0 \chi_G - \phi^{qr} \in H^1_{\text{per}}(\Pi)$$

и

$$\Delta v_0 = \nabla p_1, \quad \operatorname{div} v_0 = 0, \quad x \in G,$$
$$v_0 = w_0, \quad x \in \partial G. \tag{b_0}$$

При $n \geq 1$ соответствующие задачи имеют вид

$$
\begin{aligned}
&L[w_n] = 0, \quad x \in \Pi \setminus G, \\
&\frac{1}{\lambda} T_s[w_n] = 2 \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v_{n-1}] \nu_i e^k - p_n \nu, \quad x \in \partial G, \\
&\int\limits_{\partial G} w_n \cdot \nu dS = 0, \\
&w_n \chi_{\Pi \setminus G} + v_n \chi_G \in H^1_{\text{per}}(\Pi);
\end{aligned} \tag{a_n}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta v_n = \nabla p_{n+1}, \quad \operatorname{div} v_n = 0, \quad x \in G, \\
&v_n = w_n, \quad x \in \partial G.
\end{aligned} \tag{b_n}
$$

Здесь для простоты опущены верхние индексы q, r у функций w_n, v_n, p_n, $n = 0, 1, \ldots$.

Введем такие обозначения:

$$
\begin{aligned}
A_G[\eta, \zeta] &= 2 \int_G \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[\eta] \gamma_{ik}[\bar{\zeta}] dx, \\
A_{\Pi \setminus G}[\eta, \zeta] &= \int_{\Pi \setminus G} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{ik}[\eta] \gamma_{lm}[\bar{\zeta}] dx,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

$$
\hat{w}_N = w - \sum_{n=0}^{N} \mu^n w_n, \qquad \hat{v}_N = v - \sum_{n=0}^{N} \mu^n v_n, \qquad \hat{p}_N = p - \sum_{n=0}^{N+1} \mu^n p_n, \tag{2.2}
$$

где (w, v, p) — решение задачи (1.7), $(w_n, v_n; p_n, p_{n+1})$ — решение задач (a_n), (b_n), $n = 0, 1, \ldots, N$.

Лемма 2. *Задачи* (a_n), (b_n), $n \geq 0$, *и* (1.7) *имеют единственные с точностью до аддитивных векторов решения* (w_n, v_n) *и* (u, v) *и справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
&A_G^{1/2}[\hat{v}_N, \hat{v}_N] \leq C^{N+1} \mu^{N+1} |\lambda|^{N+1}, \\
&A_{\Pi \setminus G}^{1/2}[\hat{w}_N, \hat{w}_N] \leq C^{N+1} \mu^{N+3/2} |\lambda|^{N+3/2},
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

где постоянная C *зависит лишь от коэффициентов* $\{a_{iklm}\}$ *и областей* G *и* $\Pi \setminus G$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для вектор-функций из пространства $H^1_{\text{per}}(\Pi)$ с нулевым средним выполняется неравенство Корна (см., например, [6])

$$
\|w\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \int\limits_{\Pi} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[w] dx. \tag{2.4}
$$

Обозначим через $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$ подпространство в $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi)$ вектор-функций, соленоидальных в области $G \subset \Pi$, а через $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi \setminus G)$ множество вектор-функций, являющихся ограничением на $\Pi \setminus G$ вектор-функций из $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$. Ясно, что такие вектор-функции имеют нулевые потоки через ∂G, т. е.

$$\int\limits_{\partial G} w \cdot \nu dS = 0.$$

Учитывая это и гладкость поверхности ∂G, можно показать, что существует линейный ограниченный оператор продолжения $P_G \colon w \in H^1_{\mathrm{per}}(\Pi \setminus G) \to P_G w \in H^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$ такой, что

$$\|P_G w\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \|w\|_{W_2^1(\Pi \setminus G)}, \tag{2.5}$$

где постоянные C не зависят от w.

Мы также будем пользоваться оператором продолжения $\tilde{P}_G$ вектор-функций $u \in W_2^1(\Pi \setminus G)$ до вектор-функций $\tilde{u} = \tilde{P}_G u \in W_2^1(\Pi)$, свойства которого устанавливаются в следующей лемме.

Лемма 3. *Любую вектор-функцию $u \in W_2^1(\Pi \setminus G)$ можно продолжить до вектор-функции $\tilde{u} = \tilde{P}_G u \in W_2^1(\Pi)$ так, чтобы выполнялись неравенства*

$$\int\limits_{\Pi} \sum \gamma_{ik}^2[\tilde{u}] dx \leq C \int\limits_{\Pi \setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u] dx,$$

где постоянная C не зависит от u.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$v(x) = u(x) - a - \omega \times x, \tag{2.6}$$

где a и ω — постоянные векторы,

$$a = \frac{1}{|\Pi \setminus G|} \int\limits_{\Pi \setminus G} u(x) dx,$$

$$\omega = \frac{1}{2|\Pi \setminus G|} \int\limits_{\Pi \setminus G} \mathrm{rot} u(x) dx.$$

Легко убедиться, что

$$\int\limits_{\Pi \setminus G} v(x) dx = 0, \qquad \int\limits_{\Pi \setminus G} \mathrm{rot} v(x) dx = 0 \tag{2.7}$$

и

$$\int\limits_{\Pi \setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[v] dx = \int\limits_{\Pi \setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u] dx.$$

В силу (2.7) v удовлетворяет неравенству Корна

$$\|v\|^2_{W_2^1(\Pi\setminus G)} \le C_1 \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u]dx. \tag{2.8}$$

Продолжим вектор-функцию $v(x) \in W_2^1(\Pi \setminus G)$ до функции $\tilde{v}(x) \in W_2^1(\Pi)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\tilde{v}\|_{W_2^1(\Pi)} \le C_2 \|v\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)}. \tag{2.9}$$

Возможность такого продолжения и линейность отображения $v \to \tilde{v}$ доказаны, например, в [7].

Учитывая (2.6), полагаем

$$\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x) + a + \omega \times x.$$

Тогда из определения $\tilde{u}(x)$, (2.9), (2.8), следует, что отображение $u \to \tilde{u}$ линейно и выполняются неравенства

$$\int\limits_{\Pi} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[\tilde{u}]dx =$$

$$= \int\limits_{\Pi} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[\tilde{v}]dx \le C_2 \|v\|^2_{W_2^1(\Pi\setminus G)} \le C_1 C_2 \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u]dx.$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим задачу (a_0). Будем искать ее решение $w_0(x)$ в виде

$$w_0(x) = \varphi\phi^{qr} + \hat{w}_0(x), \tag{2.10}$$

где $\phi^{qr}(x) = \dfrac{1}{2}(x_r e^q + x_q e^p)$, а $\varphi(x)$ — функция класса $C^2(\Pi \setminus G)$, равная 0 в окрестности ∂G и 1 в окрестности $\partial\Pi$. Тогда вектор-функция $\hat{w}_0(x)$ должна принадлежать пространству $H^1_{\text{per}}(\Pi \setminus G)$ и удовлетворять тождеству

$$A_{\Pi\setminus G}[\hat{w}_0(x), \zeta] = \Phi[\zeta] \quad \forall \zeta \in H^1_{\text{per}}(\Pi \setminus G), \tag{2.11}$$

где

$$A_{\Pi\setminus G}[\eta, \zeta] = \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k=1}^{3} a_{npqr}\gamma_{np}[\eta]\gamma_{qr}[\bar{\zeta}]dx$$

— билинейная (в терминах [8] полуторалинейная) форма в $H^1_{\text{per}}(\Pi \setminus G)$, а

$$\Phi[\zeta] = 2 \int\limits_{\Pi\setminus G} L[\varphi\phi^{np}]\bar{\zeta}dx$$

— антилинейный функционал в $H^1_{\text{per}}(\Pi \setminus G)$.

Очевидно, форма $A_{\Pi\setminus G}$ и функционал Φ ограничены в пространстве $H^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$. Введем подпространство $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G) \subset H^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$ вектор-функций из $H^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$ и нулевым средним. Тогда, учитывая положительную определенность тензора упругости $\{a_{npqr}\}$ и неравенство Корна типа (2.4) для области $\Pi\setminus G$ (т. е. для вектор-функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$), получаем, что билинейная форма $A_{\Pi\setminus G}[\eta,\zeta]$ является коэрцитивной в $H^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$, т. е.

$$A[\zeta,\zeta] \geq C\|\zeta\|^2_{W_2^1(\Pi\setminus G)}.$$

Поэтому согласно теореме Лакса – Мильграма вариационное уравнение (2.11) имеет единственное решение $\hat{w}_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$, а формула (2.10) дает решение задачи (a_0), причем

$$\|w_0\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)} < C_0. \tag{2.12}$$

Задачу (b_0) можно представить как задачу минимизации

$$\int\limits_G |\nabla v|^2 dx \to \min_{v\in J_0(G)}$$

в классе $J_0(G)$ соленоидальных вектор-функций, равных $w_0(x)$ на ∂G. Такая задача имеет единственное решение v_0 и в силу (2.5)

$$\|v_0\|_{W_2^1(G)} \leq \|P_G w_0\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C\|w_0\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)}. \tag{2.13}$$

Введем в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$ антилинейный функционал

$$\Psi[\zeta] = 2\int\limits_G \sum_{i,k=1}^3 \gamma_{ik}[v_{n-1}]\gamma_{ik}[P_G\bar{\zeta}]dx,$$

где P_G — оператор продолжения: $w \in H^1_{\rm per}(\Pi\setminus G) \to P_G w \in H^1_{\rm per}[\Pi, G]$, а v_{n-1} — решение задачи (b_{n-1}). Аналогично предыдущему устанавливаем, что существует вектор-функция $w_n(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G)$, удовлетворяющая тождеству

$$A_{\Pi\setminus G}[w_n,\zeta] = \lambda\Psi[\zeta] \quad \forall\zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Pi\setminus G),$$

причем

$$\|w_n\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)} \leq \lambda C_2\|v_{n-1}\|_{W_2^1(G)}. \tag{2.14}$$

Эта вектор-функция является решением задачи (a_n). Решение задачи (b_n) строится с помощью w_n так же, как для (b_0), и, значит,

$$\|v_n\|_{W_2^1(G)} \leq C_1\|w_n\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)}. \tag{2.15}$$

Из (2.12) – (2.15) следуют оценки

$$\begin{aligned}&\|w_n\|_{W_2^1(\Pi\setminus G)} \leq |\lambda|^n C_0 C_1^n C_2^n,\\&\|v_n\|_{W_2^1(G)} \leq |\lambda|^n C_0 C_1^{n+1} C_2^n,\end{aligned} \tag{2.16}$$

где постоянные C_0, C_1, C_2 зависят только от областей G и $\Pi \setminus G$. Легко видеть, что решения w_n, v_n можно нормировать так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_G v_n dx + \int\limits_{\Pi\setminus G} w_n dx = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.17}$$

и оценки вида (2.16).

Перейдем теперь к выводу оценок (2.3). Из (2.2), (1.7), (a_n), (b_n) следует, что $(\hat{w}_N, \hat{v}_N, \hat{p}_N)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}L[\hat{w}_N] = 0, \quad x \in \Pi \setminus G,\\ \mu\Delta\hat{v}_N = \nabla\hat{p}_N, \quad \mathrm{div}\hat{v}_N = 0, \quad x \in G,\\ \hat{w}_N = \hat{v}_N, \quad x \in \partial G,\\ \frac{1}{\lambda}T_s[\hat{w}_N] = 2\mu \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[\hat{v}_N]\nu_i e^k + \mu^{N+1} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v_N]\nu_i e^k - \hat{p}_{N+1}\nu,\\ \int\limits_G \hat{v}_N dx + \int\limits_{\Pi\setminus G} \hat{w}_N dx = 0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$ подпространство вектор-функций из $H^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$ с нулевым средним. Определим в этом подпространстве билинейную форму

$$A_\lambda[\eta, \zeta] = \mu A_G[\eta, \zeta] + \frac{1}{\lambda} A_{\Pi\setminus G}[\eta, \zeta] \tag{2.19}$$

и антилинейный функционал

$$\Psi_N(\zeta) = 2\mu^{N+1} \int\limits_G \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v_N]\gamma_{ik}[\bar{\zeta}]. \tag{2.20}$$

Здесь $A_G[\eta, \zeta]$ и $A_{\Pi\setminus G}[\eta, \zeta]$ определены равенством (2.1). Тогда, учитывая, что $p_0 = \mathrm{const}$, а v_N — решение задачи (b_N), задачу (2.18) можно сформулировать в такой вариационной постановке: найти вектор-функцию $\hat{u}_N = \hat{w}_N\chi_{\Pi\setminus G} + \hat{v}_N\chi_G \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$, удовлетворяющую равенству

$$A_\lambda[\hat{u}_N, \zeta] = \Psi_N[\zeta] \quad \forall\zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G). \tag{2.21}$$

Покажем, что билинейная форма (2.19) коэрцитивна в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$. Действительно, из равенства

$$A_\lambda[u,u] = 2\mu \int\limits_G \sum_{i,k=1}^3 |\gamma_{ik}(u)|^2 dx + \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a_{iklm}\gamma_{ik}[u]\gamma_{lm}[\bar u]dx -$$

$$- i\frac{\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2} \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a_{iklm}\gamma_{ik}[u]\gamma_{lm}[\bar u]$$

и положительной определенности тензора упругости $\{a_{iklm}\}$ следует, что при $\mu > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$|A_\lambda[u,u]| > C_1 \min\left\{\mu, \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\right\} \int\limits_\Pi \sum_{i,k=1}^3 |\gamma_{ik}[u]|^2 dx.$$

Отсюда, учитывая (2.17), (2.2) и неравенство Корна (2.4), получаем

$$|A_\lambda[u,u]| \geq C \min\left\{\mu, \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\right\} \|u\|^2_{W_2^1(\Pi)}, \quad C > 0. \tag{2.22}$$

Таким образом, билинейная форма $A_\lambda[\eta,\zeta]$ коэрцитивна и, следовательно, согласно теореме Лакса – Мильграма вариационная задача (2.21) имеет единственное решение $\hat u_N \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{per}}(\Pi, G)$. Отсюда с помощью (2.2) заключаем, что и задача (1.7) при $\mu > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > 0$ имеет единственное решение (w, v, p).

Учитывая (2.19), (2.20) и полагая в равенстве (2.21) $\zeta = \hat u_N$, записываем его в виде

$$\mu A_G[\hat u_N, \hat u_N] + \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} A_{\Pi\setminus G}[\hat u_N, \hat u_N] -$$

$$- i\frac{\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2} A_{\Pi\setminus G}[\hat u_N, \hat u_N] = \mu^{N+1} A_G[u_N, \hat u_N].$$

Из этого равенства следует, что

$$A_G[\hat v_N, \hat v_N] \leq \mu^{2N} A_G[v_N, v_N]$$

и

$$A_{\Pi\setminus G}[\hat w_N, \hat w_N] \leq 2\mu^{2N+1}|\lambda| A_G[v_N, v_N].$$

Отсюда, учитывая (2.16), заключаем, что существует постоянная C такая, что

$$A_G^{1/2}[\hat v_N, \hat v_N] \leq \mu^N |\lambda|^N C^N,$$

$$A_{\Pi\setminus G}^{1/2}[\hat w_N, \hat w_N] \leq \mu^{N+1/2} |\lambda|^{N+1/2} C^N.$$

Поскольку эти оценки верны для любого N, используя еще раз оценки (2.16) и равенствами $\hat w_{N+1} = \hat w_N + \mu^{N+1} w_N$, $\hat v_{N+1} = \hat v_N + \mu^{N+1} v_N$, приходим к оценкам (2.3).

Лемма доказана.

3. Доказательство леммы 1. Сначала уточним постановку леммы, а именно, определим компоненты тензоров $\{A^0_{npqr}\}$ и $\{A^1_{npqr}\}$ формулами

$$A^0_{npqr} = \int\limits_{\Pi\setminus G} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[w_0^{np}]\gamma_{lm}[w_0^{qr}]dx,$$
$$A^1_{npqr} = 2\int\limits_{G} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v_0^{np}]\gamma_{ik}[v_0^{qr}]dx, \tag{3.1}$$

где w_0^{np} и v_0^{np} — решения задач (a_0) и (b_0) соответственно. Учитывая свойства вектор-функций w_0^{np} и v_0^{np}, симметричность и положительную определенность тензора упругости $\{a_{iklm}\}$, можно показать, что тензоры $\{A^0_{npqr}\}$ и $\{A^1_{npqr}\}$ симметричны $A^{0,1}_{npqr} = A^{0,1}_{pnqr} = A^{0,1}_{qrnp}$ и положительно определены, т. е.

$$\sum A^{0,1}_{npqr}t_{np}\bar{t}_{qr} \geq C|t_{np}|^2 \quad \forall\{t_{np}\colon t_{np} = t_{pn}\}.$$

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем: $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Учитывая (1.9), записываем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A_{npqr}(t) - A^0_{npqr} - \mu A^1_{npqr}\delta(t))\varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6}{dt^6}\left[\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\tilde{A}_{npqr}(\lambda) - \frac{A^0_{npqr}}{\lambda} - \mu A^1_{npqr}\right)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\right]\varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\tilde{A}_{npqr}(\lambda) - \frac{A^0_{npqr}}{\lambda} - \mu A^1_{npqr}\right)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\right]\frac{d^6\varphi}{dt^6}d \quad \forall\sigma > 0.$$

Отсюда, используя равенства (1.8), (2.1), (3.1) (при $N = 1$), получаем

$$I = \frac{\mu}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_{\Pi\setminus G}\sum a_{iklm}\Big(\gamma_{ik}[w_0^{np}]\gamma_{lm}[w_1^{qr}] + \right.$$

$$\left. + \gamma_{ik}[w_1^{np}]\gamma_{lm}[w_0^{qr}]\Big)dx\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^7}d\lambda\right\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt - \sum_{i=1}^{6} I_i,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(\mu^2 A_G\big[v_0^{np}, v_1^{qr}\big] + \right.$$

$$+\mu^2 A_G\big[v_1^{np}, v_0^{qr}\big] + \frac{1}{\lambda} A_{\Pi\setminus G} = [w_1^{np}, w_1^{qr}]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(\mu A_G[v_0^{np}, \hat{v}_1^{qr}] +$$

$$+\mu A_G\big[\hat{v}_1^{np}, v_0^{qr}\big] + \mu^3 A_G[v_1^{np}, v_1^{qr}]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(\mu^2 A_G\big[v_1^{np}, \hat{v}_1^{qr}\big] + \mu^2 A_G[\hat{v}_1^{np}, v_1^{qr}]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt,$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(A_{\Pi\setminus G}\big[w_0^{np}, \hat{w}_1^{qr}\big] + A_{\Pi\setminus G}\big[\hat{w}_1^{np}, w_0^{qr}\big]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^7}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt,$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(\mu A_{\Pi\setminus G}\big[w_1^{np}, \hat{w}_1^{qr}\big] + \mu A_{\Pi\setminus G}\big[\hat{w}_1^{np}, w_1^{qr}\big]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^7}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt,$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(\mu A_G[\hat{v}_1^{np}, \hat{v}_1^{qr}] + \frac{1}{\lambda}A_{\Pi\setminus G}\big[\hat{w}_1^{np}, \hat{w}_1^{qr}\big]\Big)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^6}d\lambda\Bigg\}\frac{d^6\varphi}{dt^6}dt.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, в чем можно убедиться с помощью интегрирования по частям по области $\Pi\setminus G$ с учетом свойств решений w_0 и w_1 краевых задач (a_0), (a_1). Остальные слагаемые оценим с помощью леммы 2 и неравенств (2.16). Тогда получим

$$I_i = O(\mu^{i+1}\lambda^i), \quad i = 1, 2, 3, \qquad I_4 = O(\mu^{5/2}\lambda^{3/2}),$$

$$I_5 = O(\mu^{7/2}\lambda^{5/2}), \qquad I_6 = O(\mu^5\lambda^4).$$

Учитывая это, приходим к оценке

$$|I| \leq C\mu^2,$$

где постоянная C зависит от $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Лемма 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.15). Тогда его преобразование Лапласа по t

$$\tilde{u}(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

является решением краевой задачи

$$\lambda^2\rho\tilde{u} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(A^0_{npqr}\gamma_{qr}[\tilde{u}])e^p -$$

$$-\mu\lambda \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(A^1_{npqr}\gamma_{qr}[\tilde{u}])e^p = \rho V, \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$\tilde{u}(x,\lambda) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Представим эту задачу в вариационной форме. Для этого в пространстве вектор-функций $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$A[u,v] = \lambda^2\rho \int_\Omega u\bar{v}dx + \mu\lambda \int_\Omega \sum_{n,p,q,r=1}^{3} A^1_{npqr}\gamma_{np}[u]\gamma_{qr}[\bar{v}]dx+$$

$$+ \int_\Omega \sum_{n,p,q,r=1}^{3} A^0_{npqr}\gamma_{np}[u]\gamma_{qr}[\bar{v}]dx, \quad \lambda \neq 0, \tag{4.2}$$

и антилинейный функционал

$$L[v] = \rho \int_\Omega V\bar{v}dx. \tag{4.3}$$

Задачу (4.1) можно сформулировать в такой вариационной форме: найти функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$A[u,v] = L[v] \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega). \tag{4.4}$$

Форма $A[u,v]$ и функционал $L[v]$ ограничены в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Покажем, что существует положительное число α_0 такое, что при $\operatorname{Re}\lambda \geq -\alpha_0$ форма $A[u,v]$ коэрцитивна. Введем следующие обозначения:

$$A[u] = A[u,u] = \lambda^2\rho\|u\|^2 + \mu\lambda A^1[u] + A^0[u],$$

где

$$A^i[u] = \int_\Omega \sum_{n,p,q,r}^{3} A^i_{npqr}\gamma_{np}[u]\gamma_{qr}[u]dx, \quad i = 0,1. \tag{4.5}$$

Полагая $\lambda = \alpha + i\beta$, отделяем вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A[u] &= (\alpha^2 - \beta^2)\rho\|u\|^2 + \alpha\mu A^1[u] + A^0[u], \\ \operatorname{Im} A[u] &= 2\alpha\beta\rho\|u\|^2 + \beta\mu A^1[u]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.5), в силу положительной определенности тензоров $\{A^0_{npqr}\}$ и $\{A^1_{npqr}\}$ и неравенства Фридрихса, следует

$$0 < a_0 \leq \frac{A^1[u]}{A^0[u]} \leq a_1 < \infty \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad u \neq 0,$$

$$0 < \frac{\rho\|u\|^2}{A^0[u]} \leq \varkappa < \infty \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad u \neq 0.$$

Используя эти неравенства, из равенств (4.6) получаем

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Re}\, A[u]| \geq \frac{1}{4}A^0[u] \quad \text{при} \quad |\beta| \leq \frac{1}{2\varkappa}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{4\mu a_1}, \\ &|\mathrm{Im}\, A[u]| \geq \frac{\mu a_0|\beta|}{4}A^0[u] \quad \text{при} \quad |\beta| \geq \frac{1}{2\varkappa}, \quad \alpha \geq \frac{\mu a_0}{4\varkappa}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Положим

$$\alpha_0 = \min\left(\frac{\mu a_0}{4\varkappa}, \frac{1}{4\mu a_1}\right). \tag{4.8}$$

В силу неравенства Корна из (4.7), (4.8) следует, что при $\alpha \geq -\alpha_0$ и $\mu > 0$

$$|A[u]| \geq C\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и β, но зависит от μ.

Таким образом, форма $A[u,v]$ коэрцитивна в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > -\alpha_0$ и, значит, задача (4.4) имеет единственное решение $\tilde{u}(x,\lambda)$. Поскольку форма $A[u,v]$ есть полином от λ, а функционал $L[v]$ не зависит от λ, отсюда следует (см., например, [9]), что решение $\tilde{u}(x,\lambda)$ аналитично по λ при $\mathrm{Re}\,\lambda > -\alpha_0$. Кроме того, с помощью (4.6), (4.7) легко получить оценку

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{1+\beta^2}\left(1 + \frac{1}{1+|\beta|\mu}\right), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > -\alpha_0, \tag{4.9}$$

где постоянная C не зависит от μ и β.

Учитывая все это, решение задачи (1.15) представим в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{u}(x,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{e^{-\alpha_0 t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(x,-\alpha_0+i\beta)e^{i\beta t}d\beta. \tag{4.10}$$

Отсюда, используя равенство Парсеваля, получаем

$$\int\limits_t^{t+1}\int\limits_\Omega |u(x,\tau)|^2 dx d\tau \leq \frac{e^{-2\alpha_0 t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_\Omega \left|\tilde{u}(x,-\alpha_0+i\beta)\right|^2 dx d\beta.$$

Из этого неравенства, в силу (4.9) следует

$$\int\limits_t^{t+1} \int\limits_\Omega |u(x,\tau)|^2 dx d\tau \le C_0 e^{-2\alpha_0 t}. \tag{4.11}$$

Аналогично, с помощью (4.10) и (4.9) получаем

$$\int\limits_t^{t+1} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) \right|^2 dx d\tau \le C_1 e^{-2\alpha_0 t}. \tag{4.12}$$

Здесь постоянные C_0 и C_1, вообще говоря, зависят от μ: $C_0,\, C_1 \sim \dfrac{C}{\mu}$ при $\mu \to 0$.

Воспользуемся неравенством

$$\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 dx \le \int\limits_t^{t+1} \int\limits_\Omega |u(x,\tau)|^2 dx d\tau + \int\limits_t^{t+1} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 dx d\tau,$$

которое легко получить стандартным образом с помощью формулы Ньютона – Лейбница с переменными пределами. Тогда, учитывая, что согласно (4.7) $\alpha_0 = \mu \dfrac{a_0}{4\varkappa}$ при $\mu \le \sqrt{\dfrac{\varkappa}{a_0 a_1}}$, из (4.11), (4.12) получаем требуемую оценку теоремы 2.

1. *Гончаренко М. В., Хруслов Е. Я.* Усредненная модель колебаний увлажненной упругой среды // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1309 – 1329.
2. *Bardos C., Lebeau G., Rauch J.* Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary // SIAM J. Contr. Optim. – 1992. – **30**. – P. 1024 – 1065.
3. *Zhang X., Zuazua E.* Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type III // Comm. Contemp. Math. – 2003. – **5**, № 1. – P. 25 – 83.
4. *Rauch J., Zhang X., Zuazua E.* Polinomial decay for hyperbolic-parabolic coupled system // J. math. pures et appl. – 2005.
5. *Duyckaerts T.* Optimal decay rates of the energy of a hyperbolic-parabolic system coupled by an interface // Asymptotic Analysis. – 2007. – **51**. – P. 17 – 45.
6. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 312 с.
7. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 549 с.
8. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 563 с.

Получено 28.02.11