УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

СТРУКТУРА СКІНЧЕННОЇ КОМУТАТИВНОЇ ІНВЕРСНОЇ НАПІВГРУПИ І СКІНЧЕННОЇ В'ЯЗКИ, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНИМ

For a semigroup S, the set of all isomorphisms between subsemigroups of S is an inverse monoid with respect to composition, which is denoted by $PA(S)$ and is called the monoid of local automorphisms of S. A semigroup S is called permutable if, for any pair of congruences ρ, σ on S, one has $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. We describe the structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite band whose monoids of local automorphisms are permutable.

Для полугруппы S множество всех изоморфизмов между подполугруппами полугруппы S относительно композиции является инверсным моноидом, который обозначается через $PA(S)$ и называется моноидом локальных автоморфизмов полугруппы S. Полугруппа S называется переставной, если для любой пары конгруэнций ρ, σ на S $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. В данной статье описана структура конечной коммутативной инверсной полугруппы и конечной связки, чьи моноиды локальных аавтоморфизмов являются переставными.

Локальним автоморфізмом напівгрупи S називають ізоморфізм між двома її піднапівгрупами. Множина всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів. Цей моноїд будемо позначати через $PA(S)$. У більшості статей, що стосуються напівгрупи $PA(S)$, розглядається проблема опису таких напівгруп B, що $PA(B) \cong PA(S)$ для даної напівгрупи S. Важливою також є проблема знаходження взаємозв'язків між властивостями напівгрупи S і властивостями інверсної напівгрупи $PA(S)$. Зокрема, в статті [1] (крім іншого) знайдено структуру групи G, для якої інверсний моноїд $PA(G)$ є кліфордовим. У роботі [2] описано інверсні напівгрупи S, для яких інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів між інверсними піднапівгрупами напівгрупи S є цілком напівпростим або фундаментальним.

Відомо [3], що інверсна напівгрупа локальних автоморфізмів скінченновимірного лінійного простору є переставною (тобто будь-які дві її конгруенції комутують відносно композиції). Аналогічне твердження має місце і для інверсної напівгрупи локальних автоморфізмів скінченної напівгрупи лівих нулів (яка, зрозуміло, ізоморфна скінченній симетричній інверсній напівгрупі). Після цих зауважень цілком природно виникає задача знаходження структури таких напівгруп, інверсні моноїди локальних автоморфізмів яких є переставними. У даній статті цю задачу ми розв'язуємо для скінченної комутативної інверсної напівгрупи, а також скінченної в'язки. Основними результатами статті є теореми 2 і 3.

1. Основні означення і термінологія. Напіврешітка E називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з E не перевищує числа n.

Нехай S — довільна напівгрупа, а $\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\mathrm{rank}\colon S \to \mathbb{N}_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких a, $b \in S$ виконується нерівність $\mathrm{rank}(ab) \leq \min(\mathrm{rank}(a), \mathrm{rank}(b))$. Число $\mathrm{rank}(x)$ називають рангом елемента x.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\mathrm{rank}(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [4]). Будемо говорити, що інверсна напівгрупа є напівгрупою скінченного рангу, якщо напіврешітка її ідемпотентів має скінченну довжину.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа в групі), то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ вважається саме ця піднапівгрупа. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупи в S не існує, то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ будемо вважати порожню множину $\varnothing$. Легко зрозуміти, що решітка ідемпотентів інверсної напівгрупи $PA(S)$ ізоморфна решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Якщо $\varphi \in PA(S)$, то через $\mathrm{dom}(\varphi)$ і $\mathrm{im}(\varphi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму φ. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A будемо позначати відношення рівності на піднапівгрупі A.

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми. Кажуть, що елемент $b \in E$ є об'єднанням атомів, якщо існує підмножина C множини атомів така, що $\sup(C) = b$. Якщо елементи a і b впорядкованої множини P непорівнянльні (тобто утворюють антиланцюг)), то цей факт будемо позначати через $a \parallel b$.

Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Якщо S — інверсна напівгрупа, то через $E(S)$ позначають напіврешітку всіх ідемпотентів напівгрупи S.

Група G називається елементарною абелевою p-групою, якщо будь-який її відмінний від одиниці елемент має порядок p.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в [5].

2. Необхідні і достатні умови лінійної впорядкованості ідеалів напівгрупи $\boldsymbol{PA(S)}$. Відомо (див. [6], теорема 4), що ідеали переставної напівгрупи утворюють ланцюг відносно включення. Оскільки далі мова йтиме про переставні інверсні напівгрупи скінченного рангу, то актуально знайти необхідні і достатні умови для того, щоб ідеали такої напівгрупи були лінійно впорядкованими.

Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу. Легко перевірити, що підмножина $I_k = \{\, x \in S \mid \mathrm{rank}(x) \le k \,\}$ напівгрупи S є ідеалом. Такий ідеал назвемо ***ранговим***. Далі, будемо говорити, що інверсна напівгрупа S задовольняє умову L, якщо для будь-яких $a, b \in S$ з рівності $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$ випливає $SaS = SbS$.

Сформулюємо твердження, яке нам знадобиться в подальшому.

Твердження 1 (див. [4], теорема 2)**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу. Наступні умови є еквівалентними*:

1) *ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані*;
2) *головні ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані*;
3) *кожний ідеал напівгрупи S є головним*;

4) *напівгрупа S задовольняє умову L;*

5) *кожний ідеал напівгрупи S є ранговим.*

Щоб сформулювати і довести зручну ознаку лінійної впорядкованості ідеалів інверсної напівгрупи $PA(S)$, нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу. Нехай ідемпотенти a, $b \in E(S)$ такі, що $xay = b$ для деяких x, $y \in S$.*

Якщо $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y)$, *то* $y = x^{-1}$. *Крім того*, $a = x^{-1}bx$, $x^{-1}x = a$, $xx^{-1} = b$.

Доведення. Оскільки $xay = b$, то $xx^{-1}xay = xx^{-1}b = xay = b$. Отже, $b \leq xx^{-1}$. Якщо припустити, що $b < xx^{-1}$, то $\operatorname{rank}(b) < \operatorname{rank}(xx^{-1}) = \operatorname{rank}(x)$, що суперечить умові. Отже,

$$b = xx^{-1}. \tag{1}$$

Аналогічно, якщо $b = xay$, то $by^{-1}y = xayy^{-1}y = xay = b$. Отже, $b \leq y^{-1}y$. А оскільки $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(y)$, то

$$b = y^{-1}y. \tag{2}$$

Отже, з (1) і (2) випливає

$$xx^{-1} = y^{-1}y. \tag{3}$$

Далі, з (1) безпосередньо випливає

$$bx = x. \tag{4}$$

Використавши рівність (4), покажемо, що $xax^{-1} = b$. Дійсно, $xax^{-1} = bxax^{-1}b = bxax^{-1}xay = bxx^{-1}xaay = bxay = b$.

Тепер покажемо, що $xa = x$. Справді, позаяк $xax^{-1} = b$, то $xax^{-1}x = bx = x$ або $xx^{-1}xa = x$. Звідси

$$xa = x. \tag{5}$$

За умовою $xay = b$, тому (враховуючи рівність (5)) маємо $xy = b$. Звідси $xyy^{-1} = by^{-1}$. А оскільки $b = y^{-1}y$ (див. (2)), то $xyy^{-1} = y^{-1}yy^{-1} = y^{-1}$. З останньої рівності випливає, що $y^{-1} \leq x$. Позаяк $\operatorname{rank}(y^{-1}) = \operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}(x)$, то $y^{-1} = x$. Звідси $y = x^{-1}$. Оскільки (див. (5))) $xa = x$, то $x^{-1}xa = x^{-1}x$. Звідси $x^{-1}x \leq a$. Позаяк $\operatorname{rank}(x^{-1}x) = \operatorname{rank}(a)$, то $x^{-1}x = a$.

Нарешті покажемо, що $x^{-1}bx = a$. Дійсно, $x^{-1}bx = x^{-1}x$. Оскільки (див. (4) і (5)) $bx = xa = x$, то $x^{-1}xa = x^{-1}x$. Отже, $x^{-1}x \leq a$. Позаяк $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(x^{-1}x) = \operatorname{rank}(a)$, то $x^{-1}x = a$.

Отже, $x^{-1}bx = x^{-1}x = a$.

Лему 1 доведено.

Нехай S — скінченна напівгрупа. Через $h(A)$ будемо позначати висоту піднапівгрупи A в решітці $\operatorname{Sub}(S)$. Зручною ознакою того, щоб ідеали напівгрупи $PA(S)$ були лінійно впорядкованими, є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай S — скінченна напівгрупа. Ідеали напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані тоді і тільки тоді, коли в решітці $\operatorname{Sub}(S)$ неізоморфні піднапівгрупи мають різну висоту.*

Доведення. Нехай ідеали інверсної напівгрупи $PA(S)$ утворюють ланцюг відносно включення. Далі, нехай $A,\ B \in \mathrm{Sub}(S)$ такі, що $h(A) = h(B)$. Тоді $\mathrm{rank}(\Delta_A) = \mathrm{rank}(\Delta_B)$. За умовою ідеали напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані, тому (див. твердження 1) $PA(S)\circ\Delta_A\circ PA(S) = PA(S)\circ\Delta_B\circ PA(S)$. Звідси існують $\psi, \varphi \in PA(S)$ такі, що $\Delta_B = \psi\circ\Delta_A\circ\varphi$ або $\Delta_B = \psi\circ\Delta_A\circ\Delta_A\circ\Delta_A\circ\varphi$. Зазначимо, що $\mathrm{rank}(\psi\circ\Delta_A) = \mathrm{rank}(\Delta_A)$. Справді, по-перше, $\mathrm{rank}(\psi\circ\Delta_A) \le \mathrm{rank}(\Delta_A)$. Крім того, $\mathrm{rank}(\Delta_A) = \mathrm{rank}(\Delta_B) = \mathrm{rank}(\psi\circ\Delta_A\circ\varphi) \le \mathrm{rank}(\psi\circ\Delta_A)$. Отже, $\mathrm{rank}(\psi\circ\Delta_A) = \mathrm{rank}(\Delta_A)$. Аналогічно, $\mathrm{rank}(\Delta_A\circ\varphi) = \mathrm{rank}(\Delta_A)$. Згідно з лемою 1 $\Delta_B = \psi\circ\Delta_A\circ\Delta_A\circ(\psi\circ\Delta_A)^{-1} = \psi\circ\Delta_A\circ\psi^{-1}$. Покажемо тепер, що $\mathrm{dom}(\psi\circ\Delta_A) = B$ і $\mathrm{im}(\psi\circ\Delta_A) = A$. Дійсно, $\psi\circ\Delta_A\circ(\psi\circ\Delta_A)^{-1} = \psi\circ\Delta_A\circ\psi^{-1} = \Delta_B$. Отже, $\mathrm{dom}(\psi\circ\Delta_A) = B$. Далі, згідно з лемою 1 $(\psi\circ\Delta_A)^{-1}\circ\psi\circ\Delta_A = \Delta_A$. Звідси $\mathrm{im}(\psi\circ\Delta_A) = A$. Позаяк $\psi\circ\Delta_A \in PA(S)$, до того ж $\mathrm{dom}(\psi\circ\Delta_A) = B$ і $\mathrm{im}(\psi\circ\Delta_A) = A$, то $B \cong A$.

Нехай тепер виконується імплікація: для будь-яких $A,\ B \in \mathrm{Sub}(S)$ $h(A) = h(B) \Rightarrow A \cong B$. Доведемо, що ідеали напівгрупи $PA(S)$ утворюють ланцюг відносно включення. Для цього знов скористаємося твердженням 1. Отже, нехай $\varphi,\ \psi \in PA(S)$ такі, що $\mathrm{rank}(\varphi) = \mathrm{rank}(\psi)$. Позначимо $\mathrm{dom}(\varphi\circ\varphi^{-1})$ через F, а $\mathrm{dom}(\psi\circ\psi^{-1})$ через C. Оскільки $\mathrm{rank}(\varphi\circ\varphi^{-1}) = \mathrm{rank}(\psi\circ\psi^{-1})$, то $h(F) = h(C)$. Звідси $F \cong C$. Отже, існує ізоморфізм $\beta\colon F \to C$. Тоді $\Delta_F = \beta\circ\Delta_C\circ\beta^{-1}$ і $\Delta_C = \beta^{-1}\circ\Delta_F\circ\beta$. Звідси $PA(S)\circ\Delta_F\circ PA(S) = PA(S)\circ\Delta_C\circ PA(S)$, або $PA(S)\circ(\varphi\circ\varphi^{-1})\circ PA(S) = PA(S)\circ(\psi\circ\psi^{-1})\circ PA(S)$. З останньої рівності випливає $PA(S)\circ\varphi\circ PA(S) = PA(S)\circ\psi\circ PA(S)$. Отже, згідно з твердженням 1 ідеали напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані відносно включення.

Теорему 1 доведено.

3. Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи з переставною напівгрупою локальних автоморфізмів. У цьому пункті ми встановимо структуру скінченної комутативної інверсної напівгрупи, напівгрупа локальних автоморфізмів якої є переставною. У подальших викладках будемо суттєво використовувати наступне твердження.

Твердження 2 (див. [3], теорема 2)**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі дві умови*:

1) *якщо для будь-яких $a,\ b \in S$ $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$, то $SaS = SbS$*;

2) *для будь-якого $e \in E(S)(\mathrm{rank}(e) \ge 2)$ існують ідемпотенти f і g такі, що $f \ne g,\ f < e,\ g < e$ і $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = \mathrm{rank}(e) - 1$.*

Зауваження (див. [3], теорема 1)**.** Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S переставна тоді і лише тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

Лема 2. *Якщо для скінченної комутативної інверсної напівгрупи S напівгрупа $PA(S)$ є переставною, то S є або напіврешіткою, або абелевою групою.*

Доведення. Відомо [5], що комутативна інверсна напівгрупа є напіврешіткою груп. Це означає, що на S існує конгруенція θ така, що S/θ є напіврешіткою і кожний клас цієї конгруенції є групою. Припустимо, що $|S/\theta| \ge 2$. Оскільки напіврешітка $E(S)$ скінченна, то вона містить найменший елемент 0. Позаяк $|S/\theta| \ge 2$, то існує відмінний від 0 ідемпотент $f \in E(S)$. Очевидно, що $A = \{f, 0\} \in \mathrm{Sub}(S)$ і $h(A) = 2$. Припустимо, що деякий клас B конгруенції θ не є одноелементним.

Очевидно, що група B містить просту нетривіальну підгрупу C. Отже, $h(C) = 2$. Оскільки $h(C) = h(A)$, то згідно з теоремою 1 $A \cong C$. Позаяк A є нетривіальною напіврешіткою, а C — нетривіальна група, то одержуємо суперечність. Отже, у випадку коли $|S/\theta| \geq 2$ напівгрупа S є напіврешіткою. Якщо ж $|S/\theta| = 1$, то S — група.

Лему 2 доведено.

Твердження 3. *Нехай S — скінченна напіврешітка. Інверсна напівгрупа $PA(S)$ переставна тоді і тільки тоді, коли напіврешітка S є або ланцюгом або примітивною напіврешіткою.*

Доведення. Нехай інверсна напівгрупа $PA(S)$ є переставною. Нехай $l(S) \geq 2$, де $l(S)$ — довжина напіврешітки S. Припустимо, що S не є ланцюгом, тоді S містить лінійно впорядковану піднапіврешітку A (до того ж $|A| = 3$) і піднапіврешітку B ($|B| = 3$), яка не є ланцюгом. Очевидно, $A \ncong B$. Оскільки $PA(S)$ — переставна інверсна напівгрупа, то (див. [6], теорема 4) її ідеали лінійно впорядковані відносно включення. Крім того, $h(A) = h(B) = 3$, тому згідно з теоремою 1 $A \cong B$. Суперечність. Таким чином, напіврешітка S є або ланцюгом, або примітивною напіврешіткою.

Доведемо зворотне твердження. Нехай S — лінійно впорядкована напіврешітка. Тоді, очевидно, $\mathrm{Sub}(S) = \mathfrak{B}(S)$ (де $\mathfrak{B}(S)$ — булеан S). Вище вже відмічалося, що напіврешітка (в даному разі — решітка) ідемпотентів інверсної напівгрупи $PA(S)$ ізоморфна решітці $\mathrm{Sub}(S)$. Отже, умова 2 (див. твердження 2) очевидно виконується. Крім того, для будь-яких $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$ з умови $h(A) = h(B)$ випливає рівність $|A| = |B|$, а отже, $A \cong B$. Це означає (див. теорему 1), що ідеали напівгрупи $PA(S)$ утворюють ланцюг відносно включення. Отже, умова 1 твердження 2 (див. також теорему 1 і твердження 1) виконується. Таким чином, напівгрупа $PA(S)$ є переставною.

Якщо ж S — примітивна нетривіальна напіврешітка, то, міркуючи аналогічно, переконуємося, що $PA(S)$ є переставною.

Твердження 3 доведено.

Для з'ясування структури групи з переставною напівгрупою локальних автоморфізмів нам знадобляться ще дві леми.

Лема 3. *Якщо S — переставна інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем, то кожний її ненульовий ідемпотент є об'єднанням атомів у напіврешітці $E(S)$.*

Доведення. Твердження леми є очевидним для атомів напіврешітки $E(S)$. Нехай тепер кожний ідемпотент рангу $k-1$ є об'єднанням атомів. Беремо довільний ідемпотент, e причому $\mathrm{rank}(e) = k$. Згідно з твердженням 2 існують ідемпотенти f і g такі, що $f \neq g$, $f < e$, $g < e$ і $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = \mathrm{rank}(e) - 1$. Звідси $f \prec e$ і $g \prec e$ (тут $\prec$ — знак покриття). Легко довести, що $e = \sup\{f, g\}$. Оскільки $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = k - 1$, то $f = \sup(A_1)$ і $g = \sup(A_2)$ для деяких A_1 і A_2, що включаються в множину атомів напіврешітки $E(S)$. Отже, $e = f \vee g = \sup(A_1) \vee \sup(A_2) = \sup(A_1 \cup A_2)$. Тобто елемент e є об'єднанням деякої множини атомів напіврешітки $E(S)$. Таким чином, твердження леми доведено індукцією за рангом елемента.

Лема 4. *Нехай S — переставна інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Якщо ненульові ідемпотенти b і c такі, що $b \neq c$ і $\mathrm{rank}(b) = \mathrm{rank}(c)$, то існує атом $a \in E(S)$ такий, що $a \leq b$ і $a \parallel c$.*

Доведення. Позначимо через $A(b)$ і $A(c)$ атоми відповідно ідемпотентів b і c в напіврешітці $E(S)$. Скориставшись попередньою лемою, легко довести, що $b = \sup(A(b))$ і $c = \sup(A(c))$. Припустимо, що $A(b) \subseteq A(c)$, тоді $\sup(A(b)) \leq \leq \sup(A(c))$, тобто $b \leq c$. Оскільки за умовою $b \neq c$, то $b < c$. Звідси $\mathrm{rank}(b) < < \mathrm{rank}(c)$, що суперечить умові. Отже, $A(b) \nsubseteq A(c)$. Це означає, що існує атом $a \in E(S)$ такий, що $a \in A(b)$ і $a \notin A(c)$. Звідси $a \leq b$ і $a \parallel c$.

Лему 4 доведено.

Підсумуємо результати цього пункту.

Теорема 2. *Нехай S — скінченна комутативна інверсна напівгрупа. Напівгрупа $PA(S)$ є переставною в таких і лише таких випадках*:

1) S — *лінійно впорядкована напіврешітка*;

2) S — *примітивна напіврешітка*;

3) S — *елементарна абелева p-група.*

Доведення. Нехай S — скінченна комутативна інверсна напівгрупа така, що напівгрупа $PA(S)$ є переставною. Тоді згідно з лемою 2 напівгрупа S є або напіврешіткою, або абелевою групою. Якщо S — напіврешітка, то згідно з твердженням 3 вона є або ланцюгом, або примітивною напіврешіткою. І навпаки, якщо напіврешітка S є ланцюгом або примітивною напіврешіткою, то, згідно з твердженням 3, інверсна напівгрупа $PA(S)$ є переставною.

Нехай тепер S — група така, що інверсний моноїд $PA(S)$ є переставним, і $|S| = m$. Припустимо, що прості числа p_1 і p_2 ($p_1 \neq p_2$) є дільниками числа m. За теоремою Коші група S містить підгрупи A і B, порядки яких відповідно p_1 і p_2. Оскільки напівгрупа $PA(S)$ переставна, то її ідеали лінійно впорядковані відносно включення (див. [6], теорема 4). Позаяк $h(A) = h(B) = 1$, то згідно з теоремою 1 $A \cong B$. Суперечність. Таким чином, число m має лише один простий дільник. Позначимо його через p. Звідси $m = p^n$ для деякого натурального числа n.

Твердження теореми будемо доводити індукцією за висотою підгрупи в решітці $\mathrm{Sub}(S)$. Нехай $\mathfrak{G}_2$ — підгрупа групи S порядку p^2. Тоді $h(\mathfrak{G}_2) = 2$. Підгрупа $\mathfrak{G}_2$ містить групу A, порядок якої p. Згідно з твердженням 2 існує підгрупа B така, що $B \subset \mathfrak{G}_2$, $B \neq A$ і $h(A) = h(B)$. З останньої рівності згідно з теоремою 1 маємо $A \cong B$. Оскільки $A \cap B = \{e\}$, то $\mathfrak{G}_2 = A \cdot B \cong A \times A$. Оскільки усі підгрупи порядку p^2 мають висоту 2 в решітці $\mathrm{Sub}(S)$, то за теоремою 1 вони попарно ізоморфні між собою. Отже, кожна підгрупа порядку p^2 є елементарною абелевою p-групою.

Нехай тепер $\mathfrak{G}_3$ — довільна підгрупа порядку p^3. Отже, $h(\mathfrak{G}_3) = 3$. Згідно з твердженням 2 існують підгрупи C і D, кожна з яких порядку p^2, такі, що $C \neq D$, $C \subset \mathfrak{G}_3$, $D \subset \mathfrak{G}_3$ і $h(C) = h(D)$. Згідно з лемою 4 існує підгрупа $F(|F| = p)$ така, що $F \nsubseteq C$ і $F \subset D$. Оскільки $C \cap F = \{e\}$, $|F| = p$, $|C| = p^2$, то $\mathfrak{G}_3 = C \cdot F \cong A \times A \times A$, де $|A| = p$. Позаяк усі підгрупи порядку p^3 мають висоту 3 в решітці $\mathrm{Sub}(S)$, то за теоремою 1 вони попарно ізоморфні між собою. Отже, кожна підгрупа порядку p^3 є елементарною абелевою p-групою. Аналогічно продовжуючи цей алгоритм, переконуємося, що група S є елементарною абелевою p-групою порядку p^n.

Доведемо тепер зворотне твердження. Окремо розглянемо випадок, коли $|S| = = p$, тоді $PA(S) = \mathrm{Aut}(S) \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} \right\}$, де e — одиниця групи S. Зазначимо, що елемент $\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} \in PA(S)$ є зовні приєднаним нулем до групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(S)$. Відомо, що будь-які дві конгруенції довільної групи комутують відносно композиції бінарних відношень, тобто група є переставною напівгрупою. Легко довести, що група з зовні приєднаним нулем теж є переставною. Нехай тепер група S є елементарною абелевою p-групою порядку p^n, $n \geq 2$. Доведемо спочатку, що ідеали інверсної напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані. Нехай B і C — довільні підгрупи такі, що $h(B) = h(C) = k$, тоді $|B| = |C| = p^k$ для деякого числа k. Оскільки група S є прямим добутком циклічних груп, то підгрупи B і C теж є прямим добутком циклічних груп. Позаяк кожний елемент (відмінний від одиниці) групи S має порядок p, то нетривіальні циклічні підгрупи групи S вичерпуються підгрупами порядку p. Отже, групи B і C є прямим добутком циклічних груп порядку p. Оскільки $|B| = |C|$, то $B \cong C$. Таким чином, згідно з теоремою 1 ідеали напівгрупи $PA(S)$ утворюють ланцюг відносно включення.

Нехай тепер D — довільна підгрупа групи S порядку p^r, $r \geq 2$. Розглянемо окремо випадок $|D| = p^2$. Оскільки група D не є циклічною, то вона містить дві різні підгрупи M і T такі, що $M \subset D, T \subset D$ і $h(M) = h(T) = h(D) - 1 = 1$. Отже, для будь-якої підгрупи порядку p^2 виконується умова 2 твердження 2. Якщо $|D| = p^r$, $r \geq 3$, то вона містить деяку підгрупу F порядку p^{r-1}. Далі скористаємося твердженням (див. [7], теорема 12.5.3), яке формулюється так:

Група порядку p^n, яка містить лише одну підгрупу порядку p^m, де $1 < m < n$, є циклічною.

Оскільки група D не є циклічною, то група D містить принаймні ще одну підгрупу K порядку p^{r-1}. Оскільки $F \neq K$, $F \subset D$, $K \subset D$ і $h(F) = h(K) = h(D) - 1 = r - 1$, то виконується умова 2 твердження 2. Таким чином, згідно з твердженням 2 інверсна напівгрупа $PA(S)$ є переставною.

Теорему 2 доведено.

4. Структура скінченної в'язки, напівгрупа локальних автоморфізмів якої є переставною. Нехай S — скінченна в'язка, тобто напівгрупа, всі елементи якої є ідемпотентами. Відомо [5], що на будь-якій в'язці S відношення Гріна $\mathcal{J}$ є конгруенцією, до того ж кожний клас цієї конгруенції є прямокутною в'язкою і фактор-напівгрупа $S/\mathcal{J}$ є напіврешіткою. Коротше кажучи, в'язка S є напіврешіткою прямокутних в'язок.

В'язку S назвемо ***структурно рівномірною***, якщо для будь-яких $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$ з умови $h(A) = h(B)$ випливає $A \cong B$.

Лема 5. *Якщо скінченна в'язка S є структурно рівномірною, то кожний клас конгруенції $\mathcal{J}$ є або напівгрупою правих нулів, або напівгрупою лівих нулів.*

Доведення. Кожний клас конгруенції $\mathcal{J}$ є прямокутною в'язкою. Нехай C — довільний клас цієї конгруенції. Як відомо [5], прямокутна в'язка є прямим добутком напівгрупи правих і лівих нулів, тобто $C \cong A \times B$, де A — напівгрупа лівих нулів, а B — напівгрупа правих нулів. Нехай $|A| > 1$ і $|B| > 1$. Далі, нехай $a_1, a_2 \in A$ і $a_1 \neq a_2$, а також $b_1, b_2 \in B$ і $b_1 \neq b_2$. Напівгрупа $K = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$ є (з точністю до ізоморфізму) піднапівгрупою класу C. Очевидно, що K є напівгрупою правих нулів. Тепер розглянемо піднапівгрупу $M = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$. Очевидно, що M є напівгрупою лівих нулів. Крім того, $h(K) = h(M) = 2$. Оскільки за умовою в'язка S є структурно рівномірною, то $K \cong M$. Суперечність. Таким чином,

$|A| = 1$ або $|B| = 1$. Звідси робимо висновок, що кожний клас C конгруенції $\mathcal{J}$ є або напівгрупою лівих нулів, або напівгрупою правих нулів.

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Нехай S — скінченна структурно рівномірна в'язка. Якщо $|S/\mathcal{J}| \geq 2$, то нульовий клас конгруенції $\mathcal{J}$ є одноелементним.*

Доведення. Позначимо нульовий клас конгруенції $\mathcal{J}$ через $\mathcal{K}$. Припустимо, що $|\mathcal{K}| \geq 2$. За попередньою лемою кожний клас конгруенції $\mathcal{J}$ є або напівгрупою лівих нулів, або напівгрупою правих нулів. Нехай для конкретності клас $\mathcal{K}$ є напівгрупою лівих нулів (тобто $xy = x$ для будь-яких x, $y \in \mathcal{K}$). Оскільки $|S/\mathcal{J}| \geq 2$, то існує клас A конгруенції $\mathcal{J}$, відмінний від $\mathcal{K}$. Зрозуміло, що $\mathcal{K} \cdot A \subseteq \mathcal{K}$ і $A \cdot \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Нехай $x \in \mathcal{K}$ і $a \in A$, тоді $xa = (xx)a = x(xa) = x$. Розглянемо множину $\{a, x, ax\}$. Можливі два випадки:

1) $ax = x$;

2) $ax \neq x$.

Якщо $ax = x$, то $\{a, x\}$ — піднапівгрупа напівгрупи S. За припущенням $|\mathcal{K}| \geq 2$, тому знайдуться u, $v \in \mathcal{K}$ такі, що $u \neq v$. Очевидно, що $\{u, v\}$ — піднапівгрупа, до того ж $h(\{a, x\}) = h(\{u, v\}) = 2$. Отже, $\{a, x\} \cong \{u, v\}$. Оскільки $\{a, x\}$ є комутативною напівгрупою, а напівгрупа $\{u, v\}$ не комутативна, то приходимо до суперечності.

Нехай тепер $ax \neq x$, тоді $\{a, x, ax\}$ — піднапівгрупа. Легко перевірити, що $\{a, ax\}$ — напіврешітка. Крім того, $h(\{a, ax\}) = h(\{u, v\}) = 2$. Звідси $\{a, ax\} \cong$ $\cong \{u, v\}$. Суперечність. Отже, $|\mathcal{K}| = 1$. Таким чином, $\mathcal{K} = \{0\}$.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай S — скінченна структурно рівномірна в'язка. Якщо $|S/\mathcal{J}| \geq 2$, то S — напіврешітка.*

Доведення. Вище ми довели, що напівгрупа S містить нуль 0. Покажемо, що кожний відмінний від нульового клас конгруенції $\mathcal{J}$ є одноелементним. Припустимо протилежне, тобто існує клас A конгруенції $\mathcal{J}$ такий, що $|A| \geq 2$. Згідно з лемою 5 клас A є або напівгрупою лівих нулів, або напівгрупою правих нулів. Нехай $u, v \in A$ і $u \neq v$. Очевидно, що $\{0, u\}$ є напіврешіткою, а $\{u, v\}$ — напівгрупою лівих або правих нулів. Легко перевірити, що $h(\{0, u\}) = h(\{u, v\}) = 2$. Оскільки в'язка S є структурно рівномірною, то $\{0, u\} \cong \{u, v\}$. Суперечність. Отже, в'язка S є напіврешіткою.

Лему 7 доведено.

Лема 8. *Повний список скінченних структурно рівномірних напіврешіток є таким*:

1) *лінійно впорядкована напіврешітка*;

2) *примітивна напіврешітка.*

Доведення. Легко перевірити, що напіврешітка з даного списку є структурно рівномірною. Покажемо, що інших структурно рівномірних скінченних напіврешіток немає.

Нехай S — скінченна структурно рівномірна напіврешітка, довжина якої $\geq\ 2$. Покажемо, що в цьому випадку S є лінійно впорядкованою напіврешіткою. Припустимо протилежне, тобто існують принаймні два елементи a і b такі, що $a \parallel b$. Очевидно, що $\{a, b, ab\}$ — піднапіврешітка. Оскільки довжина напіврешітки S не менша 2, то існують три елементи x, y, $z \in S$ такі, що $x < y < z$. Легко перевірити, що $h(\{a,b,ab\}) = h(\{x,y,z\})$. Звідси випливає, що $\{a,b,ab\} \cong \{x,y,z\})$. Позаяк $a \parallel b$ і $\{x,y,z\}$ — лінійно впорядкована напіврешітка, то одержуємо суперечність.

Якщо ж довжина напіврешітки S не перевищує 1, то S або тривіальна, або примітивна.

Лему 8 доведено.

Теорема 3. *Нехай S — скінченна в'язка. Напівгрупа $PA(S)$ є переставною в таких і лише в таких випадках*:

1) S — *лінійно впорядкована напіврешітка*;

2) S — *примітивна напіврешітка*;

3) S — *напівгрупа лівих нулів*;

3) S — *напівгрупа правих нулів.*

Доведення. Нехай інверсна напівгрупа $PA(S)$ є переставною. Тоді (див. теорему 1 і твердження 2) в'язка S є структурно рівномірною. Якщо $|S/\mathcal{J}| \geq 2$, то (див. лему 7) в'язка S є напіврешіткою. Згідно з лемою 8 вона або лінійно впорядкована, або є примітивною напіврешіткою. Якщо ж $|S/\mathcal{J}| = 1$, то згідно з лемою 5 в'язка S є напівгрупою лівих або напівгрупою правих нулів.

Залишилося показати, що для будь-якої в'язки з перелічених в теоремі інверсна напівгрупа локальних автоморфізмів $PA(S)$ є переставною. Вище (див. твердження 3) ми вже показали, що для скінченної примітивної і скінченної лінійно впорядкованої напіврешітки інверсна напівгрупа $PA(S)$ є переставною. Якщо ж S є напівгрупою лівих (правих) нулів, то, очевидно, що в цьому випадку напівгрупа $PA(S)$ збігається з симетричною інверсною напівгрупою на множині S. Використовуючи той факт, що конгруенції на скінченній симетричній групі утворюють ланцюг, а також опис конгруенцій на скінченній симетричній інверсній напівгрупі (див. [8], теорема 6.3.10), легко довести, що решітка конгруенцій на напівгрупі $PA(S)$ утворює ланцюг, а отже, напівгрупа $PA(S)$ є переставною.

Теорему 3 доведено.

1. *Либих А. Л.* Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп // Исследования по алгебре. – 1973. – Вып. 3. – С. 25 – 33.
2. *Goberstein S. M.* Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids // Glasgow Math. J. – 1990. – **32**. – P. 189 – 195.
3. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
4. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
5. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.
6. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
7. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
8. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical finite transformation semigroups. An introduction. – Springer, 2009. – xii + 314 p.

Одержано 24.06.10,
після доопрацювання — 22.11.10