УДК 517.984.5

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КВАЗИПРОИЗВОДНЫМИ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

We propose a regularization of the formal differential expression

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in (a, b),$$

of order $m \geqslant 3$ by using quasiderivatives. It is assumed that the distribution coefficient q has an antiderivative $Q \in L([a, b]; \mathbb{C})$. In the symmetric case ($Q = \overline{Q}$), we describe self-adjoint and maximal dissipative/accumulative extensions of the minimal operator and its generalized resolvents. In the general (nonself-adjoint) case, we establish conditions for the convergence of the resolvents of the considered operators in norm.

The case where $m = 2$ and $Q \in L_2([a, b]; \mathbb{C})$ was studied earlier.

Запропоновано регуляризацію формального диференціального виразу порядку $m \geqslant 3$

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in (a, b),$$

з допомогою квазіпохідних. Припускається, що коефіцієнт-розподіл q має первісну $Q \in L([a, b]; \mathbb{C})$. У симетричному випадку ($Q = \overline{Q}$) описано самоспряжені, максимальні дисипативні / акумулятивні розширення мінімального оператора і його узагальнені резольвенти. У загальному (несамоспряженому) випадку знайдено умови збіжності резольвент розглянутих операторів за нормою.

Випадок $m = 2$ при $Q \in L_2([a, b]; \mathbb{C})$ досліджено раніше.

1. Введение. Рассмотрим на конечном интервале $\mathcal{J} := (a, b)$ формальное дифференциальное выражение порядка m

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{1}$$

Если $m = 2$ и коэффициент $q \in L(\mathcal{J}; \mathbb{R})$, то дифференциальное уравнение $l(y) = f$ является классическим уравнением Штурма – Лиувилля и изучено весьма полно. Современное изложение теории такого уравнения приведено во многих монографиях (см. [1] и указанную там библиографию). Как выяснилось после появления работы [2], многие положения этой теории распространяются на существенно более общий случай

$$q = Q', \quad Q \in L_2(\mathcal{J}; \mathbb{C}), \tag{2}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. В частности, это относится к физически содержательному случаю, когда q является мерой Радона на $\overline{\mathcal{J}}$ либо имеет неинтегрируемые точечные особенности. Подобные операторы задолго до этого появлялись в различных задачах математической физики и исследовались многими авторами, главным образом, с помощью средств теории операторов (см. работу [3] и библиографию в ней). В частности, случай дифференциального выражения произвольного четного порядка изучался в [4].

В связи с этим представляет интерес задача о регуляризации дифференциального выражения (1) с сингулярным коэффициентом $q \notin L(\mathcal{J}; \mathbb{C})$ при произвольном значении $m > 2$. Ее решению посредством специально подобранных квазипроизводных и посвящена данная работа. При этом условие (2) нам удалось ослабить до следующего:

$$q = Q', \quad Q \in L(\mathcal{J}; \mathbb{C}) =: L_1. \tag{3}$$

Случай общего выражения Штурма – Лиувилля

$$l(y) = -(p(t)y')' + q(t)y, \quad t \in \mathcal{J},$$

с сингулярными коэффициентами

$$q = Q', \quad 1/p,\ Q/p,\ Q^2/p \in L_1$$

с аналогичных позиций исследован авторами ранее в работе [5] (см. также [6]).

Работа структурирована следующим образом.

В пункте 2 вводится регуляризация формального дифференциального выражения (1) в предположении (3) и определяются соответствующие максимальный и минимальный операторы в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{J};\mathbb{C}) =: L_2$.

В пункте 3 установлены достаточные условия равномерной резольвентной аппроксимации расширений построенного минимального оператора $L_{\min}$ семейством операторов того же класса, в частности, с гладкими коэффициентами.

В пункте 4 в предположении симметричности минимального оператора описываются все его самосопряженные, максимальные диссипативные и максимальные аккумулятивные расширения в терминах однородных граничных условий канонического вида. Эти расширения параметризуются соответственно унитарными операторами и сжатиями в $\mathbb{C}^m$. Такая параметризация является биективной и непрерывной.

В пункте 5 описаны все обобщенные резольвенты минимального оператора вне вещественной оси.

Случай общих симметрических квазидифференциальных операторов исследован авторами в [7, 8]. Предварительный вариант этой статьи см. в [9].

2. Регуляризация сингулярного выражения. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение (1) порядка $m \geq 3$ при условиях (3).

Введем последовательно квазипроизводные

$$D^{[k]}y(t) := y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2},$$

$$D^{[m-1]}y(t) := y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t),$$

$$D^{[m]}y(t) := (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t).$$

В условиях (3) они являются квазипроизводными по Шину – Цеттлу (см. [12], разд. 1).

Поэтому формальное выражение (1) можно корректно определить как квазидифференциальное выражение Шина – Цеттла

$$l[y] := i^m D^{[m]}.$$

Определение 1. *Решение задачи Коши для резольвентного уравнения*

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2, \qquad (D^{[k]}y)(c) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{4}$$

где $c \in \overline{\mathcal{J}}$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, определяется как первая компонента решения задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений *первого порядка*

$$w'(t) = A_\lambda(t)w(t) + \varphi(t), \qquad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}), \tag{5}$$

где вектор-функция $w(t) := (D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \ldots, D^{[m-1]}y(t))$, *квадратная матрица-функция*

$$A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ i^{-m}\lambda & i^{-m}Q(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m\times m}, \tag{6}$$

а вектор-функция $\varphi(t) := (0, 0, \ldots, 0, i^{-m}f(t))$ *принадлежит* L_1^m.

Лемма 1. *Задача Коши* (4) *при условии* (3) *имеет решение на* $\overline{\mathcal{J}}$, *притом оно единственное.*

Доказательство. Задача (5) при $A_\lambda(\cdot) \in L_1^{m\times m}$ имеет и притом единственное решение при каждом $c \in \overline{\mathcal{J}}$ и $(\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ в силу теоремы 1.2.1 из [1]. Поэтому утверждение леммы следует из определения 1 и указанной теоремы.

Введенное квазидифференциальное выражение $l[y]$ порождает в гильбертовом пространстве L_2 (см. [11, 12]) *максимальный* квазидифференциальный оператор

$$L_{\max}\colon\ y \to l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}},\ \mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1},\ D^{[m]}y \in L_2 \right\}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение оператора $L_{\max}$ на линейное многообразие

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Следующее утверждение показывает, что введенные нами операторы не зависят от выбора первообразной Q.

Лемма 2. *Если в равенствах* (1) *и* (3) *заменить выбранную первообразную* Q *произвольной*

$$\widetilde{Q} := Q + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

то операторы $L_{\max}$, $L_{\min}$ *не изменятся.*

Доказательство. Покажем, что оператор $L_{\max} = L_{\max}(Q)$ совпадает с оператором $\widetilde{L}_{\max} = L_{\max}(\widetilde{Q})$. Обозначим через $\widetilde{D}^{[0]}y, \widetilde{D}^{[1]}y, \ldots, \widetilde{D}^{[m]}y$ квазипроизводные, соответствующие отличной от Q первообразной $\widetilde{Q}$.

Пусть $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. Непосредственными вычислениями находим

$$\widetilde{D}^{[0]}y = D^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\widetilde{D}^{[m-2]}y = D^{[m-2]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),$$

$$\widetilde{D}^{[m-1]}y = D^{[m-1]}y + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),$$

$$\widetilde{D}^{[m]}y = D^{[m]}y \in L_2.$$

Это означает, что

$$\operatorname{Dom}(L_{\max}) \subset \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\max}) = \left\{ y \,\middle|\, \widetilde{D}^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1}, \widetilde{D}^{[m]}y \in L_2 \right\}.$$

Аналогично показывается, что $\operatorname{Dom}(L_{\max}) \supset \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\max})$. Наконец,

$$\widetilde{L}_{\max}y = i^m \widetilde{D}^{[m]}y = i^m D^{[m]}y = L_{\max}y, \quad y \in \operatorname{Dom}(L_{\max}).$$

Покажем теперь, что $\widetilde{L}_{\min} = L_{\min}$.

Пусть $y \in \operatorname{Dom}(L_{\min})$. Тогда

$$\widetilde{D}^{[0]}y(a) = D^{[0]}y(a) = 0,$$

$$\widetilde{D}^{[0]}y(b) = D^{[0]}y(b) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{D}^{[m-2]}y(a) = D^{[m-2]}y(a) = 0,$$

$$\widetilde{D}^{[m-2]}y(b) = D^{[m-2]}y(b) = 0,$$

$$\widetilde{D}^{[m-1]}y(a) = D^{[m-1]}y(a) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(a) = 0 + 0 = 0,$$

$$\widetilde{D}^{[m-1]}y(b) = D^{[m-1]}y(b) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(b) = 0 + 0 = 0.$$

Это означает, что $\operatorname{Dom}(L_{\min}) \subset \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$. Аналогично устанавливается, что $\operatorname{Dom}(L_{\min}) \supset \operatorname{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$.

Поскольку $\widetilde{L}_{\min}y = \widetilde{L}_{\max}y = L_{\max}y = L_{\min}y$ на функциях $y \in \operatorname{Dom}(L_{\min})$, лемма доказана.

Рассмотрим наряду с (1) формально сопряженное дифференциальное выражение

$$l^{+}(y) = i^m y^{(m)}(t) + \overline{q}(t)y(t),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Обозначим через $L^{+}_{\max}$ и $L^{+}_{\min}$ порождаемые им максимальный и минимальный операторы в пространстве L_2. Тогда из результатов монографии [12] для общих квазидифференциальных выражений Шина – Цеттла и приведенного выше следует такая теорема.

Теорема 1. *Операторы* $L_{\min}, L^{+}_{\min}, L_{\max}, L^{+}_{\max}$ *являются плотно заданными и замкнутыми в пространстве* L_2,

$$L^{*}_{\min} = L^{+}_{\max}, \qquad L^{*}_{\max} = L^{+}_{\min}.$$

Если функция q вещественнозначна, то оператор $L_{\min} = L_{\min}^{+}$ является симметрическим с индексом дефекта (m, m) и

$$L_{\min}^{*} = L_{\max}, \qquad L_{\max}^{*} = L_{\min}.$$

3. Аппроксимация резольвенты. Рассмотрим семейство квазидифференциальных выражений $l_\varepsilon[y]$ вида (1) с коэффициентами $q_\varepsilon = Q_\varepsilon'$, $Q_\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Соответствующие им квазипроизводные будем обозначать через $D_\varepsilon^{[0]}y, D_\varepsilon^{[1]}y, \ldots$ $\ldots, D_\varepsilon^{[m]}y$.

В гильбертовом пространстве L_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ такие выражения при каждом ε порождают операторы $L_{\min}^{\varepsilon}$, $L_{\max}^{\varepsilon}$. Пусть матрицы $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а векторы

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Зададим для каждого фиксированного значения ε операторы

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \{y \in \mathrm{Dom}\,(L_{\max}^{\varepsilon}) |\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\}.$$

Очевидно, что

$$L_{\min}^{\varepsilon} \subset L_\varepsilon \subset L_{\max}^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будем обозначать через $\rho(L)$ резольвентное множество оператора L. Напомним, что операторы L_ε сходятся при $\varepsilon \to 0+$ к оператору L_0 в смысле равномерной резольвентной сходимости, $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$, если существует $\mu \in \mathbb{C}$ такое, что $\mu \in \rho(L_0)$, $\mu \in \rho(L_\varepsilon)$ для достаточно малых ε и

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1} - (L_0 - \mu)^{-1}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Это определение не зависит от выбора $\mu \in \rho(L_0)$ [13].

Введем обозначение $c^{\vee}(t) := \int_a^t c(s)ds$.

Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\rho(L_0)$ непусто и при $\varepsilon \to 0+$ выполняются условия*:

1) $\|(Q_\varepsilon - Q_0)^{\vee}\|_C \to 0$;

2) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0)$, $\beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0)$.

Тогда $L_\varepsilon \overset{R}{\to} L_0$.

***Замечание* 1.** Условие $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, очевидно, достаточно для выполнения условия 1. Поскольку множество бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ плотно в пространстве L_1, из теоремы 2 следует, что каждый из введенных операторов L_0 с сингулярным коэффициентом можно аппроксимировать в смысле равномерной резольвентной сходимости последовательностью дифференциальных операторов с коэффициентами из $C_0^\infty(\mathcal{J}, \mathbb{C})$.

Доказательство теоремы 2 основывается на одном вспомогательном результате.

Следуя работам [14, 15], обозначим через $\mathcal{M}^n(\mathcal{J}) =: \mathcal{M}^n$, $n \in \mathbb{N}$, класс всех параметризованных числом ε матриц-функций

$$R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to L_1^{n\times n},$$

для которых решение задачи Коши

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \qquad Z(a;\varepsilon) = I_n,$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot;\varepsilon) - I_n\|_C = 0,$$

где $\|\cdot\|_C$ — $\sup$-норма.

В работах [15, 16] установлена следующая общая теорема.

Теорема 3. *Пусть для краевой задачи*

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t\in\mathcal{J}, \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0], \tag{7}$$

$$U_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

где матрицы-функции $A(\cdot,\varepsilon) \in L_1^{n\times n}$, вектор-функции $f(\cdot,\varepsilon)\in L_1^n$, а линейные непрерывные операторы

$$U_\varepsilon : C(\overline{\mathcal{J}};\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n, \quad n\in\mathbb{N},$$

выполнены условия:

1) *однородная предельная краевая задача* (7), (8) *с* $\varepsilon = 0$ *и* $f(\cdot;0)\equiv 0$ *имеет только тривиальное решение*;

2) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}^n$;

3) $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0, \quad \varepsilon\to 0+$.

Тогда для достаточно малых ε существуют матрицы Грина $G(t,s;\varepsilon)$ задач (7), (8) *и на квадрате $\mathcal{J}\times\mathcal{J}$*

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon\to 0+, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в пространстве L_∞.

***Замечание* 2.** Условие 3 теоремы 3 нельзя заменить более слабым условием сильной сходимости операторов $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ [15]. Однако, как нетрудно убедиться, для двухточечных краевых операторов

$$U_\varepsilon y := B_1(\varepsilon)y(a) + B_2(\varepsilon)y(b), \quad B_k(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{n\times n}, \quad k\in\{1,2\},$$

как условие сильной, так и условие равномерной сходимости равносильны тому, что

$$\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \to 0, \quad \varepsilon\to 0+, \quad k\in\{1,2\}.$$

Приведенное определение класса $\mathcal{M}^n$ не является конструктивным. Имеются различные достаточные условия принадлежности матричной функции $R(\cdot;\varepsilon)$ классу $\mathcal{M}^n$. В частности, из результатов работы А. Ю. Левина [17] следует такая лемма.

Лемма 3. *Пусть $R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to L_1^{n\times n}$. Если при $\varepsilon\to 0+$ выполнено одно из четырех* (*неэквивалентных между собой*) *условий*:

(α) $\|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

(β) $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(γ) $\|R(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(Δ) $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon) - R(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$,

то условие $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, *равносильно включению* $R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^n$.

Следующее утверждение позволит редуцировать теорему 2 к теореме 3.

Лемма 4. *Функция* $y(t)$ *является решением краевой задачи*

$$l_\varepsilon[y](t) = f(t;\varepsilon) \in L_2, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \tag{10}$$

$$\alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0 \tag{11}$$

тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$$

является решением краевой задачи

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t) + \varphi(t;\varepsilon), \tag{12}$$

$$\alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0, \tag{13}$$

где квадратная матрица-функция

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m\times m}, \tag{14}$$

а $\varphi(\cdot;\varepsilon) := (0,0,\ldots,0,i^{-m}f(\cdot;\varepsilon))$ *принадлежит* L_1^m.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$(D_\varepsilon^{[0]}y(t))' = D_\varepsilon^{[1]}y(t),$$

$$(D_\varepsilon^{[1]}y(t))' = D_\varepsilon^{[2]}y(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(D_\varepsilon^{[m-3]}y(t))' = D_\varepsilon^{[m-2]}y(t),$$

$$(D_\varepsilon^{[m-2]}y(t))' = -i^{-m}Q_\varepsilon(t)D_\varepsilon^{[0]}y(t) + D_\varepsilon^{[m-1]}y(t),$$

$$(D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))' = i^{-m}Q_\varepsilon(t)D_\varepsilon^{[1]}y(t) + i^{-m}f(t;\varepsilon).$$

Если $y(\cdot)$ — решение уравнения (10), то из определения квазипроизводных следует, что $y(\cdot)$ является решением этой системы. С другой стороны, положив $w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), \ldots, D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$ и $\varphi(t;\varepsilon) = (0,0,\ldots,0,i^{-m}f(t;\varepsilon))$, данную систему можно записать в виде уравнения (12).

Учитывая, что $\mathcal{Y}_\varepsilon(a) = w(a)$, $\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = w(b)$, легко видеть, что краевые условия (11) эквивалентны краевым условиям (13).

В силу леммы 4 из предположения

($\mathcal{E}$) *однородная краевая задача*

$$D_0^{[m]} y(t) = 0, \quad \alpha(0)\mathcal{Y}_0(a) + \beta(0)\mathcal{Y}_0(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение

следует, что однородная краевая задача

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t), \qquad \alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0$$

также имеет только тривиальное решение при достаточно малых ε.

Лемма 5. *Пусть для задачи* (12), (13) *при достаточно малых* ε *существует матрица Грина*

$$G(t, s, \varepsilon) = (g_{ij}(t, s))_{i,j=1}^m \in L_\infty^{m\times m}.$$

Тогда существует функция Грина $\Gamma(t, s; \varepsilon)$ *полуоднородной краевой задачи* (10), (11) *и*

$$\Gamma(t, s; \varepsilon) = i^{-m} g_{1m}(t, s; \varepsilon) \quad \text{почти всюду.}$$

Доказательство. Согласно определению матрицы Грина, единственное решение задачи (12), (13) записывается в виде

$$w_\varepsilon(t) = \int_a^b G(t, s; \varepsilon)\varphi(s; \varepsilon)ds, \quad t \in \overline{\mathcal{J}}.$$

В силу леммы 4 последнее равенство можно переписать в виде

$$D_\varepsilon^{[0]} y_\varepsilon(t) = \int_a^b g_{1m}(t, s; \varepsilon) i^{-m} f(s; \varepsilon)ds,$$

$$D_\varepsilon^{[1]} y_\varepsilon(t) = \int_a^b g_{2m}(t, s; \varepsilon) i^{-m} f(s; \varepsilon)ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_\varepsilon^{[m-1]} y_\varepsilon(t) = \int_a^b g_{mm}(t, s; \varepsilon) i^{-m} f(s; \varepsilon)ds,$$

где $y_\varepsilon(\cdot)$ — единственное решение задачи (10), (11). Отсюда следует утверждение леммы 5.

***Доказательство теоремы* 2.** В силу условия 1 теоремы 2 можно, не уменьшая общности, считать, что $0 \in \rho(L_0)$.

Покажем, что $\sup_{\|f\|_2=1} \|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\| \to 0$, $\varepsilon \to 0+$.

Уравнение $L_\varepsilon^{-1} f = y_\varepsilon$ эквивалентно тому, что $L_\varepsilon y_\varepsilon = f$, т. е. y_ε является решением задачи (10), (11). При этом из включения $0 \in \rho(L_0)$ следует, что выполняется предположение ($\mathcal{E}$).

Обозначим $r(\cdot;\varepsilon) := i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) - i^{-m}Q(\cdot;0)$. Тогда

$$A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r(\cdot;\varepsilon) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0))^{\vee} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r^{\vee}(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r^{\vee}(\cdot;\varepsilon) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица-функция $A(\cdot;\varepsilon)$ задана формулой (14).

Легко видеть, что

$$\left(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right)\left(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right)^{\vee} = \left(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right)^{\vee}\left(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right).$$

Поэтому матричная функция $A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)$ при $m \geq 3$ удовлетворяет условию (Δ) леммы 3.

Очевидно, что условие $\|\left(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\right)^{\vee}\|_C \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, эквивалентно условию 1 теоремы 2. Поэтому из леммы 3 следует, что выполнены условия теоремы 3 для задачи (12), (13).

Это значит, что существуют матрицы Грина $G(t,s;\varepsilon)$ задач (12), (13) и выполняется предельное соотношение (9). Согласно лемме 5 это влечет предельное равенство

$$\|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon) - \Gamma(\cdot,\cdot;0)\|_{\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тогда

$$\|L_{\varepsilon}^{-1} - L_0^{-1}\| = \sup_{\|f\|_2=1}\left\|\int_a^b [\Gamma(t,s;\varepsilon) - \Gamma(t,s;0)]f(s)ds\right\|_2 \leq$$

$$\leq (b-a)^{1/2}\sup_{\|f\|_2=1}\left\|\int_a^b |\Gamma(t,s;\varepsilon) - \Gamma(t,s;0)||f(s)|ds\right\|_C \leq$$

$$\leq (b-a)\big\|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon) - \Gamma(\cdot,\cdot;0)\big\|_{\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

что влечет утверждение теоремы 2.

4. Расширения симметрического минимального оператора. Всюду далее будем предполагать, что функции q и, следовательно, Q вещественнозначны. Это условие влечет формальную самосопряженность выражения $l[y]$ (см. [12]) и, согласно теореме 1, симметричность оператора $L_{\min}$. Поэтому содержателен вопрос об описании (с помощью однородных краевых условий) некоторых классов (самосопряженных, максимальных диссипативных, максимальных аккумулятивных) расширений в гильбертовом пространстве L_2 симметрического оператора $L_{\min}$. Для ответа на него будем использовать понятие пространства граничных значений.

Определение 2. *Пусть L — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами. Тройка (H, Γ_1, Γ_2), где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 — линейные отображения $\mathrm{Dom}(L^*)$ в H, называется пространством граничных значений (сокращенно ПГЗ) симметрического оператора L, если:*

1) *для любых $f, g \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$*

$$(L^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H\,;$$

2) *для любых векторов $f_1, f_2 \in H$ существует вектор $f \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$ такой, что $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f = f_2$.*

Из определения ПГЗ следует, что $f \in \mathrm{Dom}\,(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. ПГЗ существует для любого симметрического оператора с равными ненулевыми дефектными числами (см. [18–20]). Оно всегда не единственно.

Следующий результат является ключевым для дальнейшего изложения.

Основная лемма. *Пусть Γ_1, Γ_2 — линейные отображения из $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ в $\mathbb{C}^m$ такие, что:*

при $m = 2n$, $n \geq 2$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n D^{[n]}y(a) \\ D^{[2n-1]}y(b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a) \\ \ldots\ldots\ldots \\ D^{[n-1]}y(a) \\ D^{[0]}y(b) \\ \ldots\ldots\ldots \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix},$$

а при $m = 2n+1, n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a) \\ D^{[2n]}y(b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b) \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{[n-1]}y(a) \\ D^{[0]}y(b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{[n-1]}y(b) \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{(-1)^n}{2} + i$, $\delta = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2} + i$.

Тогда тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений оператора $L_{\min}$.

***Замечание* 3.** Приведенные значения коэффициентов можно заменить произвольными наборами чисел, которые удовлетворяют системе

$$
\begin{aligned}
&\alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma = (-1)^n,\\
&\beta\overline{\delta} + \overline{\beta}\delta = (-1)^{n+1},\\
&\alpha\overline{\delta} + \overline{\beta}\gamma = 0, \qquad (15)\\
&\beta\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\delta = 0,\\
&\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.
\end{aligned}
$$

Обозначим через L_K сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(t) \in \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих однородному краевому условию канонического вида

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \qquad (16)$$

где K — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^m$.

Аналогично обозначим через L^K сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих однородному краевому условию канонического вида

$$(K - I)\,\Gamma_1 y - i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \qquad (17)$$

где K — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^m$.

В сочетании с результатами [18] основная лемма влечет следующее описание самосопряженных расширений $L_{\min}$.

Теорема 4. *Каждое L_K, где K — унитарный оператор в пространстве $\mathbb{C}^m$, является самосопряженным расширением оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется унитарный оператор K такой, что $\widetilde{L} = L_K$. Соответствие между унитарными операторами $\{K\}$ и расширениями $\{\widetilde{L}\}$ биективно.*

***Замечание* 4.** Из теорем 2 и 4 следует, что отображение $K \to L_K$ является не только биективным, но и непрерывным. Более точно, если унитарные операторы K_n сходятся по норме к оператору K, то

$$\left\|(L_K - \lambda)^{-1} - (L_{K_n} - \lambda)^{-1}\right\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0.$$

При этом, поскольку множество унитарных операторов в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^m$ компактно в метрике нормы оператора, верно и обратное утверждение, т. е. отображение

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \qquad \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0,$$

является при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфизмом.

Напомним известное определение.

Определение 3. *Плотно заданный линейный оператор L в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называют диссипативным* (*аккумулятивным*), *если*

$$\mathrm{Im}\,(Lf, f)_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad (\leq 0), \quad f \in \mathrm{Dom}(L),$$

и максимальным диссипативным (максимальным аккумулятивным), если, кроме того, у оператора L нет нетривиальных диссипативных (аккумулятивных) расширений в пространстве $\mathcal{H}$.

В частности, каждый симметрический оператор — диссипативный и аккумулятивный, а самосопряженный — максимальный диссипативный и максимальный аккумулятивный одновременно. Поэтому для симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ можно поставить вопрос об описании всех его максимальных диссипативных и максимальных аккумулятивных расширений. Согласно теореме Р. Филлипса [18, 21], *каждое диссипативное и каждое аккумулятивное расширение симметрического оператора является сужением его сопряженного.* Поэтому любое максимальное диссипативное или максимальное аккумулятивное расширение оператора $L_{\min}$ является сужением оператора $L_{\max}$.

Параметрическое описание всех максимальных диссипативных расширений симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает следующая теорема.

Теорема 5. *Каждое L_K, где K — сжатие в пространстве $\mathbb{C}^m$, является максимальным диссипативным расширением L_K оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого максимального диссипативного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется сжатие K такое, что $\widetilde{L} = L_K$. Соответствие между сжатиями $\{K\}$ и расширениями $\{\widetilde{L}\}$ биективно.*

Параметрическое описание всех максимальных аккумулятивных расширений симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает следующая теорема.

Теорема 6. *Каждое L^K, где K — сжатие в пространстве $\mathbb{C}^m$, является максимальным аккумулятивным расширением L^K оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого максимального аккумулятивного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется сжатие K такое, что $\widetilde{L} = L^K$. Соответствие между сжатиями $\{K\}$ и расширениями $\{\widetilde{L}\}$ биективно.*

***Замечание* 5.** Отображения

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}, \quad \operatorname{Im}\lambda < 0,$$

$$K \to \left(L^K - \lambda\right)^{-1}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

являются при каждом фиксированном λ гомеоморфизмами (см. замечание 4).

Перейдем к доказательствам сформулированных результатов. Доказательству основной леммы предпошлем две леммы, являющиеся частными случаями соответствующих утверждений для общих квазидифференциальных выражений (см. [12]).

Лемма 6. *Пусть $y, z \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$. Тогда*

$$\int\limits_a^b \left(D^{[m]}y \cdot \overline{z} - y \cdot \overline{D^{[m]}z}\right) dx = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Лемма 7. *Для произвольных наборов комплексных чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}\}$ существует функция $y \in \operatorname{Dom}(L_{\max})$ такая, что*

$$D^{[k]}y(a) = \alpha_k, \qquad D^{[k]}y(b) = \beta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Доказательство основной леммы. Достаточно показать, что тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 определения ПГЗ с $\mathcal{H} = L_2$. Согласно теореме 1 $L^*_{\min} = L_{\max}$. Согласно лемме 6

$$(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) = i^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Однако легко подсчитать, что в случае $m = 2n$

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z) = i^{2n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,,$$

и

$$(\Gamma_2 y, \Gamma_1 z) = i^{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{k} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Это показывает, что выполняется условие 1. Выполнение условия 2 следует непосредственно из леммы 7.

В случае $m = 2n+1$ введем обозначения

$$\Gamma_1 =: (\Gamma_{1a}, \Gamma_{1b}, \Gamma_{1ab}),$$

$$\Gamma_2 =: (\Gamma_{2a}, \Gamma_{2b}, \Gamma_{2ab}),$$

где

$$\Gamma_{1a} = i^{2n+1}\Big(-D^{[2n]}y(a), \ldots, (-1)^n D^{[n+1]}y(a)\Big),$$

$$\Gamma_{1b} = i^{2n+1}\Big(D^{[2n]}y(b), \ldots, (-1)^{n+1} D^{[n+1]}y(a)\Big),$$

$$\Gamma_{1ab} = i^{2n+1}\Big(\alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a)\Big),$$

$$\Gamma_{2a} = \Big(D^{[0]}y(a), \ldots, D^{[n-1]}y(a)\Big),$$

$$\Gamma_{2b} = \Big(D^{[0]}y(b), \ldots, D^{[n-1]}y(b)\Big),$$

$$\Gamma_{2ab} = \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a).$$

Тогда легко проверить, что

$$(\Gamma_{1a} y, \Gamma_{2a} z) = i^{2n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{2a} y, \Gamma_{1a} z) = i^{2n+1} \sum_{k=n+2}^{2n+1} (-1)^{k} D^{[2n-k]}y(a) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{1b} y, \Gamma_{2b} z) = i^{2n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$(\Gamma_{2b}y, \Gamma_{1b}z) = i^{2n+1} \sum_{k=n+2}^{2n+1} (-1)^k D^{[2n-k]}y(b) \cdot \overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$(\Gamma_{1ab}y, \Gamma_{2ab}z) - (\Gamma_{2ab}y, \Gamma_{1ab}z) =$$

$$= i^{2n+1}(-1)^n \left(D^{[n]}y(b) \cdot \overline{D^{[n]}z(b)} - D^{[n]}y(a) \cdot \overline{D^{[n]}z(a)} \right).$$

Из приведенных соотношений следует, что выполняется условие 1 определения 2. Выполнение условия 2 следует из леммы 7 и последнего из соотношений (15).

***Доказательство теорем* 4 – 6.** Утверждения теорем следуют из основной леммы и теоремы 1.6 гл. 3 монографии [18] для ПГЗ абстрактного симметрического оператора.

5. Обобщенные резольвенты. Напомним известное определение.

Определение 4. *Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора L называют операторную функцию R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, допускающую представление вида*

$$R_\lambda f = P^+ \left(L^+ - \lambda I^+\right)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ — какое-либо самосопряженное расширение оператора L с выходом, вообще говоря, в более широкое, чем $\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{H}^+$, I^+ — единичный оператор в $\mathcal{H}^+$, P^+ — оператор ортогонального проектирования $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$.

Операторная функция R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ — обобщенная спектральная функция оператора L. Это означает, что операторная функция F_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, имеет следующие свойства [22]:

1°) при $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором;

2°) $F_{\mu+} = F_\mu$ при всех вещественных μ;

3°) при любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu\to-\infty} ||F_\mu x||_{\mathcal{H}} = 0, \qquad \lim_{\mu\to+\infty} ||F_\mu x - x||_{\mathcal{H}} = 0.$$

Следующий результат принадлежит В. М. Бруку [20].

Пусть H — вспомогательное сепарабельное гильбертово пространство. Символом $\{X, X'\}$ будем обозначать упорядоченную пару из $X, X' \in H$. Пары $\{X, X'\}$ рассматриваются как элементы пространства $H \oplus H$. Предположим, что существует линейный оператор γ, отображающий область определения $\operatorname{Dom}(L^*)$ сопряженного к L оператора L^* на $H \oplus H$, такой, что имеет место равенство

$$(L^*x, y) - (x, L^*y) = (X', Y)_H - (X, Y')_H,$$

где $x, y \in \operatorname{Dom}(L)$, $\{X, X'\} = \gamma x$, $\{Y, Y'\} = \gamma y$.

Теорема 7. *Существует взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами оператора L и краевыми задачами*

$$L^* y = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\, Y' \mp i\, (K(\lambda) + I)\, Y = 0,$$

где $\{Y, Y'\} = \gamma y$, $h \in \mathcal{H}$, λ — комплексное число и знак „+" в краевом условии берется для значений λ из верхней полуплоскости, а „−" — для λ из нижней полуплоскости. $K(\lambda)$ — заданная регулярная в верхней полуплоскости операторная функция в H такая, что $\|K(\lambda)\| \le 1$; для значений λ из нижней полуплоскости $K(\lambda) := K^*(\overline{\lambda})$.

Каждое решение задачи определяет обобщенную резольвенту оператора L и, обратно, каждая обобщенная резольвента оператора L определяется решением данной задачи.

Эта теорема дает возможность описать все обобщенные резольвенты симметрического оператора $L_{\min}$ вне вещественной оси.

Параметрическое *внутреннее* описание всех обобщенных резольвент оператора $L_{\min}$ дает следующая теорема.

Теорема 8. 1. *Каждая обобщенная резольвента R_λ оператора $L_{\min}$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$ задается формулой $R_\lambda h = y$, где y — решение краевой задачи вида*

$$l[y] = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\, \Gamma_{[1]} f + i\, (K(\lambda) + I)\, \Gamma_{[2]} f = 0.$$

Здесь $h(x) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ и $K(\lambda)$ — регулярная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве $\mathbb{C}^2$ такая, что $||K(\lambda)|| \le 1$.

2. *В полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ каждая обобщенная резольвента оператора $L_{\min}$ задается формулой $R_\lambda h = y$, где y — решение краевой задачи вида*

$$l[y] = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\, \Gamma_{[1]} f - i\, (K(\lambda) + I)\, \Gamma_{[2]} f = 0.$$

Здесь $h(x) \in L_2(\mathcal{J}, \mathbb{C})$ и $K(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости операторная функция в пространстве $\mathbb{C}^2$ такая, что $||K(\lambda)|| \le 1$.

Эта параметризация обобщенных резольвент операторными функциями K является биективной.

Доказательство. В силу основной леммы вспомогательное сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{C}^m$ и оператор $\gamma y = \{\Gamma_{[1]} y, \Gamma_{[2]} y\}$, отображающий $\operatorname{Dom}(L_{\min})$ на $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$, удовлетворяют условиям теоремы 7.

Таким образом, утверждение теоремы 8 вытекает из теоремы 7.

1. *Zettl A.* Sturm – Liouville theory. – Providence: Amer. Math. Soc., 2005. – 328 p.
2. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 6. – С. 897 – 912.
3. *Albeverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – New York: Springer, 1988. – 452 p.

4. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 785 – 797.
5. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm – Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – № 2. – P. 120 – 130.
6. *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Резольвентная сходимость операторов Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 2. – С. 311 – 315.
7. *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доп. НАН України. – 2009. – № 4. – С. 19 – 24.
8. *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 27 – 31.
9. *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Регуляризация двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 49 – 67 // arXiv:1106.3275 [math.FA]
10. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1943. – **13(55)**, № 1. – С. 39 – 70.
11. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 3. – P. 453 – 474.
12. *Everitt W. N., Markus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1999. – 187 p.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
14. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.
15. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227 – 239.
16. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений одномерных краевых задач // arXiv:1106.4174 [math.AP]
17. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774 – 777.
18. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
19. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41 – 48.
20. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100(142)**, № 2(6). – С. 210 – 216.
21. *Phillips R. S.* Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – **90**. – P. 193 – 254.
22. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

Получено 21.06.11