УДК 512.643.8

А. А. Бондарь (Луган. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
Я. М. Дымарский (Луган. гос. ун-т внутренних дел им. Э. А. Дидоренко)

ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ФИКСИРОВАННЫМИ КРАТНОСТЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

The manifold of symmetric real matrices with fixed multiplicities of eigenvalues was considered for the first time by V. Arnold. In the case of compact real self-adjoint operators, analogous results were obtained by Japanese mathematicians D. Fujiwara, M. Tanikawa, and S. Yukita. They introduced a special local diffeomorphism that maps Arnold's submanifold to a flat subspace. The properties of the indicated diffeomorphism were further studied by Ya. Dymarskii. In the present paper, we describe the smooth structure of submanifolds of finite-dimensional and compact operators of the general form in which a selected eigenvalue is associated with a single Jordan block.

Многовид симетричних дійсних матриць з фіксованими кратностями власних значень уперше розглянув В. І. Арнольд. Для випадку компактних дійсних самоспряжених операторів аналогічні результати отримано групою японських математиків D. Fujiwara, M. Tanikawa, Sh. Yukita. Ними був уведений до розгляду спеціальний локальний дифеоморфізм, який „розпрямляє" многовид Арнольда. Подальше дослідження властивостей зазначеного дифеоморфізму виконано Я. М. Димарським. У статті описано гладку структуру підмноговидів скінченновимірних та компактних операторів загального вигляду, у яких виділеному власному значенню відповідає єдина клітина Жордана.

1. Обозначения. Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим банахово пространство L_c компактных операторов, действующих в X. Пусть $A^0 \in$ $\in L_c$ — фиксированный оператор и $\lambda_1^0 \neq 0$ — его собственное значение кратности m, которое отлично от всех остальных. Обозначим через $V_\varepsilon(A^0)$ ε-окрестность A^0 в L_c. Мы будем исследовать множество $L_c\left(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m\right)$ компактных операторов $A \in V_\varepsilon(A^0)$, у которых собственное значение λ, близкое к λ_1^0, имеет ту же кратность m.

Поскольку собственное значение λ_1^0 не совпадает с остальными собственными значениями оператора A^0, спектр A^0 разбит на две непересекающиеся замкнутые части: изолированное собственное значение λ_1^0 и его дополнение. Все пространство X представимо в виде прямой суммы образов двух операторов проектирования: $X = P_1X \oplus P_2X$, где P_1 — проекционный оператор, соответствующий собственному значению λ_1^0, а P_2 — проекционный оператор, соответствующий остальной части спектра компактного оператора A^0 [1]. Произвольный оператор $B \in L_c$ имеет блочное представление

$$B = P_1BP_1 + P_1BP_2 + P_2BP_1 + P_2BP_2 = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right). \tag{1}$$

В частности, в каноническом базисе подпространства $X_1 = P_1X$ оператор A^0 имеет вид

$$A^0 = \left(\begin{array}{c|c} J_1^0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^0 \end{array}\right), \tag{2}$$

где J_1^0 — единственная клетка Жордана, соответствующая собственному значению λ_1^0.

Указанный канонический базис индуцирует изоморфизм между операторами на X_1 и матрицами размерности $m \times m$. Поэтому будем использовать обозначения B_{11} и для операторов, и для матриц, что не приводит к двусмысленности.

В дальнейшем нам понадобятся конечномерные операторы и компактные операторы специального вида, порожденные разложением (1). Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Ant}\,(B) := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ -B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Diag}\,(B) := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_{\lrcorner} := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $L_{\lrcorner}$ пространство компактных операторов вида $B_{\lrcorner}$, через $L^{(m)}$ пространство операторов, действующих в $X_1 \cong \mathbb{C}^m$, а через $L_c^{(m)} \subset L_c$ пространство m-мерных операторов вида

$$B_c^{(m)} := \begin{pmatrix} B^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_c, \quad \text{где} \;\; B^{(m)} \in L^{(m)}.$$

Имеют место канонические изоморфизмы $L^{(m)} \cong L_c^{(m)}$, $L_c \cong L^{(m)} \times L_{\lrcorner}$. В дальнейшем будем отождествлять операторы из пространств $L^{(m)}$ и $L_c^{(m)}$. Разложение пространства X индуцирует разложение в прямую сумму пространства операторов:

$$L_c = L_c^{(m)} \oplus L_{\lrcorner},$$

так как любой оператор $B \in L_c$ единственным образом представим в виде $B = B_c^{(m)} + B_{\lrcorner}$. Поскольку

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

также имеет место еще одно разложение пространства операторов в прямую сумму:

$$L_c = L_c^{(m)} \oplus L_{12} \oplus L_{21} \oplus L_{22}.$$

Наконец, через $V_{\varepsilon,m}(0)$, $V_{\varepsilon,m,\lrcorner}(0)$ обозначим ε-окрестности нулей пространств $L_c^{(m)}$ и $L_{\lrcorner}$ соответственно.

Опишем кратко построение статьи. Второй пункт посвящен исследованию свойств локального диффеоморфизма, распрямляющего исследуемое многообразие. В третьем пункте описана гладкая структура подмногообразия конечномерных операторов, у которых каноническое матричное представление состоит из одной клетки Жордана. В четвертом пункте сформулирована и доказана основная теорема о многообразии операторов, у которых отслеживаемому собственному значению соответствует одна клетка Жордана. Наконец, последний пункт содержит теорему о многообразии операторов, у которых отслеживается конечное количество собственных значений фиксированной кратности.

2. Вспомогательный изоморфизм. Вслед за работами [2, 3] рассмотрим отображение

$$\Psi\colon L_c \to L_c, \quad \Psi(B) := \exp\,(\mathrm{Ant}\,(B))(A^0 + \mathrm{Diag}\,(B))\exp\,(-\mathrm{Ant}\,(B)), \tag{3}$$

где $\exp\,(B) = E + B + (1/2!)B^2 + \ldots$ — операторная экспонента. Поскольку $\exp\,(\mathrm{Ant}\,(B))\exp\,(-\mathrm{Ant}\,(B)) = E$, операторы $\Psi(B)$ и $A^0 + \mathrm{Diag}\,(B)$ подобны.

Лемма. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Отображение* Ψ *является аналитическим на всем пространстве.*

2. *Существует такое* ε, *что* Ψ *диффеоморфно отображает некоторую окрестность* $V(0)$ *нуля пространства* L_c *на окрестность* $V_\varepsilon(A^0)$ *точки* A^0.

3. *Подпространства* $L_c^{(m)}$, L_{12}, L_{21}, L_{22}, $L_\lrcorner$ *являются инвариантными для производной* $D\Psi(0)$.

4. *Сужения отображения* $D\Psi(0)$ *на подпространства* $L_c^{(m)}$ *и* L_{22} *являются тождественными отображениями, а сужения отображения* $D\Psi(0)$ *на подпространства* L_{12} *и* L_{21} — *изоморфизмами.*

5. *Сужение отображения* Ψ *на подпространство* $L_c^{(m)} \oplus L_{22}$ *является сдвигом на* A^0, *сужения отображения* Ψ *на подпространства* L_{12} *и* L_{21} *являются локальными иммерсиями в окрестностях нулей соответствующих подпространств, а сужение отображения* Ψ *на подпространство* $L_{12} \oplus L_{21}$ *является локальной иммерсией в окрестности нуля, трансверсальной подпространству* $L_c^{(m)} \oplus L_{22}$.

Доказательство. Аналитичность отображения Ψ следует из линейности и ограниченности отображений Ant, Diag и аналитичности отображения $\exp$.

Непосредственно из определения следует, что $\Psi(0) = A^0$. Найдем производную $D\Psi(0)$ в точке $0 \in L_c$ и докажем, что она является линейным изоморфизмом. Тогда из теоремы о существовании обратного отображения будет следовать второе утверждение леммы. С этой целью разложим операторную экспоненту в ряд и выделим линейную часть:

$$\Psi(B) = \exp(\mathrm{Ant}(B))(A^0 + \mathrm{Diag}(B))\exp(-\mathrm{Ant}(B)) =$$

$$= A^0 + \mathrm{Diag}(B) + \mathrm{Ant}(B) \cdot A^0 - A^0 \cdot \mathrm{Ant}(B) + o(B),$$

где $o(B)$ — бесконечно малая второго порядка. Поэтому

$$D\Psi(0)B = \mathrm{Diag}(B) + \mathrm{Ant}(B) \cdot A^0 - A^0 \cdot \mathrm{Ant}(B),$$

т. е.

$$D\Psi(0)B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}A_{22}^0 - J_1^0 B_{12} \\ A_{22}^0 B_{21} - B_{21} J_1^0 & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что отображение $D\Psi(0)$ ограничено, а его сужения на подпространства $L_c^{(m)}$ и L_{22} являются тождественными отображениями. Покажем, что $D\Psi(0)$ является биекцией. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$D\Psi(0)B = C \tag{5}$$

имело единственное решение B при любых $C \in L_c$. Уравнение (5) соответствует системе операторных уравнений

$$\begin{aligned} &B_{11} = C_{11}, \\ &B_{22} = C_{22}, \\ &B_{12}A_{22}^0 - J_1^0 B_{12} = C_{12}, \\ &A_{22}^0 B_{21} - B_{21} J_1^0 = C_{21}. \end{aligned} \tag{6}$$

Последние два уравнения являются уравнениями типа Сильвестра – Крейна. Согласно выбору A^0, собственное значение клетки J_1^0 не совпадает с собственными значениями оператора A_{22}^0. Из теоремы 3.2 [4, с. 38] следует, что указанные уравнения разрешимы, причем единственным образом. Отсюда следуют утверждения 2 – 4 леммы.

Если $B \in L_c^{(m)} \oplus L_{22}$, то $\exp(\mathrm{Ant}(B)) = \exp(-\mathrm{Ant}(B)) = \exp(0) = 1$, откуда $\Psi(B) = A^0 + B$, т. е. сужение отображения Ψ на подпространство $L_c^{(m)} \oplus L_{22}$ является сдвигом на A^0. Наконец, остальные утверждения п. 5 следуют из п. 4.

Лемма доказана.

3. Конечномерный случай. Обозначим через $L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$ множество матриц из ε-окрестности клетки J_1^0, у которых собственное значение имеет максимальную кратность m.

Теорема 1. *Для всех достаточно малых ε справедливы следующие утверждения*:

1. *Жорданова форма произвольной матрицы $A^{(m)} \in L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$ состоит из единственной жордановой клетки размера m, соответствующей собственному значению λ, близкому к λ_1^0, т. е. жорданова клетка устойчива при возмущении, которое сохраняет максимальную кратность собственного значения.*

2. *Подмножество $L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) \subset L^{(m)}$ является аффинным алгебраическим множеством, которое задается следующими условиями*:

$$\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E)\Bigg|_{\lambda = \lambda_1^0 + Sp(B^{(m)})/m} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-2. \tag{7}$$

3. *Подмножество $L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) \subset L^{(m)}$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$\operatorname{co}\dim L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) = m - 1. \tag{8}$$

4. *Касательное пространство $T_{J_1^0} L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$ состоит из матриц $\Xi^{(m)}$ вида*

$$\Xi^{(m)} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1} & \ldots & \xi_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & & & & \xi_{ij} \\ d_1 & \ldots & & & \\ c_1 & d_2 & \ldots & & \\ b_1 & c_2 & d_3 & \ldots & \\ a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \ldots \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где на главной диагонали и выше стоят произвольные элементы ξ_{ij}, $i \le j$, а нижнедиагональные элементы ξ_{ij}, $i > j$, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &a_1 = 0, \\ &b_1 + b_2 = 0, \\ &c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ &d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. Пусть J — жорданова форма матрицы $A^{(m)} \in L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$, а λ — ее собственное значение. Для доказательства первого утверждения теоремы необходимо и достаточно показать, что

$$\operatorname{rank}(J - \lambda E)^{(m-1)} = 1$$

(если жордановых клеток две или более, то $\operatorname{rank}(J - \lambda E)^{(m-1)} = 0$). Поскольку

$$\operatorname{rank}(J - \lambda E)^{(m-1)} = \operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{(m-1)},$$

то достаточно убедиться в том, что $\operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{(m-1)} = 1$. Матрица $A^{(m)} \in$ $\in L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$, значит, $A^{(m)} = J_1^0 + B^{(m)}$, где $B^{(m)}$ — малая матрица. Поэтому

$$A^{(m)} - \lambda E = (J_1^0 - \lambda^0 E) + (B^{(m)} + (\lambda^0 - \lambda)E),$$

следовательно,

$$\operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{m-1} = \operatorname{rank}\Big((J_1^0 - \lambda^0 E) + (B^{(m)} + (\lambda^0 - \lambda)E)\Big)^{m-1}.$$

В силу малости матрицы $B^{(m)}$ и возмущения $|\lambda - \lambda_0|$ получаем

$$\operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{m-1} \geq \operatorname{rank}(J_1^0 - \lambda^0 E)^{m-1}.$$

Поскольку матрица J_1^0 представляет собой жорданову клетку, соответствующую m-кратному собственному значению, то $\operatorname{rank}(J_1^0 - \lambda^0 E)^{(m-1)} = 1$. Поэтому $\operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{m-1} \geq 1$.

С другой стороны, так как собственное значение λ матрицы $A^{(m)}$ имеет максимальную кратность m, то $\operatorname{rank}(J - \lambda E)^{(m-1)}$ может быть равен либо 1, либо 0. Значит, $\operatorname{rank}(J - \lambda E)^{(m-1)} = \operatorname{rank}(A^{(m)} - \lambda E)^{(m-1)} = 1$, т. е. собственному значению λ, близкому к λ^0, соответствует одна клетка Жордана.

Докажем второе утверждение. Из определения кратности собственного значения следует, что матрица $A^{(m)} = J_1^0 + B^{(m)} \in L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$ имеет собственное значение λ кратности m (близкое к λ_0^1) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^{m-2}}{\partial\lambda^{m-2}}\det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E) = 0,\\
&\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

В условиях (11) можно исключить параметр λ. Для этого перепишем последнее из условий следующим образом:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\big((\lambda_0 - \lambda)^m + b_{11}((\lambda_0 - \lambda)^{m-1}) + \ldots + b_{mm}((\lambda_0 - \lambda)^{m-1}) + P(\lambda)\big) = 0,$$

где $P(\lambda)$ — полином степени $m - 2$. Вычисляя производную, получаем

$$m!(\lambda_0-\lambda)+(m-1)!b_{11}+\ldots+(m-1)!b_{mm}=0.$$

Следовательно,

$$\lambda=\lambda_0+\frac{Sp(B^{(m)})}{m}. \qquad (12)$$

Подставив полученное значение λ в (11), получим условия (7) в количестве $m-1$, которые являются алгебраическими.

Покажем, что условия (7) линейно независимы. Элементы матрицы $B^{(m)}$ обозначим через $b_{ij},\ i,j=1,2,\ldots,m$. Чтобы проверить линейную независимость уравнений (7), достаточно доказать, что частные производные

$$d_k:=\frac{\partial}{\partial b_{m-k,1}}\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\det(J_1^0+B^{(m)}-\lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda_0+\frac{Sp(B^{(m)})}{m}}\right)\Bigg|_{b_{ij}=0}, \qquad (13)$$

$$k=0,1,\ldots,m-2,$$

не равны нулю. Поскольку

$$J_1^0+B^{(m)}-\lambda E=\begin{pmatrix} b_{11}+\lambda_0-\lambda & b_{12}+1 & \ldots & b_{1m}\\ b_{12} & b_{22}+\lambda_0-\lambda & \ldots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm}+\lambda_0-\lambda\end{pmatrix},$$

то в силу формулы (12) собственное значение λ не зависит от нижнедиагональных элементов $b_{m-k,1}$, $k=0,1,\ldots,m-2$. Поэтому в выражениях (13) можно поменять порядок дифференцирования. После дифференцирования по переменной $b_{m-k,1}$, $k=0,1,\ldots,m-2$, выражение (13) принимает вид

$$d_k=(-1)^{m-k+1}\times$$

$$\times\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\det\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \quad 0 & & & & \\ \lambda_0-\lambda & 1 & \ldots & 0 \quad 0 & & 0 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0-\lambda \quad 1 & & & & \\ \hline & & & & \lambda_0-\lambda & 1 & \ldots & 0 \quad 0\\ & 0 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0-\lambda \quad 1\\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 0 \quad \lambda_0-\lambda \end{array}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Теперь очевидно, что

$$d_k=(-1)^{m-k+1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^k\Big|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=(-1)^{m-k+1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^k\Big|_{\lambda=\lambda_0}=(-1)^{m-k+1}\cdot(-1)k!=(-1)^{m-k}k!\neq 0$$

для любых $k = 0, \ldots, m-2$. Независимость условий (7) доказана. Отсюда следует, что подмножество $L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m)$ является аналитическим подмногообразием, коразмерность которого вычисляется по формуле (8).

Докажем последнее утверждение. По определению, касательное пространство $T_{J_1^0} L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, , m)$ — это ядро линеаризованного по $B^{(m)}$ условия (7), т. е. это множество матриц $\Xi^{(m)} = (\xi_{ij})$, элементы которых удовлетворяют системе

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Bigg|_{B^{(m)}=0} \cdot \xi_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Bigg|_{B^{(m)}=0} \cdot \xi_{ij} = 0, \tag{14}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\frac{\partial^{m-2}}{\partial \lambda^{m-2}} \det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Bigg|_{B^{(m)}=0} \cdot \xi_{ij} = 0.$$

Покажем, что в первом уравнении из (14) все производные, кроме производной по b_{m1}, равны нулю; во втором уравнении все производные, кроме производных по переменным $b_{m-1,1}$ и $b_{m,2}$, равны нулю, а производные по $b_{m-1,1}$ и $b_{m,2}$ отличны от нуля и совпадают и т. д. Точнее, покажем, что в k-м, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, уравнении системы (14) коэффициент $c_{m-i,j}$ при элементе $\xi_{m-i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, равен

$$c_{m-i,j} :=$$

$$:= \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Bigg|_{B^{(m)}=0} = (-1)^k k! \tag{15}$$

при $k = i + j - 1$, $m - i > j$, и

$$c_{m-i,j} := \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Bigg|_{B^{(m)}=0} = 0 \tag{16}$$

в остальных случаях ($\{k = i+j-1$ и $m-i \leq j\}$ или $\{k \neq i+j-1\}$). Докажем равенство (15). В силу (12), собственное значение λ зависит только от диагональных элементов матрицы $B^{(m)}$. Поэтому при $m - i > j$ в определении коэффициента $c_{m-i,j}$ мы вправе поменять порядок дифференцирования. При условии $B^{(m)} = 0$ производная определителя $\det\left(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E\right)$ есть определитель матрицы, у которой в $(m-i)$-й строке стоят только нулевые элементы, кроме j-го места, где находится единица. Расписав полученный определитель по элементам $(m-i)$-й строки, получим

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} \begin{vmatrix} (\lambda_0-\lambda)E_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m-i-j} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_0-\lambda)E_i \end{vmatrix},$$

где E_p — единичная матрица размера $p \times p$. Таким образом,

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} \det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^{j-1} \cdot 1 \cdot (\lambda_0-\lambda)^i\Big|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^{j+i-1}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^k\Big|_{\lambda=\lambda_0} = (-1)^k \cdot k!,$$

что доказывает (15).

Повторяя предыдущие рассуждения для нижнедиагональных элементов $b_{m-i,j}$, $m-i > j$, при условии $k \neq i+j-1$ получаем

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^{j+i-1}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда производные берутся по верхнедиагональным элементам $b_{m-i,j}$, $m-i < j$. Учитывая (12) и то обстоятельство, что производные в (16) берутся только по переменной $b_{m-i,j}$ в точке $b_{m-i,j} = 0$, коэффициент $c_{m-i,j}$ можно записать следующим образом:

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda)^m\Big|_{\lambda=\lambda_0} \right)\Big|_{B^{(m)}=0} = 0.$$

Осталось доказать равенство (16) для случая диагональных элементов b_{jj}, $m-$ $-i=j$, т. е. что

$$c_{jj} = \frac{\partial}{\partial b_{jj}} \left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} \det(J_1^0 + B^{(m)} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Big|_{B^{(m)}=0} = 0, \quad (17)$$

$$k = 0, \ldots, m-2.$$

Учитывая (12) и тот факт, что частная производная в (17) берется по диагональному элементу матрицы, коэффициент c_{jj} из (17) равен

$$c_{jj} = \frac{\partial}{\partial b_{jj}} \left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(\lambda_0-\lambda+b_{11})\ldots(\lambda_0-\lambda+b_{mm})\Big|_{\lambda=\lambda_0+Sp(B^{(m)})/m} \right)\Big|_{b_{jj}=0}. \quad (18)$$

При взятии частной производной по элементу b_{11} можно считать, что все остальные элементы b_{jj}, $j = 2, 3, \ldots, m$, равны нулю, т. е. левая часть (18) принимает вид

$$c_{11} = \frac{\partial}{\partial b_{11}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda_0 - \lambda + b_{11}) (\lambda_0 - \lambda)^{m-1} \Big|_{\lambda = \lambda_0 - b_{11}/m} \right) \Bigg|_{b_{11}=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_{11}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \big((\lambda_0 - \lambda)^m + b_{11} (\lambda_0 - \lambda)^{m-1} \big) \Big|_{\lambda = \lambda_0 - b_{11}/m} \right) \Bigg|_{b_{11}=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_{11}} \left(\frac{m!}{(m-k)!} \left(-\frac{b_{11}}{m} \right)^{m-k} + \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!} \left(-\frac{b_{11}}{m} \right)^{m-k} \right) \Bigg|_{b_{11}=0},$$

что равно нулю для всех $k = 0, 1, \ldots, m-2$.

Аналогичные рассуждения справедливы, если брать частные производные по элементам $b_{22}, b_{33}, \ldots, b_{mm}$.

Теорема 1 доказана.

4. Бесконечномерный случай одного собственного значения. В этом пункте мы сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 2. *Для всех достаточно малых* ε *справедливы следующие утверждения*:

1. *Подмножество* $L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) \subset L_c$ *определяется следующим образом*:

$$L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) = \Psi \left((L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) - J_1^0) \times V_{\varepsilon, m, \lrcorner}(0) \right).$$

2. *Подмножество* $L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) \subset L_c$ *является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$\operatorname{co}\dim L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) = m - 1.$$

3. *Касательное пространство*

$$T_{A^0} L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) = T_{J_1^0} L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) \times L_{\lrcorner},$$

состоит из операторов $\begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix}$, *у которых блоки* Ξ_{12}, Ξ_{21}, Ξ_{22} *произвольные, а блок* Ξ_{11} *имеет вид* (9) *и для него выполняются условия* (10).

Доказательство. Возьмем произвольные малые операторы $B_c^{(m)} \in L_c^{(m)}$, $B_{\lrcorner} \in V_{\varepsilon, m, \lrcorner}(0)$ и применим к их сумме отображение Ψ:

$$A := \Psi(B^{(m)} + B_{\lrcorner}) = \exp\,(\operatorname{Ant}(B_{\lrcorner}))(J_1^0 + B^{(m)} + \operatorname{Diag}(B_{\lrcorner}))\exp\,(-\operatorname{Ant}(B_{\lrcorner})).$$

Теперь доказательство пунктов 1, 2 теоремы непосредственно следует из свойств 1, 2 отображения Ψ (см. лемму) и п. 3 теоремы 1.

Из п. 4 леммы следует, что

$$T_{A^0} L_c(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) = D\Psi(0) T_0((L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) - J_1^0) \times V_{\varepsilon, m, \lrcorner}) =$$

$$= T_{J_1^0} L^{(m)}(J_1^0, \varepsilon, m) \times L_{\lrcorner}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что теорема 2 справедлива для пространства L_n комплексных матриц порядка n $(n \geq m)$. Нетрудно убедиться, что подмногообразие матриц $L_n(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m) \subset L_n$ является трансверсальным к описанному В. И. Арнольдом *миниверсальному семейству* матриц [5]. При этом касательные пространства подмногообразия $L_n(A^0, \varepsilon, \lambda_1^0, m)$ и миниверсального семейства пересекаются по одномерному подпространству скалярных матриц.

5. Случай нескольких собственных значений. Пусть у компактного оператора A^0 собственные значения $\lambda_i^0 \neq 0$ кратностей m_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, не равны между собой и не совпадают с остальными собственными значениями. Будем исследовать подмножество $L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s)) \subset L_c$ компактных операторов $A \in V_\varepsilon(A^0)$, у которых собственные значения λ_i, близкие к λ_i^0, имеет ту же кратность m_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Будем использовать обозначения, аналогичные введенным в п. 1. Во-первых, обозначим через $\overline{m} := (m_1, \ldots, m_s)$ вектор с указанными натуральными координатами. Во-вторых, инвариантные подпространства, соответствующие выделенным собственным значениям, и дополняющее их подпространство порождают блочное представление произвольного оператора

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & B_{12,s} \\ & & \ddots & & \\ & & & B_s & \\ & B_{21,s} & & & B_{s+1} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\mathrm{Diag}_s(B) := \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & B_s & \\ & 0 & & & B_{s+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Ant}_s(B) := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & B_{12,s} \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & -B_{21,s} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $V_{\varepsilon,\overline{m},\lrcorner}(0) \subset L_c$ ε-окрестность нуля, состоящую из операторов вида

$$B_{\lrcorner,s} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & B_{12,s} \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & B_{21,s} & & & B_{s+1} \end{pmatrix}.$$

Наконец, введем в рассмотрение отображение

$$\Psi_s\colon L_c \to L_c,\ \Psi_s(B) := \exp\left(\mathrm{Ant}_s(B)\right)(A^0 + \mathrm{Diag}_s(B))\exp\left(-\mathrm{Ant}_s(B)\right).$$

Для отображения Ψ_s справедливы утверждения, аналогичные утверждениям леммы из п. 2.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для всех достаточно малых ε справедливы следующие утверждения:*

1. *Подмножество $L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s))$ определяется следующим образом*:

$$L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s)) =$$

$$= \Psi_s\left((L^{(m_1)}(J_1^0, \varepsilon, m_1) - J_1^0) \times \ldots \times (L^{(m_s)}(J_s^0, \varepsilon, m_s) - J_s^0) \times V_{\varepsilon,\overline{m},\lrcorner}(0)\right).$$

2. *Подмножество $L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s)) \subset L_c$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$\mathrm{co}\dim L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s)) =$$

$$= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_s - 1) = m - s,$$

где $m = m_1 + \ldots + m_s$.

3. *Касательное пространство $T_{A^0} L_c(A^0, \varepsilon, (\lambda_1^0, m_1), (\lambda_2^0, m_2), \ldots, (\lambda_s^0, m_s))$ состоит из операторов*

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_1 & & & & \\ & \Xi_2 & & & \Xi_{12,s} \\ & & \ddots & & \\ & & & \Xi_s & \\ & \Xi_{21,s} & & & \Xi_{s+1} \end{pmatrix},$$

в которых блоки $\Xi_{12,s}$, $\Xi_{21,s}$, Ξ_{s+1} произвольные, а блоки Ξ_i размерностей m_i имеют свойство (9) *для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

1. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Дрофа, 2004. – 385 с.
2. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplasian and boundary perturbation I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – **54**, № 4.– P. 87 – 91.
3. *Dymarskii Ya. M.* Manifold method in the eigenvector theory of nonlinear operators // J. Math. Sci. – 2008. – **154**, № 5.– P. 655 – 815.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве – М.: Наука, 1970. – 535 с.
5. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, вып. 2 (158). – С. 101 – 114.

Получено 24.01.11