УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КАНОНІЧНА ФОРМА ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ МАТРИЧНОЇ В'ЯЗКИ З НЕВИРОДЖЕНОЮ ПЕРШОЮ МАТРИЦЕЮ

Polynomial matrices $A(x)$ and $B(x)$ of size $n \times n$ over a field $\mathbb{F}$ are called semiscalar equivalent if there exist a nonsingular $n \times n$ matrix P over $\mathbb{F}$ and an invertible $n \times n$ matrix $Q(x)$ over $\mathbb{F}[x]$ such that $A(x) = PB(x)Q(x)$. We give a canonical form with respect to the semiscalar equivalence for a matrix pencil $A(x) = A_0x - A_1$, where A_0 and A_1 are $n \times n$ matrices over $\mathbb{F}$, and A_0 is nonsingular.

Многочленные $(n \times n)$-матрицы $A(x)$ и $B(x)$ над полем $\mathbb{F}$ называются полускалярно эквивалентными, если существуют неособенная $(n \times n)$-матрица P над $\mathbb{F}$ и обратимая $(n \times n)$-матрица $Q(x)$ над $\mathbb{F}[x]$ такие, что $A(x) = PB(x)Q(x)$. Приведена каноническая форма относительно полускалярной эквивалентности для матричного пучка $A(x) = A_0x - A_1$, где A_0 и A_1 — $(n \times n)$-матрицы над полем $\mathbb{F}$ и A_0 — неособенная матрица.

Вступ. Нехай $M_{n,n}(\mathbb{F})$ і $M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ — кільця $(n \times n)$-матриць над полем $\mathbb{F}$ і кільцем многочленів $\mathbb{F}[x]$ відповідно. Далі через I_n позначатимемо одиничну $(n \times n)$-матрицю, а через $0_{k,m}$ — нульову $(k \times m)$-матрицю.

Унітальному многочлену $a(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{F}[x]$ поставимо у відповідність клітину Фробеніуса (приєднану матрицю)

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$$

та многочленну $(n \times n)$-матрицю

$$H_a(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & a(x) \end{bmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x]).$$

Легко бачити, що $\Psi_a(x) = I_nx - \Psi_a$ і $H_a(x)$ — еквівалентні матриці з формою Сміта $S(x) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, a(x))$.

Кажуть, що матриці $A(x), B(x) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ напівскалярно еквівалентні [1–3], якщо для них існують неособлива $P \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ та оборотна $Q(x) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ матриці такі, що

$$A(x) = PB(x)Q(x).$$

У даній статті досліджується напівскалярна еквівалентність лінійних матричних в'язок над довільним полем. Перший пункт має допоміжний характер. Основні результати викладено в п. 2. Там же доведено, що матриці $I_n x - \Psi_a$ і $H_a(x)$ напівскалярно еквівалентні. На підставі цього встановлено канонічну форму відносно напівскалярної еквівалентності для матричної в'язки $A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливою матрицею A_0.

1. Допоміжні твердження. Нижче опишемо зв'язок між еквівалентністю та напівскалярною еквівалентністю лінійних матричних в'язок.

Лема 1. *Матричні в'язки $A(x) = A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ і $B(x) = B_0x - B_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливими матрицями A_0 і B_0 напівскалярно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони скалярно еквівалентні.*

Доведення. Очевидно, якщо лінійні матричні в'язки $A(x)$ і $B(x)$ скалярно еквівалентні, тобто $A(x) = PB(x)Q$, де $P, Q \in GL(n, \mathbb{F})$, то вони напівскалярно еквівалентні.

Навпаки, нехай матричні в'язки $A(x) = A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ і $B(x) = B_0x - B_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливими матрицями A_0 і B_0 напівскалярно еквівалентні, тобто $A(x) = PB(x)Q(x)$, де $P \in GL(n, \mathbb{F})$ і $Q(x) \in GL(n, \mathbb{F}[x])$. Припустимо, що $\deg Q(x) = k \geq 1$. З останньої рівності отримуємо

$$\deg A(x) = \deg(PB(x)) + \deg Q(x). \tag{1}$$

Оскільки A_0, B_0 і P — неособливі матриці, то з рівності (1) отримуємо $\deg Q(x) = 0$, тобто $Q(x) \in GL(n, \mathbb{F})$. Отже, матричні в'язки $A(x)$ і $B(x)$ скалярно еквівалентні.

Лему доведено.

Таким чином, задача про напівскалярну еквівалентність лінійних матричних в'язок $A(x) = A_0x - A_1$ і $B(x) = B_0x - B_1$ з неособливими матрицями A_0 і B_0 є тривіальною. З огляду на викладене вище доведемо наступне твердження.

Лема 2. *Лінійна матрична в'язка $A(x) = A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливою матрицею A_0 скалярно еквівалентна блочно-діагональній матриці $I_n x - \bigoplus_{i=1}^m \Psi_{h_i}$, де Ψ_{h_i} — клітини Фробеніуса, що відповідають елементарним дільникам $h_i(x)$ ненульових степенів матриці $A(x)$. При цьому матриця $I_n x - \bigoplus_{i=1}^m \Psi_{h_i}$ визначена однозначно з точністю до перестановки клітин Ψ_{h_i}.*

Доведення леми 2 випливає з того, що матрична в'язка $A(x) = A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливою матрицею A_0 скалярно еквівалентна в'язці $I_n x - B$, в якій матриця B з точністю до подібності визначається матрицею $\Psi = \bigoplus_{i=1}^m \Psi_{h_i}$ (див., наприклад, [4, с. 150]).

З огляду на лему 1 зауважимо, що пряма сума $I_n x - \bigoplus_{i=1}^m \Psi_{h_i}$ є канонічною формою матричної в'язки $A(x) = A_0x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливою матрицею A_0 як відносно скалярної еквівалентності, так і відносно напівскалярної еквівалентності.

2. Основні результати. Доведення основного результату базується на лемі, яка має і самостійний інтерес.

Лема 3. *Нехай $a(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{F}[x]$ — унітальний многочлен степеня $n \geq 2$. Тоді*:

1) *матриці $\Psi_a(x) = I_n x - \Psi_a$ і $H_a(x)$ напівскалярно еквівалентні*;

2) *матриця $H_a(x)$ елементарними перетвореннями стовпчиків зводиться до унітальної матричної в'язки, тобто $H_a(x)W(x) = I_n x - C$, де $W(x) \in GL(n, \mathbb{F}[x])$.*

Доведення. Розглянемо матриці

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & x & \ldots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{F}[x])$$

і

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{F}).$$

Тоді

$$P_1 \Psi_a(x) Q_1(x) = H_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ x & h_{12}(x) & \ldots & h_{1,n-1}(x) & a(x) \end{bmatrix},$$

де $h_{1k}(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x \in \mathbb{F}[x]$ для всіх $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

Покладемо

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{F}).$$

Легко перевірити, що

$$P_2^{-1} H_1(x) P_2 = H_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & h_{23}(x) & \ldots & h_{2,n-1}(x) & a(x) \end{bmatrix},$$

де $h_{2k}(x) = h_{1k}(x) - a_k x \in \mathbb{F}[x]$ для всіх $k = 3, 4, \ldots, n-1$.

Тепер матрицю $H_2(x)$ запишемо у вигляді

$$H_2(x) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & H_3(x) & \\ x & & & \end{array}\right],$$

де

$$H_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ x^2 & h_{23}(x) & \cdots & h_{2,n-2}(x) & h_{2,n-1}(x) & a(x) \end{bmatrix} \in$$

$$\in M_{n-1,n-1}(\mathbb{F}[x]).$$

Проводячи над матрицею $H_3(x)$ операції, аналогічні таким, як і над матрицею $H_1(x)$, отримуємо

$$P_3^{-1} H_3(x) P_3 = H_4(x) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & H_5(x) & \\ x^2 & & & \end{array}\right],$$

де

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(n-1, \mathbb{F}),$$

$$H_5(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & h_{34}(x) & \dots & h_{3,n-1}(x) & a(x) \end{bmatrix} \in M_{n-2,n-2}(\mathbb{F}[x])$$

і $h_{3k}(x) = h_{2k}(x) - a_k x^2$ для всіх $k = 4, 5, \ldots, n-1$.

Продовжуючи ці міркування далі, через скінченне число кроків переконуємося, що для матриці $\Psi_a(x) = I_n x - \Psi_a$ існують матриці $P \in GL(n, \mathbb{F})$ і $Q(x) \in \in GL(n, \mathbb{F}[x])$ такі, що

$$P\Psi_a(x)Q(x) = H_a(x). \tag{2}$$

Очевидно, що матриця $H_a(x)$ визначена однозначно для матриці $\Psi_a(x) = I_n x - \Psi_a$ відносно перетворень напівскалярної еквівалентності, тобто $H_a(x)$ є канонічною формою відносно цих перетворень для матриці $\Psi_a(x)$.

Із рівності (2) випливає $P\Psi_a(x) = H_a(x)Q^{-1}(x)$. Звідси отримуємо

$$P\Psi_a(x)P^{-1} = H_a(x)W(x) = I_n x - C,$$

де $C = P\Psi_a P^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ і $W(x) = Q^{-1}(x)P^{-1} \in GL(n, \mathbb{F}[x])$.

Лему доведено.

Тепер встановимо канонічну форму відносно перетворень напівскалярної еквівалентності для матричної в'язки $A(x) = A_0 x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$ з неособливою матрицею A_0.

Теорема 1. *Нехай унітальні многочлени $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)$ належать $\mathbb{F}[x]$, $\deg h_i(x) = k_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — елементарні дільники матричної в'язки $A(x) = A_0 x - A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$. Якщо матриця A_0 неособлива, то матрична в'язка $A(x)$ напівскалярно еквівалентна блочно-діагональній $(n \times n)$-матриці*

$$H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \ldots & x^{k_i - 1} & h_i(x) \end{bmatrix},$$

тобто $PA(x)Q(x) = H_A(x)$, де $P \in GL(n, \mathbb{F})$ і $Q(x) \in GL(n, \mathbb{F}[x])$. При цьому матриця $H_A(x)$ визначена однозначно з точністю до перестановки блоків $H_{h_i}(x)$.

Доведення. Оскільки $\det A_0 \neq 0$, то на підставі леми 2 для матриці $A(x) = = A_0 x - A_1$ існують матриці $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$ такі, що

$$UA(x)V = \begin{bmatrix} \Psi_{h_1}(x) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \Psi_{h_2}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \Psi_{h_m} \end{bmatrix},$$

де $\Psi_{h_i}(x) = I_{k_i} x - \Psi_{h_i} \in M_{k_i, k_i}(\mathbb{F})$. Згідно з лемою 3, матриці $\Psi_{h_i}(x) = I_{k_i} x - \Psi_{h_i}$ і $H_{h_i}(x)$ напівскалярно еквівалентні, тобто існують матриці $P_i \in GL(k_i, \mathbb{F})$ і $Q_i(x) \in \in GL(k_i, \mathbb{F}[x])$ такі, що

$$P_i \Psi_{k_i}(x) Q_i(x) = H_{h_i}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тепер легко переконатися в тому, що для матриць

$$P = \mathrm{diag}\big(P_1,\ P_2,\ \ldots\ ,\ P_m\big)U \in GL(n, \mathbb{F})$$

і

$$Q(x) = A_0^{-1}U^{-1}\mathrm{diag}\big(Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots\ ,\ Q_m(x)\big) \in GL(n, \mathbb{F}[x])$$

справджується рівність

$$PA(x)Q(x) = H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \ldots & x^{k_i-1} & h_i(x) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що матриця $H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{m} H_{h_i}(x)$ визначена однозначно з точністю до перестановки діагональних блоків.

Теорему доведено.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61 – 66.
3. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra and Appl. – 1999. – **291**. – P. 167 – 184.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

Одержано 07.10.10,
після доопрацювання — 01.07.11