УДК 517.98

Ю. В. Ільченко, А. В. Чайковський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З УЗАГАЛЬНЕНИМ СИЛЬНО ПОЗИТИВНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

The concept of strongly positive operator is generalized, and properties of the operators introduced are analyzed. The solutions of the Cauchy problem for a linear inhomogeneous differential equation with generalized strongly positive operator coefficient are found.

Обобщено понятие сильно позитивного оператора, исследованы свойства введенных операторов. Получены решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с обобщенным сильно позитивным операторным коэффициентом.

1. Вступ та постановка задачі. Протягом багатьох десятиріч активно розвивається теорія напівгруп, породжених необмеженими операторами. Фундаментальні результати наведено, наприклад, у роботах [1 – 4]. Зокрема, активно вивчався клас секторіальних (сильно позитивних) операторів. Його узагальненнями є класи сильно P-позитивних операторів [5] та клас необмежених операторів (f_S, f_R)-типу, який введено в статті [6]. У цій роботі показано, що для операторної експоненти, породженої оператором (f_S, f_R)-типу, можливим є ефективне її наближення чисельними методами, що дозволяє активно використовувати розвинену авторами теорію на практиці.

У даній роботі розглянуто і детально досліджено частковий випадок операторів (f_S, f_R)-типу та встановлено достатні умови розв'язності задачі Коші для лінійного диференціального рівняння в абстрактному просторі з відповідним операторним коефіцієнтом. Наведемо потрібні означення.

Нехай $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, A — замкнений лінійний оператор, $A\colon D(A) \to \mathbf{B}$, $D(A)$ скрізь щільна в $\mathbf{B}$.

Означення 1 [5]**.** *Лінійний оператор A називається сильно позитивним, якщо* $\overline{D(A)} = \mathbf{B}$, *його спектр* $\sigma(A)$ *розміщений у секторі* $S(\alpha) = \{re^{i\varphi} \mid 0 < r < +\infty;\ \varphi \in (-\alpha; \alpha)\}$, $\alpha \in (0; \pi/2)$, *а поза сектором для резольвенти виконується оцінка*

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} \leq \frac{M}{1 + |z|}.$$

Нехай тепер Γ — орієнтований проти годинникової стрілки контур, що складається із двох дуг Γ_+ і Γ_- параболи: $y^2 = k(x - x'), k > 0, x'$ — деяка фіксована точка, Γ_+ і Γ_- з'єднано відрізком Γ_0 прямої $x = x_0$. Ω_Γ — область, що розташована зліва при вказаному напрямку обходу контура Γ.

Означення 2 [5]**.** *Лінійний оператор* $A\colon D(A) \to \mathbf{B}$ *називається сильно P-позитивним, якщо* $\overline{D(A)} = \mathbf{B}$, *його спектр* $\sigma(A)$ *розміщений в області* Ω_Γ, *а на* Γ *та поза* Ω_Γ *має місце оцінка*

$$\left\|(zI - A)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} \leq \frac{M}{1 + \sqrt{|z|}}.$$

Нехай f_S, f_R — деякі дійснозначні функції, Γ_S — крива в комплексній площині $z = \xi + i\eta$, визначена рівнянням $\xi = f_S(\eta)$ в координатах ξ, η, $\Omega_{\Gamma_S} := \{z = \xi + i\eta \mid \xi > f_S(\eta)\}$ — область всередині кривої Γ_S.

Означення 3 [6]. *Лінійний оператор $A\colon D(A)\to \mathbf{B}$ називається оператором (f_S, f_R)-типу, якщо $\overline{D(A)} = \mathbf{B}$, його спектр $\sigma(A)$ розміщений в області Ω_{Γ_S}, а на $\mathbb{C}\backslash\Omega_{\Gamma_S}$ має місце оцінка*

$$\|(zI-A)^{-1}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} \le f_R(z).$$

Властивості сильно P-позитивних (або секторіальних) операторів детально викладено, наприклад, у роботах [4, 7]. У статті [5] показано, що за умови сильної P-позитивності оператора A послаблений розв'язок задачі Коші

$$\dot{u} + Au = 0, \quad t\in(0;T], \quad u(0) = u_0,$$

де $u\colon [0;+\infty)\to\mathbf{B}$ — вектор-функція, можна подати у вигляді

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-zt}(z-A)^{-1}u_0 dz,$$

якщо $u_0\in D(A^{\varepsilon})$ для довільного $\varepsilon > \dfrac{1}{2}$.

У роботі [8] побудовано розв'язок неоднорідної задачі Коші з операторним коефіцієнтом, спектр якого належить сектору, а резольвента при $\lambda\to+\infty$ оцінюється деякою функцією G.

Тепер розглянемо частковий випадок операторів (f_S, f_R)-типу. Введемо до розгляду контур $\Gamma_{\beta,a} = \left\{z=(x,y) \mid |y| = ax^{\beta}\right\}$, при $a > 0$, $\beta\ge 1$ орієнтований проти годинникової стрілки, $\Omega_{\beta,a}$ — область, що розташована зліва при вказаному напрямку обходу $\Gamma_{\beta,a}$.

Означення 4. *Лінійний оператор $A\colon D(A)\to\mathbf{B}$ назвемо (α,β)-степеневим, де $\alpha\in(0;1]$, $\beta\ge 1$, якщо $\overline{D(A)} = \mathbf{B}$, при деякому $a>0$ його спектр $\sigma(A)$ розміщений в області $\Omega_{\beta,a}$ і виконується оцінка*

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\Omega_{\beta,a}\colon\ \|(zI-A)^{-1}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} \le \frac{M}{1+|z|^{\alpha}}.$$

Далі розв'яжемо задачу Коші, розв'язок якої розумітимемо таким чином.

Означення 5. *Нехай функція $f\colon(0;R)\to\mathbf{B}$, $x_0\in\mathbf{B}$. Розв'язком задачі Коші*

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad t\in(0;R), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

назвемо функцію $x\colon[0;R)\to D(A)$, яка неперервна на $[0;R)$, диференційовна на $(0;R)$ і задовольняє рівняння та початкову умову.

2. Введення поняття операторної експоненти. Нехай A — (α,β)-степеневий оператор, $\Gamma_{\beta,a}$ — контур з означення 4, $R_z(A) := (A-zI)^{-1}$. Покладемо

$$e^{-At} := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} e^{-tz}R_z(A)dz. \tag{2}$$

Тут і далі всі інтеграли будемо розуміти як інтеграли Рімана (власні чи невласні).

Лема 1. *Нехай A — (α,β)-степеневий оператор. Тоді мають місце наступні твердження*:

1) *інтеграл* (2) *абсолютно збіжний і виконується оцінка*

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall t \in (0;1]: \qquad \|e^{-At}\| \leq \frac{C_1}{t^{\beta(1-\alpha)}};$$

2) *існують сталі* $C_2 > 0$ *і* $\varepsilon > 0$ *такі, що для будь-якого* $t > 1$ $\|e^{-At}\| \leq \leq C_2 e^{-\varepsilon t}$.

Доведення. 1. Доведення першої частини леми при малих t будемо проводити, використовуючи видозмінений контур інтегрування. Нехай $\gamma < 0$ довільне, $x_0 = t^\gamma$, новий контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, де Γ_2 — дуга кола радіуса r_0 з центром у початку координат, що обходить початок координат проти годинникової стрілки від точки $(x_0; ax_0^\beta)$ до точки $(x_0; -ax_0^\beta)$, Γ_1 і Γ_3 — верхня і нижня дуги степеневої функції $|y| = ax^\beta$ відповідно (від ∞ до точки $(x_0; ax_0^\beta)$ на дузі та від точки $(x_0; -ax_0^\beta)$ до ∞). Враховуючи аналітичність підінтегральної функції, в (2) можна замінити $\Gamma_{\beta,a}$ на Γ.

Нехай

$$r_0 := \sqrt{x_0^2 + a^2 x_0^{2\beta}}, \qquad \varphi_0 := \operatorname{arctg}(a x_0^{\beta-1}).$$

Тоді

$$\|e^{-At}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_\Gamma e^{-tz} R_z(A) dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Gamma_k} |e^{-tz}| \|R_z(A)\| |dz| =: \sum_{k=1}^{3} I_k.$$

а) Спочатку знайдемо оцінки для інтеграла по контуру Γ_2. Виконаємо в I_2 заміну $z = r_0 \cos\varphi + i r_0 \sin\varphi$. Тоді

$$|z|^\alpha = (x_0^2 + a^2 x_0^{2\beta})^{\alpha/2} = r_0^\alpha, \qquad |dz| = |(-r_0 \sin\varphi + i r_0 \cos\varphi)| d\varphi = r_0 d\varphi.$$

Звідси маємо

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} e^{-tr_0 \cos\varphi} \frac{Mr_0}{1 + r_0^\alpha} d\varphi \leq \frac{Mr_0}{1 + r_0^\alpha} \sup_{\varphi \in [\varphi_0; 2\pi - \varphi_0]} e^{-tr_0 \cos\varphi} \leq \frac{Mr_0 e^{tr_0}}{1 + r_0^\alpha}.$$

Враховуючи, що $r_0 \leq (1+a) x_0^\beta = (1+a) t^{\gamma\beta}$, встановлюємо

$$\exists C_3 > 0 \quad \forall t \in (0;1]: \ I_2 \leq C_3 e^{(1+a)t^{\gamma\beta+1}} t^{\gamma\beta(1-\alpha)}.$$

При $\gamma < -\dfrac{1}{\beta}$ ця оцінка не є ефективною при малих t, тому будемо вважати, що $\gamma \geq -\dfrac{1}{\beta}$. Тоді

$$\forall t \in (0;1]: \ I_2 \leq \frac{C_3 e}{t^{-\gamma\beta(1-\alpha)}} \leq \frac{C_3 e}{t^{\beta(1-\alpha)}}. \tag{3}$$

б) Знайдемо тепер оцінку для інтеграла по контуру Γ_1 (для Γ_3 аналогічно) при $\gamma = -1$.

Покладемо

$$g(x) := \frac{\sqrt{1 + a^2 \beta^2 x^{2\beta-2}}}{1 + (x^2 + a^2 x^{2\beta})^{\alpha/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$\forall x \geq 1\colon\ g(x) \leq \frac{1 + a\beta x^{\beta-1}}{a^{\alpha} x^{\beta\alpha}}, \tag{4}$$

то, виконавши заміну $z = x + iax^{\beta}$, отримаємо

$$I_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t^{-1}}^{+\infty} e^{-tx} M \frac{\sqrt{1 + a^2\beta^2 x^{2\beta-2}}}{1 + (x^2 + a^2 x^{2\beta})^{\alpha/2}} dx \leq$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \int\limits_{t^{-1}}^{+\infty} e^{-tx} a^{1-\alpha} \beta x^{\beta-\alpha\beta-1} dx + \frac{M}{2\pi} \int\limits_{t^{-1}}^{+\infty} e^{-tx} a^{-\alpha} x^{-\alpha\beta} dx =$$

$$= |w = tx| = \frac{Ma^{1-\alpha}\beta}{2\pi t^{\beta-\alpha\beta}} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-w} w^{\beta-\alpha\beta-1} dw +$$

$$+ \frac{Ma^{-\alpha}}{2\pi t^{1-\alpha\beta}} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-w} w^{-\alpha\beta} dw \leq \frac{C_4}{t^{\beta-\alpha\beta}},$$

де

$$C_4 = \frac{Ma^{1-\alpha}\beta}{2\pi} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-w} w^{\beta-\alpha\beta-1} dw + \frac{Ma^{-\alpha}}{2\pi} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-w} w^{-\alpha\beta} dw,$$

тобто

$$\exists C_4 > 0 \quad \forall t \in (0;1]\colon\ I_1 \leqslant \frac{C_4}{t^{\beta-\alpha\beta}}.$$

Отже, з останнього співвідношення та нерівності (3) випливає твердження п. 1 леми.

2. Якщо розглядати $t \geq 1$, то оцінку для норми експоненти можна отримати не видозмінюючи контур:

$$\|e^{-At}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} e^{-tz} R_z(A) dz \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} |e^{-tz}| \|R_z(A)\| |dz| \leq \frac{M}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-tx} g(x) dx.$$

Враховуючи (4) та оцінку

$$\forall x \in (0;1]\colon\ g(x) \leq 1 + a\beta x^{\beta-1},$$

знаходимо

$$\|e^{-At}\| \leq \frac{M}{\pi} \left(\int\limits_{0}^{1} (1 + a\beta x^{\beta-1}) e^{-tx} dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-tx} \frac{1 + a\beta x^{\beta-1}}{a^{\alpha} x^{\alpha\beta}} dx \right) \leq |w = tx| \leq$$

$$\leq \frac{M}{\pi}\left((1+a\beta)t^{-1}+\frac{t^{\alpha\beta-1}}{a^{\alpha}}\int\limits_{t}^{+\infty}e^{-w}w^{-\alpha\beta}dw+\frac{a^{1-\alpha}\beta}{t^{\beta(1-\alpha)}}\int\limits_{t}^{+\infty}e^{-w}w^{\beta-1-\alpha\beta}dw\right)\leq$$

$$\leq \frac{M}{\pi}\left((1+a\beta)t^{-1}+\frac{e^{-t}}{a^{\alpha}t}+\frac{a^{1-\alpha}\beta e^{-t}}{t}\right)\leq\frac{M}{\pi}\left(1+a\beta+\frac{1}{a^{\alpha}}+\beta a^{1-\alpha}\right). \qquad (5)$$

Другий пункт леми випливає з (5). Дійсно, якщо виконуються умови означення 3, то існують $\varepsilon > 0$ та $a_1 > a$ такі, що умови означення 3 виконуються для оператора $A-\varepsilon I$ з заміною a на a_1. Тому, застосувавши оцінку (5) до оператора $A-\varepsilon I$, отримаємо

$$\|e^{-At}\| = e^{-\varepsilon t}\|e^{-(A-\varepsilon I)t}\| \leq C_2 e^{-\varepsilon t}, \quad t\geq 1.$$

3. Властивості операторної експоненти.

Теорема 1. *Нехай A — (α,β)-степеневий оператор. Тоді*

$$\begin{gathered}\forall x\in\mathbf{B}\quad \forall t>0\colon\ e^{-At}x\in D(A),\\ \exists K>0\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall t>0\colon\ \|Ae^{-At}\|\leq\frac{Ke^{-\varepsilon t}}{t^{2\beta-\alpha\beta}}.\end{gathered} \qquad (6)$$

Доведення. Покажемо, що $Ae^{-At}=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{\beta,a}}ze^{-zt}R_z(A)dz$, де $\Gamma_{\beta,a}$ — контур з означення 4. Маємо

$$\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}ze^{-zt}R_z(A)dz=\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}ze^{-zt}R_z(A)dz+\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}(A-zI)e^{-zt}R_z(A)dz=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}Ae^{-zt}R_z(A)dz=A\left(\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}e^{-zt}R_z(A)dz\right)=-2\pi iAe^{-At},$$

де використано те, що $\displaystyle\int_{\Gamma_{\beta,a}}(A-zI)e^{-zt}R_z(A)dz=\int_{\Gamma_{\beta,a}}e^{-zt}Idz=O$ як інтеграл від аналітичної функції. Тому

$$\|Ae^{-At}\|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}}|z||e^{-tz}|\|R_z(A)\||dz|\leq$$

$$\leq\left|z=x\pm iax^{\beta},\ dz=(1\pm i\beta ax^{\beta-1})dx\right|\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-tx}h(x)dx,$$

де

$$h(x):=\frac{\sqrt{x^2+a^2(\beta^2+1)x^{2\beta}+\beta^2a^4x^{4\beta-2}}}{1+(x^2+a^2x^{2\beta})^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

При $x\in[0;1]$

$$h(x) \le \sqrt{1 + a^2(\beta^2 + 1) + \beta^2 a^4} =: C_0,$$

а при $x > 1$

$$h(x) \le \frac{C' x^{2\beta - 1}}{x^{\alpha\beta}}, \qquad C' := \frac{\sqrt{1 + a^2(\beta^2 + 1) + \beta^2 a^4}}{a^{\alpha}}.$$

Тоді

$$\|Ae^{-At}\| \le \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^1 C_0 e^{-tx} dx + \int\limits_1^{+\infty} C' e^{-tx} x^{2\beta - \alpha\beta - 1} dx\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{C_0}{t} + \frac{C''}{t^{2\beta - \alpha\beta}}\right),$$

де

$$C'' := C'\Gamma(2\beta - \alpha\beta).$$

Використовуючи міркування з останньої частини доведення леми 1 та враховуючи, що $2\beta - \alpha\beta \ge 1$, отримуємо твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай A — (α, β)-степеневий оператор. Тоді*

$$\forall t > 0\colon\ (e^{-At})' = -Ae^{-At}.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$h(w) = \frac{e^{-w} - 1 + w}{w}.$$

Оскільки $h(w) \to 1$ при $w \to \infty$ і $\operatorname{Re} w > 0$ та $h(w) \to 0$ при $w \to 0$, то $h \in C(\mathbb{C})$, якщо h довизначити за неперервністю в точці 0 і

$$\exists L' > 0 \quad \forall w \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} w > 0\colon\ |h(w)| \le L'.$$

Нехай $\Delta t > 0$. Запишемо таку норму:

$$\left\|\frac{e^{-A(t+\Delta t)} - e^{-At}}{\Delta t} + Ae^{-At}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} \frac{e^{-z(t+\Delta t)} - e^{-zt}}{\Delta t} R_z(A) dz + \int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} z e^{-tz} R_z(A) dz\right\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} e^{-tz}\left(\frac{e^{-z\Delta t} - 1 + z\Delta t}{\Delta t}\right) R_z(A) dz\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} |e^{-tz}|\,|z|\,|h(z\Delta t)|\,\|R_z(A)\|\,|dz|.$$

Застосуємо теорему Лебега про мажоровану збіжність, взявши за мажоранту

$$g(z) := L'|e^{-tz}|\,|z|\,\|R_z(A)\|.$$

Інтеграл $\displaystyle\int_{\Gamma_{\beta,a}} g(z)|dz|$ є збіжним (в доведенні теореми 1 наведено оцінки) та існує границя

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon\; |e^{-tz}||z||h(z\Delta t)|\|R_z(A)\| \to 0, \quad \Delta t \to 0+,$$

тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність маємо збіжність інтеграла до нуля, що й доводить рівність в теоремі.

Випадок $\Delta t < 0$ розглядається аналогічно.

Лема 2. *Нехай A — (α, β)-степеневий оператор. Тоді*

$$A^{-2}\left(\frac{I - e^{-At}}{t} - A\right) \to 0, \quad t \to 0+\,.$$

Доведення. Нехай контури Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 такі, як в лемі 1 при $\gamma = -\dfrac{1}{\beta}$, тобто починаючи з деякої точки $(x_0; ax_0^{\beta})$ гілка степеневої функції переходить у частину кола і $x_0 = t^{\gamma} = t^{-1/\beta}$.

Спочатку покажемо, що

$$A^{-2}e^{-At} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}R_z(A)dz + A^{-2} - A^{-1}t.$$

Використуючи теорію лишків, записуємо

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}R_z(A)dz =$$

$$= \left\{z^{-2}R_z(A) = z^{-1}(z^{-1}A^{-1} + A^{-1}R_z(A))\right\} =$$

$$= -\frac{A^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}dz - \frac{A^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-1}e^{-tz}R_z(A)dz =$$

$$= -\frac{A^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}dz - \frac{A^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{A^{-1}}{z} + A^{-1}R_z(A)\right)e^{-tz}dz =$$

$$= -\frac{A^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}dz - \frac{A^{-2}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-1}e^{-tz}dz - \frac{A^{-2}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_z(A)e^{-tz}dz =$$

$$= A^{-1}t - A^{-2} + A^{-2}e^{-At},$$

звідки отримуємо потрібну рівність. З неї випливає

$$\left\|A^{-2}\left(\frac{I - e^{-At}}{t} - A\right)\right\| = \left\|\frac{t^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}R_z(A)dz\right\|.$$

Розглянемо окремо норму інтеграла, використавши позначення φ_0 з доведення леми 1:

$$\left\|\int\limits_{\Gamma} z^{-2}e^{-tz}R_z(A)dz\right\| \leq \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{|e^{-tz}|}{|z|^2}\|R_z(A)$$

$$|dz| \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{Me^{-tx}\sqrt{1+a^2\beta^2x^{2\beta-2}}}{(x^2+a^2x^{2\beta})\left(1+(x^2+a^2x^{2\beta})^{\alpha/2}\right)}dx+$$

$$+\int\limits_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}\frac{Me^{tr_0}}{\sqrt{t^{-2/\beta}+a^2t^{-2}}\left(1+(t^{-2/\beta}+a^2t^{-2})^{\alpha/2}\right)}d\varphi \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{Me^{-tx}(1+a\beta)x^{\beta-1}}{a^2x^{2\beta}a^{\alpha}x^{\alpha\beta}}dx + \frac{2\pi e^{\sqrt{1+a^2}}M}{a^{\alpha+1}t^{-1-\alpha}} \leq |tx=y| \leq$$

$$\leq 2Ma^{-2-\alpha}(1+\beta a)t^{\alpha\beta+\beta}\int\limits_{t^{1-1/\beta}}^{+\infty}e^{-y}y^{-\beta-\alpha\beta-1}dy + \frac{2\pi e^{\sqrt{1+a^2}}M}{a^{\alpha+1}t^{-1-\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{2Ma^{-1-\alpha}(1+\beta a)t^{1+\alpha}}{\beta+\alpha\beta} + \frac{2\pi e^{\sqrt{1+a^2}}M}{a^{\alpha+1}t^{-1-\alpha}}.$$

Отже,

$$\|t^{-1}(A^{-2}-e^{-At}A^{-2})+A^{-1}\| \leq$$

$$\leq \frac{t^{-1}}{2\pi}\left(\frac{2Ma^{-1-\alpha}(1+\beta a)t^{1+\alpha}}{\beta+\alpha\beta} + \frac{2\pi e^{\sqrt{1+a^2}}M}{a^{\alpha+1}t^{-1-\alpha}}\right) \to 0, \quad t \to 0+,$$

звідки і випливає шукане твердження.

Лема 3. *Нехай A — (α,β)-степеневий оператор. Тоді*:

1) *для будь-якого $b \in \mathbf{B}$ $t^{\beta(1-\alpha)}\left(e^{-At}-I\right)b \to 0$, $t \to 0+$;*

2) *якщо додатково $b \in D(A)$, то*

$$\left(e^{-At}-I\right)b \to 0, t \to 0+ .$$

Доведення. а) Нехай $b \in D(A)$. Тоді, використовуючи контур з доведення леми 1 при $\gamma = -\dfrac{1}{\beta}$, маємо

$$e^{-At}b-b = \left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{-tz}(A-zI)^{-1}dz\right)b + \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{-tz}(-zI)^{-1}dz\right)b =$$

$$= \left\{(A-zI)^{-1}+z^{-1}I = z^{-1}(A-zI)^{-1}A\right\} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-tz} (A - zI)^{-1} z^{-1} dz \right) Ab,$$

звідки

$$\|e^{-At}b - b\| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |e^{-tz}| \frac{1}{|z|} \frac{M}{1 + |z|^{\alpha}} |dz| \, \|Ab\| =$$

$$= \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} e^{-t\sqrt{t^{-2/\beta} + a^2 t^{-2}} \cos\varphi} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \left(1 + (t^{-2/\beta} + a^2 t^{-2})^{\alpha/2}\right)} \|Ab\| +$$

$$+ \frac{M}{\pi} \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sqrt{1 + a^2 \beta^2 y^{2\beta - 2}} dy}{\sqrt{y^2 + a^2 y^{2\beta}} \left(1 + (y^2 + a^2 y^{2\beta})^{\alpha/2}\right)} \|Ab\| \leq$$

$$\leq \frac{Me\|Ab\|}{t^{-\alpha}} + \frac{M\sqrt{1 + a^2\beta^2}}{\pi a} \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{+\infty} e^{-ty} y^{-\alpha\beta - 1} dy \|Ab\| = |u = ty| =$$

$$= \left(\frac{Me}{t^{-\alpha}} + \frac{M\sqrt{1 + a^2\beta^2} t^{\alpha\beta}}{\pi a} \int\limits_{t^{1-1/\beta}}^{+\infty} e^{-u} u^{-\alpha\beta - 1} du \right) \|Ab\|.$$

Оскільки при $\beta > 1$ $\int_{t^{1-1/\beta}}^{+\infty} e^{-y} y^{-\alpha\beta-1} dy \sim \dfrac{1}{\alpha\beta} t^{-\alpha(\beta-1)}$, $t \to 0+$, то

$$\exists M' > 0\colon \; \|e^{-At}b - b\| \leq \left(\frac{Me^{\sqrt{1+a^2}}}{t^{-\alpha}} + \frac{M\beta t^{\alpha\beta}}{\pi a^{\alpha}} \frac{M'}{\alpha\beta} t^{-\alpha(\beta-1)} \right) \|Ab\| =$$

$$= Mt^{\alpha} \left(e^{\sqrt{1+a^2}} + \frac{M'}{\pi a^{\alpha+1}} \right) \|Ab\|,$$

звідки випливає, що

$$\|e^{-At}b - b\| \to 0, \quad t \to 0+.$$

б) Нехай $b \notin D(A)$. З означення випливає, що $D(A)$ скрізь щільна в $\mathbf{B}$. Тому

$$\exists \{b_n \colon n \geq 1\} \subset D(A)\colon \; b_n \to b, \quad n \to \infty.$$

За пунктом а) маємо

$$\forall n \geq 1\colon \; e^{-At} b_n \to b_n, \quad t \to 0+.$$

Враховуючи оцінку для норми операторної експоненти з леми 1, записуємо

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall t \in (0; 1]\colon \; \|e^{-At}\| \leq \frac{C_1}{t^{\beta(1-\alpha)}}.$$

З викладеного вище також маємо

$$\exists n_0 \geq 1 \colon \ \|b_{n_0} - b\| < \frac{\varepsilon}{2C_1},$$

$$\exists t_1 > 0 \quad \forall t \in (0; t_1] \colon \ \|e^{-At} b_{n_0} - b_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2C_1}.$$

Покладемо

$$t_0 := \min\left\{1; t_1; \left(\frac{C_1}{2}\right)^{1/\beta(1-\alpha)}\right\},$$

тоді для кожного $t \in (0; t_0)$ матимемо

$$t^{\beta(1-\alpha)} \|e^{-At} b - b\| \leq$$

$$\leq t^{\beta(1-\alpha)} \left(\|e^{-At} b - e^{-At} b_{n_0}\| + \|e^{-At} b_{n_0} - b_{n_0}\| + \|b_{n_0} - b\|\right) \leq$$

$$\leq t^{\beta(1-\alpha)} \left(\frac{C_1}{t^{\beta(1-\alpha)}} \frac{\varepsilon}{2C_1} + \frac{\varepsilon}{2C_1} + \frac{\varepsilon}{2C_1}\right) \leq \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{t^{\beta(1-\alpha)}}{C_1}\right) < \varepsilon.$$

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай A — (α, β)-степеневий оператор. Тоді*

$$A^{-1} e^{-At} \to A^{-1}, \quad t \to 0+,$$

до того ж

$$\|e^{-At} A^{-1} - A^{-1}\| = O(t^{\alpha}), \quad t \to 0+.$$

Доведення. Нехай Γ — контур, що використовувався при доведенні леми 1, $\gamma = -\dfrac{1}{\beta}$. Розглянемо різницю

$$\|A^{-1} e^{-At} - A^{-1}\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} z^{-1} e^{-tz} R_z(A) dz \right\| \leq \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |z|^{-1} \left|e^{-tz}\right| \frac{|dz|}{1 + |z|^{\alpha}} =$$

$$= \frac{M}{\pi} \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{+\infty} e^{-tx} \frac{(x^2 + a^2 x^{2\beta})^{-1/2} \sqrt{1 + \beta^2 a^2 x^{2\beta - 2}}}{1 + (x^2 + a^2 x^{2\beta})^{\alpha/2}} dx +$$

$$+ \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} e^{-t \cos\varphi \sqrt{t^{-2/\beta} + a^2 t^{-2}}} \frac{(t^{-2/\beta} + a^2 t^{-2})^{-1/2}}{1 + (t^{-2/\beta} + a^2 t^{-2})^{\alpha/2}} d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{M(1 + \beta a)}{\pi} \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{+\infty} e^{-tx} \frac{a^{-1} x^{-\beta} x^{\beta - 1}}{a^{\alpha} x^{\alpha\beta}} dx + \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} e^{\sqrt{1 + a^2}} \frac{a^{-1} t}{a^{\alpha} t^{-\alpha}} d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{M(1 + \beta a) a^{-1-\alpha} \beta}{\pi} \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{+\infty} e^{-tx} x^{-\alpha\beta - 1} dx + \frac{M a^{-1-\alpha} e^{\sqrt{1 + a^2}}}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} t^{\alpha + 1} d\varphi \leq$$

$$\leq |tx = y| \leq \frac{M(1+\beta a)a^{-1-\alpha}\beta}{\pi} \int\limits_{t^{-1/\beta+1}}^{+\infty} e^{-y}\frac{y^{-\beta\alpha-1}}{t^{-\beta\alpha}}dy + Ma^{-\alpha}e^{\sqrt{1+a^2}}t^{\alpha+1} \leq$$

$$\leq K_1Nt^{(1-\beta)\alpha+\beta\alpha} + K_2t^{\alpha} \leq (K_1N+K_2)t^{\alpha},$$

оскільки

$$\int\limits_{t^{-1/\beta+1}}^{+\infty} e^{-y}y^{-\beta\alpha-1}dy \sim N_1t^{\alpha(1-\beta)}, \quad t \to 0+,$$

де

$$N_1 = \frac{1}{\beta\alpha}, \qquad K_1 := \frac{M(1+\beta a)a^{-1-\alpha}\beta}{\pi}; \qquad K_2 := Ma^{-1-\alpha}e^{\sqrt{1+a^2}}.$$

Отже, $\|A^{-1}e^{-At} - A^{-1}\| = O(t^{\alpha})$, $t \to 0+$, а звідси й випливає твердження леми.

4. Розв'язання задачі Коші. Перейдемо до розв'язання задачі Коші, сформульованої в першому пункті.

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай A — (α,β)-степеневий оператор, функція $f\colon [0;R) \to \to D(A)$ має всі похідні до порядку n включно, $n \geq 0$, де $n = [\beta(2-\alpha)] - 1$, і похідна n-го порядку гельдерова з показником $\gamma \in (\beta(2-\alpha) - n - 1; 1]$, тобто*

$$\exists L > 0 \quad \forall s_1, s_2 \in [0;R)\colon \ \|f^{(n)}(s_1) - f^{(n)}(s_2)\| \leq L|s_1 - s_2|^{\gamma}. \tag{7}$$

Тоді функція

$$F(t) := \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds, \quad t \in (0;R), \quad F(0) = \vec{0}, \tag{8}$$

є розв'язком задачі Коші

$$F'(t) := -AF(t) + f(t), \quad t \in (0;R), \quad F(0) = \vec{0}. \tag{9}$$

Доведення. Введемо позначення

$$G(t,s) := f(t) + f'(t)(s-t) + \frac{f''(t)}{2!}(s-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(s-t)^n,$$

$$t, s \in [0;R).$$

Спочатку покажемо, що $F(t) \in D(A), t \in (0;R)$. Для цього запишемо

$$\int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)}f(s)ds =$$

$$= \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)}\left(f(s) - G(t,s)\right)ds + \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)}G(t,s)ds =: J_1(t) + J_2(t).$$

Безпосередньо інтегруванням можна показати, що

$$\forall l \geq 0\colon \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)} \frac{f^{(l)}(t)}{l!}(t-s)^l ds =$$

$$= (-1)^l A^{-l} f^{(l)}(t) - \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^l}{(l-k)!} A^{-k} t^{l-k} e^{-At} f^{(l)}(t). \tag{10}$$

Тому функція $J_2(t)$ визначена для всіх $t \in (0; R)$.

Розглянемо окремо функцію $J_1(t)$. Використовуючи узагальнену теорему Лагранжа [10, с. 555], гельдеровість n-ї похідної функції f та теорему 1, можемо записати

$$\|J_1(t)\| \leq \int\limits_0^t \frac{C'}{\pi} \frac{(t-s)^\gamma (t-s)^n}{(t-s)^{\beta(2-\alpha)}} ds \leq \int\limits_0^t \frac{C'}{\pi} \frac{ds}{(t-s)^{\beta(2-\alpha)-\gamma-n}}.$$

Оскільки за умовою $\gamma \in (\beta(2-\alpha)-n-1; 1]$, то $J_1(t)$ також визначена. Тому маємо

$$F(t) = A^{-1} \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)} f(s) ds, \quad t \in (0, R),$$

отже, $F(t) \in D(A)$, $t \in (0, R)$ і $F(t) = A^{-1}J_1(t) + A^{-1}J_2(t) \to \overline{0}$, $t \to 0+$.

Тепер покажемо, що функція $F(t)$ задовольняє диференціальне рівняння в (9).

Розглядаючи випадок $\Delta t > 0$, записуємо різницю

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} - (-AF(t) + f(t)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int\limits_0^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t - s)} f(s) ds - \frac{1}{\Delta t} \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)} f(s) ds - f(t) =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} \left(\frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A \right) f(s) ds + \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t-s)} f(s) ds - f(t) =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} \left(\frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A \right) (f(s) - G(t,s))\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t - s)} \left(f(s) - G(t+\Delta t, s)\right) ds +$$

$$+\int_0^t e^{-A(t-s)}\left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)G(t,s)ds+$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(e^{-A(t+\Delta t-s)}G(t+\Delta t,s)-f(t)\right)ds=:I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Оцінимо кожен з отриманих інтегралів $I_i, i=\overline{1;4}$.

Функція $h(w):=\dfrac{e^{-w}-1+w}{w}$ при $\operatorname{Re}w>0$ обмежена деякою сталою L' (див. доведення теореми 2). Оскільки

$$I_1=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\int_{\Gamma_{a,\beta}}e^{-z(t-s)}\left(z\frac{e^{-z\Delta t}-1+z\Delta t}{z\Delta t}\right)R_z(A)(f(s)-G(t,s))dzds,$$

то, використовуючи теореми 1 та 2, лему 1, узагальнену теорему Лагранжа, а також гельдеровість n-ї похідної функції f, маємо

$$\|I_1\|\leq-\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{\Gamma_{a,\beta}}|z|\left|e^{-z(t-s)}\right|\left|\frac{e^{-z\Delta t}-1+z\Delta t}{z\Delta t}\right|\frac{ML}{1+|z|^\alpha}|t-s|^{n+\gamma}|dz|ds.$$

Застосуємо теорему Лебега про мажоровану збіжність, обравши за мажоранту функцію

$$g(z,s):=\frac{K_1|z|}{1+|z|^\alpha}\left|e^{-z(t-s)}\right|(t-s)^{n+\gamma}.$$

Скінченність інтеграла $\displaystyle\int\int_{[0;t]\times\Gamma_{a,\beta}}g(z,s)|dz|ds$ випливає з леми 1 та умови теореми.

Оскільки

$$\forall z\in\mathbb{C}:\ \left|\frac{e^{-z\Delta t}-1+z\Delta t}{z\Delta t}\right|\to 0,\quad \Delta t\to 0+,$$

то

$$I_1\to 0,\quad \Delta t\to 0+.$$

Крім того, враховуючи узагальнену теорему Лагранжа і лему 1, отримуємо

$$\|I_2\|\leq\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left\|e^{-A(t+\Delta t-s)}\right\|\|f(s)-G(t+\Delta t,s)\|ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\frac{\overline{C}L(t+\Delta t-s)^{n+\gamma}}{(t+\Delta t-s)^{\beta(1-\alpha)}}ds=$$

$$=\frac{\overline{C}L}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(t+\Delta t-s)^{n+\gamma-\beta(1-\alpha)}ds=$$

$$= \frac{\overline{C}L}{\Delta t}\int\limits_0^{\Delta t} y^{n+\gamma-\beta(1-\alpha)}dy = \frac{\overline{C}L\Delta t^{n+\gamma-\beta(1-\alpha)+1}}{n+\gamma-\beta(1-\alpha)+1}.$$

Виходячи з умови теореми, одержуємо

$$n+\gamma-\beta(1-\alpha) > 0,$$

тому

$$I_2 \to 0, \qquad \Delta t \to 0+.$$

Тепер будемо досліджувати I_3, використовуючи граничне співвідношення з леми 2:

$$I_3 = \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}\left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)f(t)ds+$$

$$+\int\limits_0^t \left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)e^{-A(t-s)}\left(f'(t)(t-s)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(t-s)^n\right)ds =$$

$$= A^{-2}(I-e^{-At})\left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)Af(t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(-1)^l A^{-l-1}\left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)f^{(l)}(t)-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^l}{(l-k)!}A^{-k-2}\left(\frac{e^{-A\Delta t}-I}{\Delta t}+A\right)t^{l-k}Ae^{-At}f^{(l)}(t) \to 0,$$

$$\Delta t \to 0+.$$

Дослідимо поведінку I_4:

$$I_4 = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left(e^{-A(t+\Delta t-s)}f(t+\Delta t)-f(t)\right)ds+$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t-s)}\left(G(t+\Delta t,s)-f(t+\Delta t)\right)ds =$$

$$= A^{-1}\frac{I-e^{-A\Delta t}}{\Delta t}f(t+\Delta t)-f(t)+$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t-s)}\left(G(t+\Delta t,s)-f(t+\Delta t)\right)ds =$$

$$=: J_1' - f(t) + J_2'.$$

Покажемо, що

$$J_1' \to f(t), \qquad \Delta t \to 0+. \tag{11}$$

Маємо

$$J_1' = A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)(f(t+\Delta t) - f(t) + f(t)) =$$

$$= A^{-2}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)Af(t) + A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)(f(t+\Delta t) - f(t)).$$

Другий доданок прямує до нуля. Дійсно, при $n > 0$ можна скористатися лемою 4 та ліпшицевістю функції f, а при $n = 0$ — лемою 4, гельдеровістю функції f з показником γ та нерівністю $\gamma > \beta(2-\alpha) - 1 \geq 1 - \alpha$, що випливає з умов теореми. Крім того, за лемою 2

$$\left\| A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)(f(t+\Delta t) - f(t)) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right) \right\| \overline{\overline{K}}\Delta t =$$

$$= \frac{\overline{\overline{K}}}{2\pi}\left\| \int\limits_{\Gamma_{\beta,a}} z^{-1}e^{-\Delta t z}R_z(A)dz \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\overline{\overline{K}}MN_1\beta}{\pi a^\alpha}\Delta t^{\alpha\beta}\int\limits_{\Delta t^{1-1/\beta}}^{+\infty} e^{-y}y^{-1-\alpha\beta}dy + \frac{MN_2\overline{\overline{K}}\Delta t^\alpha}{a^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{\overline{\overline{K}}MN_1\overline{\overline{N'}}\beta\Delta t^{\alpha+1}}{\pi a^\alpha} + \frac{MN_2\overline{\overline{K}}\Delta t^\alpha}{a^\alpha},$$

де використано той факт, що при $\beta > 1$

$$\int\limits_{\Delta t^{1-1/\beta}}^{+\infty} e^{-y}y^{-1-\alpha\beta}dy \sim \overline{\overline{N}}\Delta t^{\alpha(1-\beta)+1}, \qquad \overline{\overline{N}} := \frac{\beta - 1}{\beta(\alpha(1-\beta)+1)},$$

тобто

$$\left\| A^{-1}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)(f(t+\Delta t) - f(t)) \right\| \to 0, \quad \Delta t \to 0+.$$

За лемою 2

$$A^{-2}\left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t}\right)Af(t) \to f(t), \quad \Delta t \to 0+.$$

Тому граничне співвідношення (11) має місце.

Далі будемо досліджувати поведінку J_2', використовуючи зображення (10):

$$J_2' = |s - t = y| =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int\limits_0^{\Delta t} e^{-A(\Delta t - y)} \left(f'(t+\Delta t)(\Delta t - y) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t+\Delta t)}{n!} (\Delta t - y)^n \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l A^{-l-1} f^{(l)}(t+\Delta t) -$$

$$- \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^l}{(l-k)!} A^{-k-1} \Delta t^{l-k} e^{-A\Delta t} f^{(l)}(t+\Delta t) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l+1}}{(l-k)!} \Delta t^{l-k} e^{-A\Delta t} A^{-k-1} f^{(l)}(t+\Delta t) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l A^{-l-1} f^{(l)}(t+\Delta t) - \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l A^{-l-1} e^{-A\Delta t} f^{(l)}(t+\Delta t) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l+1}}{(l-k)!} \Delta t^{l-k} e^{-A\Delta t} A^{-k-1} f^{(l)}(t+\Delta t) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l A^{-l-1} (I - e^{-A\Delta t}) f^{(l)}(t+\Delta t).$$

Оскільки з неперервності похідних функції f згідно з лемою 2 отримуємо

$$A^{-1} e^{-A\Delta t} f^{(l)}(t+\Delta t) \to A^{-1} e^{-A\Delta t} f^{(l)}(t), \quad \Delta t \to 0+,$$

$$A^{-2} \left(\frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t} \right) \to A^{-1}, \quad \Delta t \to 0+,$$

то

$$J_2' \to \sum_{l=1}^{n} A^{-l} (-1)^l f^{(l)}(t) + \sum_{l=1}^{n} A^{-l} (-1)^{l+1} f^{(l)}(t) = 0, \quad \Delta t \to 0+.$$

Отже, $I_4 \to 0$, $\Delta t \to 0+$.

Повернемося до розгляду різниці

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} - (-AF(t) + f(t)) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \to 0, \quad \Delta t \to 0+.$$

У випадку $\Delta t < 0$ міркування аналогічні. Отже, з викладеного вище можемо зробити висновок, що функція $F(t)$, визначена в (9), є розв'язком задачі Коші (8) і $F \in C([0; R))$.

Теорему доведено.

Також має місце наступна теорема єдиності.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді для кожного* $x_0 \in \in D(A)$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші*

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad t \in (0; R), \quad x(0) = x_0,$$

до того ж

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds, \quad t \in (0; R). \tag{12}$$

Доведення. Функція (12) є розв'язком задачі Коші за теоремами 2, 3 і лемою 4:

$$x'(t) = -Ae^{-At}x_0 - A\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds + f(t) = -Ax(t) + f(t), \quad t > 0,$$

$$x(t) \to x_0, \quad t \to 0+.$$

Покажемо, що цей розв'язок єдиний. Нехай x — розв'язок однорідної задачі Коші

$$x'(t) + Ax(t) = \vec{0}, \quad t \in (0; R), \quad x(0) = \vec{0}.$$

Розглянемо функцію $u(t,s) = e^{-A(t-s)}A^{-1}x(s)$, $0 \le s \le t < R$. Тоді функція $u(t,s)$ диференційовна по $s \in (0;t)$ за теоремою 2. Звідси

$$\frac{du}{ds} = e^{-A(t-s)}A^{-1}x'(s) + e^{-A(t-s)}x(s) = \vec{0}.$$

Крім того, u неперервна по $s \in [0;t]$ за лемою 4, тому

$$u(t,s) = u(t,0), \quad s \in [0;t],$$

і як окремий випадок $u(t,0) = u(t,t)$, тобто $e^{-At}A^{-1}x(0) = A^{-1}x(t)$, звідки

$$x(t) = \vec{0}, \quad t \in (0; R).$$

5. Приклад. Розглянемо рівняння з частинними похідними, яке зводиться до лінійного диференціального рівняння в банаховому просторі з (α,β)-степеневим оператором

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = (s + is^\beta)x(t,s) + u(t,s),$$

де $u \in C([0,+\infty)^2)$ — деяка відома функція, $x \in C([0,+\infty)^2) \cap C^1((0,+\infty) \times \times [0,+\infty))$ — шуканий розв'язок, $\beta > 1$ фіксоване.

Нехай Z — простір обмежених неперервних на $[0,+\infty)$ функцій з рівномірною метрикою. Тоді цю систему можна записати у вигляді рівняння

$$x'(t) = -Ax(t) + u(t), \quad t \ge 0,$$

де $u(t)$, $t \ge 0$, — відома функція з класу $C([0,+\infty), Z)$, $x(t)$, $t \ge 0$, — шукана функція з класу $C([0,+\infty), Z) \cap C^1((0,+\infty), Z)$, $A\colon D(A) \subset Z \to Z$ — лінійний оператор, визначений формулою

$$(Az)(s) = (s + is^\beta)z(s), \quad s \ge 0, \quad z \in D(A),$$

$$D(A) = \{z \mid z(0) = 0,\ Az \in Z\}.$$

Спектр оператора A складається з точок вигляду $\lambda = s + is^\beta,\ s > 0$. При $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega_{\beta,2}$ (область $\Omega_{\beta,2}$ визначена, як у означенні 4) маємо

$$((A - \lambda I)^{-1}z)(s) = \frac{z(s)}{s + is^\beta - \lambda}, \quad s \geq 0.$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda := \lambda_1 + i\lambda_2$ таке, що $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda = \lambda_2 > 0$, $|\lambda| > 1$. Тоді з визначення області $\Omega_{\beta,2}$ отримуємо

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1/\beta} \ \Rightarrow\ \lambda_2 \geq \lambda_1 \ \Rightarrow\ \lambda_2 \geq \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}},$$

а отже,

$$|s + is^\beta - \lambda| \geq \frac{|\lambda_2 - \lambda_2^{1-1/\beta}\lambda_1|}{\sqrt{1 + \lambda_2^{2-2/\beta}}} \geq \frac{\left|\lambda_2 - \lambda_2^{1-1/\beta}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1/\beta}\right|}{\sqrt{1 + \lambda_2^{2-2/\beta}}} \geq$$

$$\geq |\lambda_2|^{1/\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{(\beta+2)/2\beta}}\right) \geq |\lambda|^{1/\beta}\left(\frac{1}{2^{(\beta+1)/2\beta}} - \frac{1}{2^{(\beta+3)/2\beta}}\right).$$

Звідси

$$\exists C > 0\colon\ \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/\beta}}. \tag{13}$$

Для інших випадків розміщення точок λ виконання оцінки (13) для норми резольвенти є очевидним. Отже, так побудований оператор A дійсно є (α, β)- степеневим. Також неважко помітити, що A не належить до класу сильно позитивних та сильно P-позитивних операторів.

6. Висновки. В роботі розглянуто задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі для випадку (α, β)-степеневого оператора. Вдалося знайти розв'язки такого рівняння аналітичними методами, а також дослідити детально поведінку (α, β)-степеневих операторів та порівняти цей клас операторів з розглядуваними раніше класами.

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830с.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. *Макаров В. Л., Гаврилюк І. П.* Експоненціально збіжні методи паралельної дискретизації для еволюційних рівнянь першого порядку // Доп. НАН України. – 2002. – № 3. – С. 24 – 28.
6. *Gavrilyuk I. P., Hackbusch W., Khoromskij B. N.* Data-sparse approximation to the operator-valued functions of elliptic operator // Math. Comput. – 2004. – **73**, № 247. – P. 1297 – 1324.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
8. *Городний М. Ф., Чайковский А. В* Обобщение понятия секториального оператора // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 7. – С. 29 – 46.
9. *Гаврилюк И. П., Макаров В. Л.* Сильно позитивные операторы и алгоритмы без насыщения точности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 499 с.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

Одержано 27.12.10,
після доопрацювання — 17.06.11