УДК 517.5

А. Ф. Конограй (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ З ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Order estimates are obtained for approximation of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of two variables in the space L_q by operators of orthogonal projection as well as by linear operators subjected to some conditions.

Получены порядковые оценки приближения классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций двух переменных в пространстве L_q с помощью операторов ортогонального проектирования, а также линейных операторов, которые подчинены некоторым условиям.

Вступ. Метою роботи є поширення відомих результатів [1] щодо наближення класів H^{Ω}_{p} періодичних функцій двох змінних із заданою функцією $\Omega(t)$ спеціального вигляду за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, що підпорядковані деяким умовам на класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Зауважимо, що з метою спрощення технічних викладок у даній роботі, як і в [1], розглядаються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних. Згадані класи функцій та апроксимативні характеристики будуть означені нижче, а зараз наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $L_p(\pi_2)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на квадраті $\pi_2 = \prod_{j=1}^{2}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, x_2)$, в якому норма визначається таким чином:

$$||f||_{L_p(\pi_2)} = ||f||_p = \left((2\pi)^{-2} \int\limits_{\pi_2} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$L_\infty(\pi_2)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, x_2)$ з нормою

$$||f||_{L_\infty(\pi_2)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_2} |f(x)|.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_2)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Для $f \in L_p(\pi_2)$ і $t = (t_1, t_2)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, 2$, розглядатимемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f; t)_p = \Omega_l(f; (t_1, t_2))_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,2}} ||\Delta^l_h f(x)||_p,$$

де

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{(h_1,h_2)} f(x_1,x_2) = \Delta^l_{h_1}\Delta^l_{h_2} f(x_1,x_2)$$

— мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j=1,2$.

Нехай $\Omega(t)=\Omega(t_1,t_2)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t_1,t_2)$ неперервна при $t_j\geq 0$, $j=1,2$;

2) $\Omega(t_1,t_2)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(0,0)=\Omega(t_1,0)=\Omega(0,t_2)=0$;

4) $\Omega(m_1t_1,m_2t_2)\leq m_1^l\, m_2^l\Omega(t_1,t_2)$, $m_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau)\geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha>0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1>0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}}\leq C_1\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}},\quad 0<\tau_1\leq\tau_2\leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau)\geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0<\gamma<l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2>0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}}\geq C_2\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}},\quad 0<\tau_1\leq\tau_2\leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній при умові, що інша змінна фіксована.

Отже, нехай $1\leq p\leq\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$, а $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4. Тоді, згідно з означенням [3],

$$B^{\Omega}_{p,\theta}:=\left\{f\in L_p(\pi_2)\colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\left(\int\limits_{\pi_2}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\prod_{j=1}^{2}\frac{dt_j}{t_j}\right)^{1/\theta}\leq 1\right\},$$

де $1\leq\theta<\infty$ і

$$B^{\Omega}_{p,\infty}:=\left\{f\in L_p(\pi_2)\colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}}=\sup_{t>0}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\leq 1\right\}.$$

Зауважимо, що при $\theta=\infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з класами H^{Ω}_p, які були розглянуті М. М. Пустовойтовим в [4].

Для подальших міркувань нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Кожному вектору $s=(s_1,s_2)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s)=\left\{k=(k_1,k_2)\colon 2^{s_j-1}\leq|k_j|<2^{s_j},\, k_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\, j=1,2\right\}$$

і для $f\in L_p(\pi_2)$ позначимо

$$\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}\widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\pi_2} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(k,x) = k_1 x_1 + k_2 x_2$.

Отже, якщо $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1-4$, (S) і (S_l), то з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити таким чином (див. [3]):

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_2) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \qquad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ і

$$B^{\Omega}_{p,\infty} := \left\{ f \in L_p(\pi_2) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \qquad (2)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$.

Зазначимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{2} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [5]).

Наведене означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна поширити і на випадки $p = 1, \infty$, дещо змінивши в (1) і (2) „блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, s_2)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{2} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_2)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f * A_s.$$

У прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq$ $\leq p \leq \infty$, можна означити таким чином (див. відповідно [6] та [4]):

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_2) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|A_s(f,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \qquad (3)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ і

$$B^{\Omega}_{p,\infty} := \left\{ f \in L_p(\pi_2) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|A_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \qquad (4)$$

Зауважимо, що при $1 < p < \infty$ означення норм функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (1) та (2) еквівалентні означенням (3) та (4) відповідно.

Нижче будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{t_1^r}{\left(\log \dfrac{1}{t_1}\right)_+^{b_1}} \dfrac{t_2^r}{\left(\log \dfrac{1}{t_2}\right)_+^{b_2}}, & \text{якщо} \quad t_j > 0, \quad j = 1, 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad t_1 t_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Тут і далі розглядаються логарифми за основою 2, крім того,

$$\big(\log \tau\big)_+ = \max\{1, \log \tau\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r$, $j = 1, 2$ та $0 < r < l$, а отже, $\Omega(t)$ задовольняє умови $1-4$, (S) та (S_l).

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q, $1 \le q < \infty$. Нагадаємо, що поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [7]. Щоб навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_2)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_2)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_2)$ величина

$$d_M^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x) \right\|_q \tag{6}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_2)$.

Крім ортопроекційних поперечників будемо досліджувати величини $d_M^B(F, L_q)$, введені В. М. Темляковим [7], які визначаються таким чином:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \| f(x) - Gf(x) \|_q. \tag{7}$$

Тут через $\mathcal{L}_M(B)_q$ позначено множину лінійних операторів, які задовольняють такі умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_2)$;

б) існує число $B \ge 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, k_2)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$, виконується нерівність $\left\| G e^{i(k,x)} \right\|_2 \le B$.

Зазначимо, що до $\mathcal{L}_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \le 1$ для всіх m. Із (6) і (7) легко бачити також, що величини $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_M^B(F, L_q) \le d_M^{\perp}(F, L_q).$$

На сьогодні є велика кількість робіт, в яких досліджувались ортопроекційні поперечники тих чи інших класів функцій. Відмітимо роботи [8 – 12], в яких вивчалися величини (6), (7) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p та $B^r_{p,\theta}$ і в яких можна ознайомитися з детальнішою бібліографією.

1. Допоміжні твердження. Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі [13, с. 65])**.** *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_2)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3\|f\|_p \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_4\|f\|_p.$$

З теореми A випливає такий наслідок.

Наслідок. *Для* $f \in L_p(\pi_2)$ *при* $1 < p < \infty$ *має місце співвідношення*

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f,x)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \tag{8}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, s_2)\colon s_j \in \mathbb{N},\ j = 1,2,\ \Omega(2^{-s}) \ge \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Далі, нехай

$$\chi^{\perp}(N) = \mathbb{N}^2 \setminus \chi(N)$$

та

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, s_2)\colon s_j \in \mathbb{N},\ j = 1,2,\ \frac{1}{2^l N} \le \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

У прийнятих позначеннях мають місце наступні твердження, встановлені М. М. Пустовойтовим в роботі [1].

Лема 1. *Кількість елементів множини* $Q(N)$ *рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{1/r} \big(\log N\big)^{-b_1/r - b_2/r + 1}.$$

Лема 2. *Для кількості елементів множини* $\Theta(N)$ *має місце співвідношення*

$$|\Theta(N)| \asymp \log N. \tag{9}$$

Лема 3. *Для функції* $\Omega(t)$, *яка визначена рівністю* (5), *при* $0 < p < \infty$ *має місце оцінка*

$$\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \Big(\Omega(2^{-s})\Big)^{p} \ll \sum_{s\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-s})\Big)^{p}.$$

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів, покладемо $M = |Q(N)|$, тоді згідно з лемою 1 отримаємо

$$\begin{gathered} M \asymp N^{1/r}\big(\log N\big)^{-b_1/r-b_2/r+1}, \\ N \asymp M^{r}\big(\log M\big)^{b_1+b_2-r}, \quad \log M \asymp \log N. \end{gathered} \tag{10}$$

2. Основні результати. Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta < \infty$, *а функцію* $\Omega(t)$ *задано формулою* (5) *з* $r > 0$, *тоді*

$$d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d^{B}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r+(1/2-1/\theta)_+}, \tag{11}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Перш ніж перейти до доведення (11), зробимо одне зауваження. Оскільки $d^{B}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \le d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, то для доведення теореми достатньо оцінити знизу величину $d^{B}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ і, відповідно, зверху величину $d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$.

Доведення. Спочатку встановимо в (11) оцінку зверху. З цією метою розглянемо наближення функції $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами $t_{Q(N)}(x)$ вигляду

$$t_{Q(N)}(x) = \sum_{s\in\chi(N)} \delta_s(f, x).$$

Використовуючи нерівність $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$ при $q \le p$ та співвідношення (8), одержуємо

$$\Bigg\| f(x) - \sum_{s\in\ \chi(N)} \delta_s(f,x) \Bigg\|_q \le \Bigg\| f(x) - \sum_{s\in\ \chi(N)} \delta_s(f,x) \Bigg\|_p \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-2}(2^{-s})\|\delta_s(f,x)\|_p^2\, \Omega^{2}(2^{-s}) \right)^{1/2} = I_1.$$

Щоб оцінити I_1, розглянемо два випадки.

Нехай $1 \le \theta \le 2$. Згідно з нерівністю [14, с. 43]

$$\left(\sum_{k} |a_k|^{\nu_2} \right)^{1/\nu_2} \le \left(\sum_{k} |a_k|^{\nu_1} \right)^{1/\nu_1}, \quad 1 \le \nu_1 \le \nu_2 < \infty,$$

враховуючи той факт, що $\Omega(2^{-s}) < \dfrac{1}{N}$ при $s \in \chi^{\perp}(N)$, маємо

$$I_1 \le N^{-1} \left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll N^{-1}\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq N^{-1} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r}.$$

Якщо ж $2<\theta<\infty$, то, застосувавши до I_1 нерівність Гельдера з показником $\dfrac{\theta}{2}$, отримаємо

$$I_1 \leq \left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}\left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{2\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{2\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in\ \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{2\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} = I_2.$$

Застосувавши до I_2 лему 3 та використавши співвідношення (9), (10), дістанемо

$$I_2 \ll \left(\sum_{s\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-s})\Big)^{2\theta/(\theta-2)}\right)^{1/2-1/\theta} \ll N^{-1}\left(\sum_{s\in\Theta(N)} 1\right)^{1/2-1/\theta} \asymp$$

$$\asymp N^{-1}\big(\log N\big)^{1/2-1/\theta} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r+1/2-1/\theta}.$$

Таким чином, оцінку зверху в (11) встановлено.

Перейдемо до встановлення в (11) оцінки знизу. Зазначимо, що оскільки отримана оцінка зверху не залежить від параметра q, то для доведення оцінки знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ достатньо розглянути випадок $q=1$. Доведення розіб'ємо на дві частини.

Для встановлення відповідної оцінки знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ у випадку $1\leq\theta<2$ використаємо міркування, аналогічні тим, які використовувались у прикладі 1 роботи [9].

Отже, нехай M задано, $G\in\mathcal{L}_M(B)_1$. Ми можемо показати, що існує вектор $k^0=(k_1^0,k_2^0)\in\bigcup_{s\in\Theta(N)}\rho(s)$ такий, що

$$\big\|e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)}\big\|_1 \gg 1. \tag{12}$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = N^{-1}e^{i(k^0,x)},$$

яка, як неважко переконатися, належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta},\ 1\leq\theta<2$.

Тоді внаслідок (12) для g_1 отримаємо

$$\big\|g_1(x) - Gg_1(x)\big\|_1 = N^{-1}\big\|e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)}\big\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r}.$$

Для встановлення оцінки знизу у випадку $2\leq\theta<\infty$ розглянемо функцію, аналогічну функції з прикладу 6 роботи [9].

Нехай $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тоді знайдуться N, $\Theta_1(N)$, $\Theta_1(N) \subset \Theta(N)$ такі, що

$$|\Theta_1(N)| \geq \frac{1}{2}|\Theta(N)|, \quad |\widetilde{Q}(N)| \asymp M,$$

де $\widetilde{Q}(N) = \bigcup_{s\in\Theta(N)} \rho(s)$, і в кожному $\rho(s)$, $s \in \Theta_1(N)$, знайдуться вектори k^s, при яких для функції

$$g_2(x) = \sum_{s\in\Theta_1(N)} e^{i(k^s,x)} \tag{13}$$

знайдеться $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ такий, що

$$\|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg \big(\log M\big)^{1/2}. \tag{14}$$

Доведення цього факту аналогічне доведенню прикладу 6 з [9].

Розглянемо функцію

$$g_3(x) = C_5 N^{-1}\big(\log N\big)^{-1/\theta} g_2(x), \quad C_5 > 0,$$

де g_2 взято з (13).

Покажемо належність цієї функції класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при відповідному значенні сталої C_5.

Дійсно,

$$\|g_3\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in\Theta_1(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta_s(g_3,x)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-1/\theta}\left(\sum_{s\in\Theta_1(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-1/\theta} N|\Theta_1(N)|^{1/\theta} \asymp \big(\log N\big)^{-1/\theta}\big(\log N\big)^{1/\theta} = 1.$$

Внаслідок (14) отримаємо

$$\|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1}\big(\log N\big)^{-1/\theta}\big(\log M\big)^{1/2} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r+1/2-1/\theta}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq q \leq p \leq 2$, $(p,q) \neq (1,1)$, $1 \leq \theta < \infty$, *а функцію* $\Omega(t)$ *задано формулою* (5) *з* $r > 0$, *тоді*

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M^B(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r+(1/p-1/\theta)_+}. \tag{15}$$

Доведення. Оцінка зверху в (15) встановлюється так само, як і оцінка зверху в (11).

Перш ніж перейти до встановлення відповідної оцінки знизу в (15) для $d_M^B(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, зазначимо, що її достатньо встановити для випадку $q = 1,\ 1 < p \leq 2$.

Нехай спочатку $1 \leq \theta < p$. В цьому випадку оцінка знизу встановлюється так само, як і оцінка знизу в (11) у випадку $1 \leq \theta < 2$.

Нехай тепер $p \leq \theta < \infty$. Функція, за допомогою якої встановлюється оцінка знизу в цьому випадку, аналогічна функції з прикладу 7 роботи [9].

Нехай N є достатньо великим. Означимо множину

$$\Theta_2(N) = \left\{ s \in \Theta(N) \colon s_j \geq \frac{1}{4l} \log(C_6 N),\ j = 1, 2 \right\},$$

де $C_6 > 0$.

Покладемо $v = [|\Theta_2(N)|^{1/2}]$ і розіб'ємо квадрат $\pi_2 = \prod_{j=1}^{2} [0; 2\pi]$ на v^2 квадратів з довжиною сторони $\dfrac{2\pi}{v}$. Встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною $\Theta_2'(N) \subset \Theta_2(N)$, $|\Theta_2'(N)| = v^2$, і утвореною множиною квадратів.

Далі, через $x^s \in \pi_2$ позначимо центр квадрата, що відповідає вектору $s \in \Theta_2'(N)$, і покладемо

$$u = 2^{\left[\frac{1}{2} \log |\Theta_2(N)|\right]} \asymp \big(\log N\big)^{1/2}.$$

Означимо через K_n ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, k_2^{s_2})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}, & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тоді існують число N і множина $\Theta_3(N) \subset \Theta_2'(N)$ такі, що $|\widetilde{Q}(N)| \asymp M$, де $\widetilde{Q}(N) = \bigcup_{s \in \Theta(N)} \rho(s)$; $|\Theta_3(N)| \geq \dfrac{1}{2} |\Theta_2'(N)|$ і в кожному $\rho(s)$, $s \in \Theta_3(N)$, знайдуться квадрати з центрами в k^s і довжинами ребер $2u$ такі, що для функції

$$g_4(x) = \sum_{s \in \Theta_3(N)} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^{2} K_u(x_j - x_j^s) \tag{16}$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_4(x + y^*) - G g_4(x + y^*)\|_1 \gg \log M. \tag{17}$$

Доведення (17) аналогічне доведенню прикладу 7 з [9].

Розглянемо функцію

$$g_5(x) = C_7 N^{-1} \big(\log N\big)^{1/p - 1 - 1/\theta} g_4(x), \quad C_7 > 0,$$

де g_4 — функція з (16), і оцінимо $||g_5||_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$, $p \leq \theta < \infty$, використавши відповідне зображення норми.

Враховуючи, що внаслідок вибору параметра u

$$\|A_s(g_4,x)\|_p \ll \left\|\prod_{j=1}^{2} K_u(x_j)\right\|_p \asymp u^{2(1-1/p)} \asymp \big(\log N\big)^{1-1/p} \quad \forall s \in \Theta_3(N),$$

маємо

$$||g_5||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in\Theta_3(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_5,x)||_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{1/p-1-1/\theta}\left(\sum_{s\in\Theta_3(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(g_4,x)||_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{1/p-1-1/\theta}\big(\log N\big)^{1-1/p}\left(\sum_{s\in\Theta_3(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \big(\log N\big)^{-1/\theta}|\Theta_3(N)|^{1/\theta} \asymp 1. \qquad (18)$$

Таким чином, з (18) робимо висновок, що g_5 належить $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $p \le \theta < \infty$, з відповідною сталою $C_7 > 0$.

Далі, внаслідок (17) існує вектор y^* такий, що

$$\|g_5(x+y^*) - Gg_5(x+y^*)\|_1 \gg N^{-1}\big(\log N\big)^{1/p-1-1/\theta}\log M \asymp$$

$$\asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r}\big(\log M\big)^{1/p-1-1/\theta}\log M =$$

$$= M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-b_2+r+1/p-1/\theta}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 2 доведено.

Зауваження. **1.** Порядкові оцінки величин $d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q)$ та $d^{B}_M(H^{\Omega}_p, L_q)$ при p і q, які задовольняють умови теорем 1 та 2, встановив М. М. Пустовойтов у роботі [1].

2. В теоремах 1 та 2 оптимальним (в сенсі порядку) підпростором є підпростір тригонометричних поліномів з „номерами” гармонік із множини $Q(N)$.

1. *Пустовойтов Н. Н.* Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности// Изв. РАН. Сер. мат. – 2000. – **64**, № 1. – С. 123 – 144.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
6. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
7. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.

8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
9. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
10. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 2. – С. 197 – 211.
11. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1224 – 1231.
12. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Там же. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1402 – 1408.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
14. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Одержано 26.01.10