УДК 517.53

А. И. Щехорский

Некоторые контурно-телесные свойства голоморфных функций в $\mathbf{C}^n$

Устанавливаются многомерные аналоги некоторых контурно-телесных результатов работ [1—2]. Доказательства основаны на методах этих работ.

Пусть $\mathbf{C}^n$ — комплексное n-мерное пространство. Для $z = (z_1, z_2, \ldots, \ldots, z_n)$ под $\| z \|$ будем понимать евклидову норму.

Пусть $\overline{\mathbf{C}}$ — одноточечная компактификация $\mathbf{C}$, а $\overline{\mathbf{C}}^n = (\overline{\mathbf{C}})^n = \overline{\mathbf{C}} \times \times \overline{\mathbf{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbf{C}}$ — декартово произведение n замкнутых комплексных плоскостей. Точки из $\mathbf{C}^n$ будем называть конечными, а точки из $\overline{\mathbf{C}}^n \setminus \mathbf{C}^n$ — бесконечными.

Пусть G — произвольное открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}^n$. Границу множества G в $\mathbf{C}^n$ обозначим через ∂G, а границу в $\overline{\mathbf{C}}^n$ — через $\overline{\partial G}$.

Для точки $w \in \mathbf{C}^n$, произвольного $t > 0$ и произвольного вектора $a \in \mathbf{C}^n$ обозначим: $P(w, t) = \{\zeta : \| \zeta - w \| \leqslant t\} \setminus G$, $\mathbf{C}_{a,w} = \{z : z = w + a\lambda,\ \lambda \in \mathbf{C}\}$, $P_a(w, t) = \mathbf{C}_{a,w} \cap P(w, t)$.

Через $v_a(w, t)$ будем обозначать логарифмическую емкость множества $P_a(w, t)$.

Фиксируем произвольное $b > 0$. Пусть $z \in \mathbf{C}^n \setminus G$.

В [1—2] введены емкостные характеристики множеств в $\mathbf{C}^n$, определяемые формулами

$$v(w, t) = \sup_{a \in \mathbf{C}^n} v_a(w, t), \quad v^*(z, \delta, t) = \inf_{w \in \{\zeta : \|\zeta - z\| = \delta\}} v(w, t), \quad v_b^*(z, \delta) = v^*(z, \delta, b\delta),$$

$$u_b(z, \delta) = \frac{9b\delta}{4v^*_{b/2}(z, \delta)}, \quad v_b^*(z) = \varliminf_{\delta \to 0} \frac{v_b^*(z, \delta)}{\delta}, \quad v_b^* = \varliminf_{\delta \to 0} \inf_{z \in \partial G} \frac{v_b^*(z, \delta)}{\delta}. \tag{1)—(6}$$

Для всякой вещественной функции $r(\zeta)$, определенной на множестве $G \subset \overline{\mathbf{C}}^n$, введем на $\overline{\partial G}$ функцию (см. [1, с. 136])

$$B[z, r(\zeta)] = \varlimsup_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in G)}} r(\zeta) \quad \forall z \in \overline{\partial G}. \tag{7}$$

Пусть на границе $\overline{\partial G}$ открытого множества $G \subset \overline{\mathbf{C}}^n$ задана вещественная функция $l(z)$. Обозначим через $\Phi(l)$ множество ограниченных сверху плюрисубгармонических в G функций $r(\zeta)$, удовлетворяющих условию

$$B[z, r(\zeta)] \leqslant l(z) \quad \forall z \in \overline{\partial G}. \tag{8}$$

Положим $T[\zeta, l(z)] = \sup r(\zeta)$, $r \in \Phi(l)$. Справедлива оценка

$$r(w) \leqslant T[w, B(z, r(\zeta))]. \tag{9}$$

Будем обозначать множество голоморфных и ограниченных в открытом множестве $G \subset \overline{\mathbf{C}}^n$ функций через $\mathcal{H}(G)$, а множество непрерывных функций на некотором множестве $E \subset \overline{\mathbf{C}}^n$ через $C(E)$.

Другие понятия и обозначения, используемые в этой работе, введены в [1—2], а также в [5].

Положим $d_b = \max\{1, b\} + 2/3$. Справедлив следующий многомерный аналог теоремы 2.1.1 из [2], устанавливаемый методами, разработанными в [1—2].

Теорема 1. *Пусть G — открытое множество в* $\overline{\mathbf{C}}^n$, $h \in \mathcal{H}(G)$, $\mu^{-}(\delta)$ — *неубывающая мажоранта, имеющая коэффициент нормальности* $\psi(t)$, z^0 — *фиксированная точка в* $\mathbf{C}^n$, s, b — *фиксированные числа*, $s \geqslant 0$, $b > 0$. *Тогда*:

а) *если*

$$B[z, |h(\zeta)|] \leqslant \mu(\max\{s, \|z - z^0\|\}) \qquad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{10}$$

то при всех конечных $\zeta \in G$ *имеет место оценка*

$$|h(\zeta)| \leqslant \inf_{\sigma \geqslant \max\{s, \|\zeta - z^0\|\}} \mu(d_b \sigma)\, \psi[u_b(z^0, \sigma)]; \tag{11}$$

б) *если* $\alpha(\delta)$ — *неубывающая мажоранта*, $|h(\zeta)| \leqslant 1$ *в* G *и*

$$B[z, |h(\zeta)|] \leqslant \mu(\max\{s, \|z - z^0\|\})\, \alpha(\max\{s, \|z - z^0\|\}) \qquad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{12}$$

то при всех конечных $\zeta \in G$ *имеет место оценка*

$$|h(\zeta)| \leqslant \inf_{\sigma \geqslant \max\{s, \|\zeta - z^0\|\}} \mu(d_b \sigma)\, A_{\alpha,\mu}(d_b \sigma)\, u_b(z^0, \sigma)\, \psi[u_b(z^0, \sigma)], \tag{13}$$

где $A_{\alpha,\mu}(\delta)$ — *вогнутая нормальная мажоранта, построенная по* α *и* μ *в* [1—2].

Доказательство. Пусть D — произвольное открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}$, t — произвольное фиксированное число, $t > 0$.

Через $C^*(w, \delta)$ обозначим логарифмическую емкость множества $\{\zeta : |\zeta - w| \leqslant \delta\} \setminus D$.

Фиксируем произвольные точки $w \in D \cap \mathbf{C}$, $a_0 \in \mathbf{C}$, $|w - a_0| = t$. Определим на $\overline{\partial D}$ функцию от z (см. [1, с. 141]):

$$\lambda(z, a_0, t) = \begin{cases} \ln \max\left\{\dfrac{3|z - a_0|}{t}, \ \dfrac{3}{2}\right\}, \ z \in \mathbf{C}, \\ +\infty, \ z = \infty \in \overline{\partial D}. \end{cases}$$

Через $\mathbf{H}_D[\zeta, l(z)]$ обозначим нижнее решение обобщенной задачи Дирихле в D для функции $l(z)$, заданной на $\overline{\partial D}$ (см. [1, с. 138]).

Методами работ [1—2] установим следующий аналог леммы 2.1.3 из [2, с. 68—70].

Лемма 1. *Пусть вещественная функция $\theta(t)$ задана на промежутке* $(0, +\infty]$, *обобщенно непрерывна при* $t = +\infty$, *а на интервале* $(0, +\infty)$ *конечна, не убывает и вогнута. Если вещественная (не обязательно конечная) функция $q(z)$ задана и ограничена сверху на* $\overline{\partial D}$ *и в обозначениях* [2, с. 77] *выполнено*

$$q(z) \leqslant \theta[\lambda(z, a_0, t)] \quad \forall z \in \partial D, \tag{14}$$

то

$$\underline{H}[w, q(z)] \leqslant \theta\left(\ln \frac{9t}{4C^*(w, t/2)}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Фиксируем $\beta > 0$ и вводим функции $\theta_\beta(\tau) = \theta(\tau) + \beta\tau$ $(\tau > 0)$, $\lambda_N(z) = \min\{\lambda(z, a_0, t), N\}$.

В работе [2, с. 69] доказано, что при достаточном большом $N > \ln(3/2)$ имеют место неравенства

$$\underline{H}_D[\zeta, q(z)] \leqslant H_D[\zeta, \theta_\beta(\lambda_N(z))] \leqslant \theta_\beta(H_D[\zeta, \lambda_N(z)]) \qquad \forall \zeta \in D. \tag{16}$$

Обозначим через D_1 ту связную компоненту открытого множества $D \cup \{\zeta : |\zeta - w| > t/2\} \cup \{\infty\}$, которая содержит точку a_0.

Пусть $g_{D_1}(\zeta, a_0)$ — обобщенная функция Грина области D_1, $K = \{\zeta : |\zeta - a_0| < t/2\}$.

В работе [2, с. 70] доказано, что

$$-g_{D_1}(\zeta, a_0) - \ln\frac{3|\zeta - a_0|}{t} \leqslant -H_D[\zeta, \lambda_N(z)] \quad \forall\zeta \in D \cap D_1. \tag{17}$$

Применяя лемму 2.1.2 из [2], получаем оценку

$$g_{D_1}(\zeta, a_0) + \ln|\zeta - a_0| \leqslant \ln\frac{3(|\zeta - w| + t/2)\,t}{2C^*(w, t/2)} \quad \forall\zeta \in D_1 \setminus \{a_0\}. \tag{18}$$

Далее рассуждаем по аналогии с [2, с. 69—70]. Сложим неравенства (17) и (18):

$$H_D[\zeta, \lambda_N(z)] \leqslant \ln\frac{9(|\zeta - w| + t/2)}{2C^*(w, t/2)} \quad \forall\zeta \in (D \cap D_1) \setminus \{a_0\}. \tag{19}$$

Докажем, что оценка (19) справедлива при $\zeta = w$.

Пусть D_0 — та связная компонента открытого множества D, которая содержит точку w. Предположим, что $\{\zeta : |\zeta - w| = t/2\} \cap D_0 \neq \varnothing$, тогда $D_0 \subset D_1$. Поэтому оценка (19) верна при $\zeta = w$. Предположим, что $\{\zeta : : |\zeta - w| = t/2\} \cap D_0 = \varnothing$, тогда $D_0 \subset : \{\zeta : |\zeta - w| < t/2\}$.

Очевидно, что для произвольной конечной точки $\zeta \in \mathbf{C}$ имеет место неравенство $\ln\dfrac{9(|\zeta - w| + t/2)}{2C^*(w, t/2)} \geqslant \ln\dfrac{9}{2}$. Так как $D_0 \subset \{\zeta : |\zeta - w| < t/2\}$, то $\lambda_N(z) \leqslant \ln(9/2)$, $z \in \partial D_0$, и $H_D[\zeta, \lambda_N(z)] \leqslant \ln(9/2)$ $\forall\zeta \in D_0$. И в этом случае можно в неравенстве (19) положить $\zeta = w$. Таким образом, имеет место оценка

$$H_D[w, \lambda_N(z)] \leqslant \ln\frac{9t}{4C^*(w, t/2)}. \tag{20}$$

Из (20) и (16) получаем оценку (15). Лемма 1 доказана.

Пусть $w \in G \cap \mathbf{C}^n$. Для произвольного $a^0 \in \mathbf{C}^n$ определим на $\overline{\partial G}$ функцию от z:

$$\lambda(z, w, a^0, z^0) = \begin{cases} \ln\max\left\{\dfrac{3\|z - a^0\|}{b\|w - z^0\|},\ \dfrac{3}{2}\right\}, & z \in \partial G, \\ +\infty; & z \in \overline{\partial G} \setminus \partial G. \end{cases} \tag{21}$$

Докажем лемму, являющуюся многомерным аналогом леммы 1.

Л е м м а 2. *Пусть вещественная функция $\theta(\tau)$ задана на промежутке $(0, +\infty]$, обобщенно непрерывна при $\tau = +\infty$, а на интервале $(0, \infty)$ конечна, не убывает и вогнута. Если вещественная (не обязательно конечная) функция $Q(z)$ задана и ограничена сверху на $\overline{\partial G}$ и*

$$Q(z) \leqslant \theta[\lambda(z, w, a^0, z^0)] \quad \forall z \in \overline{\partial G} \setminus \{z^0\}, \quad \forall a^0 : \|a^0 - w\| = b\|z^0 - w\|, \tag{22}$$

то в точке w имеет место оценка

$$T[w, Q(z)] \leqslant \theta[\ln u_b(z^0, \|w - z^0\|)]. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На сфере $\{\zeta : \|\zeta - w\| = b\|z_0 - w\|\}$ возьмем произвольную точку a^0. Положим $a = (a^0 - w)/\|a^0 - w\|$, $G_{a,w} = G \cap \mathbf{C}_{a,w}$; $\lambda_a(z, w, a^0, z^0)$, $q(z)$ — сужения функций $\lambda(z, w, a^0, z^0)$ и $Q(z)$ на $\overline{\partial G}_{a,w}$; $\mathbf{H}_{a,w}[\zeta, l(z)]$ — нижнее решение обобщенной задачи Дирихле в $G_{a,w}$ для функции $l(z)$, заданной на $\overline{\partial G}_{a,w}$. Из (22) следует, что $q(z) \leqslant \theta[\lambda_a(z, w, a^0, z^0)]$ $\forall z \in \partial G_{a,w}$.

К функциям $q(z)$, $\theta(\tau)$ и $\lambda_a(z, w, a^0, z^0)$ применим лемму 1. Получим оценку

$$\underline{H}_{a,w}[w, q(z)] \leqslant \theta\left(\ln\frac{9b\|w - z^0\|}{4v_a(w, b\|w - z^0\|/2)}\right). \tag{24}$$

Из определения функции $T[w, Q(z)]$ следует, что $\underline{H}_{a,w}[w, q(z)] \geqslant T[w, Q(z)]$. Поэтому

$$T[w, Q(z)] \leqslant \theta\left(\ln\frac{9b\|w-z^0\|}{4v_a(w, b\|w-z^0\|/2)}\right). \tag{25}$$

Так как оценка (25) верна при любом $a\in\mathbf{C}^n$, то в силу равенства $\inf\limits_{w':\|w'-z^0\|=\|w-z^0\|}\sup\limits_{a\in\mathbf{C}^n} v_a(w', b\|w-z^0\|/2) = v^*_{b/2}(z^0, \|w-z^0\|)$ получаем неравенство (23). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Функция $\ln[|h(\zeta)|/\mu(d_b\|w-z^0\|)]$, плюрисубгармоническая в G, ограничена сверху. Поэтому, согласно (9)

$$\ln\frac{|h(\eta)|}{\mu(d_b\|w-z^0\|)} \leqslant T\left(\eta, B\left(z, \ln\frac{|h(\zeta)|}{\mu(d_b\|w-z^0\|)}\right)\right). \tag{26}$$

Докажем утверждение а) теоремы 1 (ср. с доказательством утверждения 2.1.1 из [2, с. 66]). Пусть $w\in G\cap\mathbf{C}^n$, $\|w-z^0\|\geqslant s$, $a^0\in\{\zeta:\|\zeta-z^0\|=b\|w-z^0\|\}$. Докажем применимость леммы 2 к функциям

$$\theta(t)=\begin{cases}\ln\psi(\exp t) & \forall t\in(0,\infty),\\ \lim\limits_{\tau\to\infty}\ln\psi(\exp\tau), & t=+\infty,\end{cases} \tag{27}$$

$$Q(z)=B\left(z, \ln\frac{|h(\zeta)|}{\mu(d_b\|w-z^0\|)}\right),\qquad z\in\overline{\partial G}. \tag{28}$$

При любом $z\in\partial G$ имеем

$$\max\{s, \|z-z^0\|\}\leqslant\|z-a^0\|+\|w-a^0\|+\|w-z^0\|. \tag{29}$$

Докажем, что

$$\max\{s, \|z-z^0\|\}\leqslant d_b\|w-z^0\|\exp\lambda(z, w, a^0, z^0)\quad \forall z\in\partial G. \tag{30}$$

Действительно, из (29) получаем, что

$$\max\{s, \|z-z^0\|\}\leqslant\begin{cases}\dfrac{3b+2}{2}\|w-z^0\|; & \|z-a^0\|\leqslant\dfrac{b}{2}\|w-z^0\|,\\[2mm] \dfrac{3b+2}{b}\|z-a^0\|; & \|z-a^0\|\geqslant\dfrac{b}{2}\|w-z^0\|.\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$d_b\|w-z^0\|\exp\lambda(z, w, a^0, z^0)=\begin{cases}\dfrac{3d_b}{2}\|w-z^0\|; & \|z-a^0\|\leqslant\dfrac{b}{2}\|w-z^0\|,\\[2mm] \dfrac{3d_b}{b}\|z-a^0\|; & \|z-a^0\|\geqslant\dfrac{b}{2}\|w-z^0\|.\end{cases}$$

Так как для произвольного $b>0$ верно $3d_b\geqslant 3b+2$, то оценка (30) доказана.

Из (10), (28) и (30) имеем

$$Q(z)\leqslant\ln\frac{\mu(\max\{s, \|z-z^0\|\})}{\mu(d_b\|w-z^0\|)}\leqslant\ln\frac{\mu(d_b\|w-z^0\|\exp\lambda(z, w, a^0, z^0))}{\mu(d_b\|w-z^0\|)}\leqslant$$
$$\leqslant\ln\psi(\exp\lambda(z, w, a^0, z^0)).$$

Таким образом, лемма 2 применима и для функций (27) и (28) имеет место оценка (23).

Из (26) и (28) получаем

$$\ln\frac{|h(\zeta)|}{\mu(d_b\|w-z^0\|)}\leqslant T[\zeta, Q(z)]\quad\forall\zeta\in G. \tag{31}$$

Из (31) и (23) при $\zeta = w$ получаем

$$\ln [|h(w)|/\mu(d_b \| w - z^0 \|)] \leqslant \theta [\ln u_b(z^0, \| w - z^0 \|)]. \tag{32}$$

Положим $G_{z,\sigma} = \{\zeta : \| \zeta - z \| < \sigma\} \cap G$. Поскольку w — произвольная конечная точка в $G \setminus G_{z^0,s}$, то из (32) следует неравенство

$$|h(w)| \leqslant \mu(d_b \| w - z^0 \|) \psi [u_b(z^0, \| w - z^0 \|)] \ \forall w \in G \setminus G_{z^0,s}. \tag{33}$$

Фиксируем $\sigma \geqslant s$. Из (10) и (33), используя принцип максимума для субгармонических функций [4, с. 239], получаем неравенство (11).

Утверждение б) теоремы 1 выводится из утверждения а) аналогично тому, как в [2, с. 72] из утверждения а) теоремы 2.1.1 выведено утверждение б) этой теоремы.

Следующая ниже теорема 2 является многомерным аналогом теоремы 6.1 из [1] и получена теми же средствами. В ней предполагается, что G — открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}^n$, $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта, z^0 — произвольная точка в $\mathbf{C}^n \setminus G$ $v^*_{b/2}(z^0) > 0$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{H}(G)$, s — фиксированное число, $s \geqslant 0$. Тогда:*
а) *если*

$$B[z, |f(\zeta|] \leqslant \mu(\max\{s, \| z - z^0 \|\}) \qquad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{34}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c\mu(\max\{s, \| z - z^0 \|\}) \qquad \forall \zeta \in G, \tag{35}$$

где $c > 0$ не зависит от ζ;
б) *если $|f(\zeta)| \leqslant 1$ в G, $\alpha(\delta)$ — неубывающая мажоранта, s — фиксированное число, $s \geqslant 0$ и*

$$B[z, |f(\zeta)|] \leqslant \mu(\max\{s, \| z - z^0 \|\}) \alpha(\max\{s, \| z - z^0 \|\}) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{36}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c' \mu(\max\{s, \| \zeta - z^0 \|\}) A_{\alpha,\mu}(\max\{s, \| \zeta - z^0 \|\}) \quad \forall \zeta \in G, \tag{37}$$

где $c' > 0$ не зависит от ζ.

Теорема 2 получается из теоремы 1 по аналогии с тем, как в работе [1] теорема 6.1 выведена из теоремы 3.1 (см. [1, с. 150]).

Пусть i — естественное вложение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{R}^{2n}$, G — произвольное открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}^n$.

Условимся говорить, что точка $z^0 \in \mathbf{C}^n \setminus G$ достижима извне G усеченным конусом, если в $\mathbf{R}^{2n} \setminus i(G)$ существует усеченный круговой конус K полной размерности с вершиной в $i(z^0)$.

Теорема 3. *Пусть G — произвольное открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}^n$, $f \in \mathcal{H}(G)$, z^0 — произвольная фиксированная точка на $\mathbf{C}^n \setminus G$, достижима извне G усеченным конусом, $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта. Тогда,*
а) *если*

$$B[z, |f(\zeta)|] \leqslant \mu(\| z - z^0 \|) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{38}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c\mu(\| \zeta - z^0 \|) \quad \forall \zeta \in G, \tag{39}$$

где $c > 0$ не зависит от ζ и f;
б) *если $\alpha(\delta)$ — неубывающая мажоранта, $|f(\zeta)| \leqslant 1$ в G и*

$$B[z, |f(\zeta)|] \leqslant \mu(\| z - z^0 \|) \alpha(\| z - z^0 \|) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus \{z^0\}, \tag{40}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c' \mu(\| \zeta - z^0 \|) A_{\alpha,\mu}(\| \zeta - z^0 \|) \quad \forall \zeta \in G, \tag{41}$$

где $c' > 0$ не зависит от ζ и f.

Доказательство. Применим теорему 2. Для этого нужно показать, что при некотором $b > 0$ справедливо неравенство $v^*_{b/2}(z^0) > 0$. Положим $b = 4$. Фиксируем произвольное малое $\delta > 0$ (δ меньше половины конуса K).

Пусть ζ^0 — точка пересечения оси конуса K, о котором говорится в теореме, и сферы $\{\|\zeta : \| \zeta - z^0 \| = \delta\}$, принадлежащая конусу K. Пусть w — произвольная точка множества $\{\zeta : \| \zeta - z^0 \| = \delta\}$. Через точки w и ζ^0 проведем комплексную прямую $\mathbf{C}_{a,w}$ (a — направляющий вектор). Тогда $v_a(w, 2\delta) \geqslant \delta \sin(\theta/2)$, где θ — угол при вершине конуса K. Теорема доказана.

Через $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ обозначим скалярное произведение векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в $\mathbf{R}^{2n}$.

В следующей теореме предполагается: G — открытое множество в $\overline{\mathbf{C}}^n$, у которого граница вещественное топологическое многообразие размерности $2n - 1$; z^0 — фиксированная точка ∂G; существует окрестность U точки z^0 и вещественная гиперплоскость Λ в $\mathbf{R}^{2n}$ такие, что ортогональное проектирование множества $\Gamma = U \cap \partial G$ на Λ взаимно однозначно.

Пусть $\mathbf{v}_{z^0}$ — единичный вектор с началом z^0, ортогональный Λ, $\mathbf{v}_{z^0,z}$ — единичный вектор, коллинеарный вещественной прямой, проходящей через точки z^0 и z.

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{H}(G)$ и при некотором $\beta < 1$*

$$|(\mathbf{v}_{z^0}, \mathbf{v}_{z^0,z})| \leqslant \beta \quad \forall z \in \Gamma. \tag{42}$$

Пусть $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта. Тогда справедливы утверждения а) и б) теоремы 3.

Доказательство. Из неравенства (42) следует, что существует двухполостный круговой усеченный замкнутый конус K полной размерности с вершиной в точке z^0 и осью, ортогональной Λ, такой, что $K \cap \Gamma = \{z^0\}$, $K \subset U$.

Пусть h и θ — соответственно высота и половина угла при вершине конуса K. Пусть h настолько мало, что шар радиуса $4h/\cos\theta$ с центром z^0 лежит в U. Пусть $0 < \delta < (h \sin\theta)/8$. Рассмотрим произвольную точку $w \in \mathbf{C}^n$ такую, что $0 < \| w - z^0 \| \leqslant \delta$. Пусть l_w — вещественная прямая, проходящая через точку w и ортогональная Λ. Очевидно, $\Gamma \cap l_w$ состоит из единственной точки, которую обозначим через z_w.

Через $\mathbf{C}_{a,w}$ обозначим комплексную прямую, проходящую через вещественную прямую l_w (a — направляющий вектор). Положим $b = 4\| w - z_w \| / \| w - z^0 \|$. Очевидно, множество $P_a(w, 2\| w - z^0 \|)$ содержит некоторую непрерывную вещественную кривую с концами на сфере $\{\zeta : \| \zeta - w \| = 2\| w - z_w \|\}$, проходящую через точку z_w. Поэтому верна оценка $v_a(w, 2\| w - z_w \|) \geqslant \| w - z_w \|/4$, откуда $9b\| w - z^0 \|/[4v_a(w, b\| w - z^0 \|/2)] \leqslant 36$. Следовательно,

$$u_b(z^0, \| w - z^0 \|) \leqslant 36. \tag{43}$$

Так как z_w лежит в конусе, дополнительном к K, то

$$\mu(d_b \| w - z^0 \|) = \mu\left(\left(\max\left\{1, \frac{4\| w - z_w \|}{\| w - z^0 \|}\right\} + \frac{2}{3}\right)\| w - z^0 \|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \psi\left(\frac{4}{\sin\theta} + \frac{2}{3}\right)\mu(\| w - z^0 \|). \tag{44}$$

Применим теорему 1 для $s = 0$ и положим в (11) $\sigma = \| \zeta - z^0 \|$. Отсюда, учитывая соотношения (43) и (44), по аналогии с доказательством теоремы 6.1 в [1, с. 160] получаем соотношение (39). Итак, доказано, что при условиях теоремы 4 верно утверждение а) теоремы 3.

Отсюда по аналогии [2, с. 72] выводится, что при условиях теоремы 4 верно утверждение б) теоремы 3. Теорема доказана.

В последующих теоремах предполагается, что G — открытое ограниченное множество в $\mathbf{C}^n$, $f \in \mathcal{H}(G) \cap C(\overline{G})$ и что $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта. С помощью принципа максимума для модулей непрерывности (см. [1—3]) из приведенных выше теорем выводятся следующие глобальные контурно-телесные теоремы.

Теорема 5. *Если при некотором* $b>0$ *выполнено соотношение* $v^*_{b/2}>0$, *то из условия*

$$\omega_{\partial G, f}(\delta)\leqslant\mu(\delta)\quad\forall\delta>0 \tag{45}$$

следует оценка

$$\omega_{\bar{G}, f}(\delta)\leqslant c\mu(\delta)\quad\forall\delta>0,\ C=\mathrm{const}. \tag{46}$$

Теорема 6. *Пусть каждая точка множества* ∂G *достижима извне* G *усеченным конусом фиксированных размеров (т. е. угол раствора при вершине и высота фиксированы). Тогда из условия* (45) *будет следовать оценка* (46).

Теорема 7. Пусть ∂G — *вещественное топологическое многообразие размерности* $2n-1$. *Если существует такое* $\beta<1$, *что для каждой точки* $z^0\in\partial G$ *справедливо неравенство* (42), *то из условия* (45) *следует оценка* (46).

Заметим, что согласно условию теоремы 7 контурный модуль непрерывности нормален. Следовательно, в качестве $\mu(\delta)$ можно взять сам этот модуль непрерывности. Тогда телесный модуль непрерывности будет оцениваться непосредственно через контурный. Таким образом, теорема 7 совпадает с результатом, приведенным в работе [3]. В связи с этим отметим, что доказанная нами теорема 4 является локальным аналогом указанного результата [3], носящего сугубо глобальный характер.

1. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного. Успехи мат. наук, **28**, № 1, с. 131—161.
2. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— с. 272.
3. *Чирка Е. М.* Аналитическое представление *CR*-функций.— Мат. сб., 1975, **98**, № 4, с. 591—623.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука. 1966.— 515 с.
5. *Щехорский А. И.* Контурно-телесные теоремы голоморфных функций в $\mathbf{C}^n$.— В кн.: Конечно-разностные гладкости в задачах теории функций.— Киев : Изд. Ин-т математики АН УССР. 1977.— с. 23—27.

Житомирский филиал
Киевского политехнического института

Поступила в редакцию
01.12.81