УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Н. Решетняк

Об одной модификации ветвящегося процесса

Ветвящийся марковский процесс Гальтона—Ватсона η_t, $t \geqslant 0$ с непрерывным временем имеет локальные переходные вероятности вида ($h \to 0$)

$$p\{\eta_{t+h} = k + r - 1/\eta_t = k\} = \delta_{1r} + k\alpha_r h + o(h); \tag{1}$$

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 0 \tag{2}$$

(см. , напр., [1, с. 26]). Траектории его, очевидно, полунепрерывны снизу (в дискретной топологии).

Представляет интерес процесс ξ_t (в некотором смысле двойственный к η_+), траектории которого полунепрерывны сверху.

Более строго, пусть имеется однородный марковский процесс ξ_t, $t \geqslant 0$ ($\xi_t \in \{0, 1, \ldots\}$) заданный локальными переходными вероятностями

$$p\{\xi_{t+h} = k + 1 - r/\xi_t = k\} = \delta_{1r} + k\alpha_r h + o(h), \quad 0 \leqslant r \leqslant k, \tag{3}$$

$$p\{\xi_{t+h} = 0 \mid \xi_t = k\} = \delta_{0k} + k\hat{\alpha}_k h + o(h), \quad k \geqslant 0,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad \hat{\alpha}_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i,$$

а α_i ($i \geqslant 0$) — те же, что в (2).

Будем называть ξ_t «перевернутым» ветвящимся процессом. Обозначим $p_{kl}(t) = p\{\xi_t = l \mid \xi_0 = k\}$. Зафиксируем момент времени t, пусть $p\{\xi_t = l\} = 1$.

Из соотношений (3) получаем первую систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$p'_{kl}(t) = k\hat{\alpha}_k p_{0l}(t) + k\sum_{r=0}^{k} \alpha_r p_{k-r+1}(t), \quad k \geqslant 1, \quad p_{0l}(t) = \delta_{0l}, \quad l \geqslant 0.$$

Выполняя замену $p_{kl}(t) = kq_{kl}(t)$, $k \geqslant 1$, имеем

$$q'_{kl}(t) = \hat{\alpha}_k p_{0l}(t) + \sum_{r=0}^{k} \alpha_r (k - r + 1)\, q_{k-r+1,l}(t), \quad k \geqslant 1, \quad p_{0l}(t) = \delta_{0l}.$$

Обозначим ($s \geqslant 0$)

$$\tilde{p}_{kl}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_{kl}(t)\, dt, \quad \tilde{q}_{kl}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} q_{kl}(t)\, dt, \quad k \geqslant 1,$$

$$q_l(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}_{kl}(s)\, \theta^k; \qquad \alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \theta^k, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

После перехода к производящим функциям преобразований Лапласа искомых вероятностей получаем дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_l(s,\theta)}{\partial\theta} &= \frac{s}{\alpha(\theta)} q_l(s,\theta) + \frac{\alpha_0}{\alpha(\theta)} \tilde{p}_{1l}(s) - \frac{1}{l}\frac{\theta^l}{\alpha(\theta)}, \quad l \geqslant 1, \\ \frac{\partial q_0(s,\theta)}{\partial\theta} &= \frac{s}{\alpha(\theta)} q_0(s,\theta) + \frac{\alpha_0}{\alpha(\theta)} \tilde{p}_{10}(s) + \left(\frac{1}{1-\theta} - \frac{\alpha_0}{\alpha(\theta)}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи Коши (4) с начальным условием $q_l(s, 0) = 0$ для каждого фиксированного $l \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ имеет вид

$$q_l(s, \theta) = \exp\left\{s\int\limits_0^\theta \frac{du}{\alpha(u)}\right\}\int\limits_0^\theta \exp\left\{-s\int\limits_0^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right\}\left[\alpha_0\tilde{p}_{1l}(s) - \frac{u^l}{l}\right]\frac{du}{\alpha(u)}, \quad l \geqslant 1),$$

$$q_0(s, \theta) = \exp\left\{s\int\limits_0^\theta \frac{du}{\alpha(u)}\right\}\int\limits_0^\theta \exp\left\{-s\int\limits_0^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right\}\left[\frac{\alpha(u)}{1-u} - \alpha_0 + \alpha_0\tilde{p}_{10}(s)\right]\frac{du}{\alpha(u)}. \tag{5}$$

Функции $\tilde{p}_{1l}(s)$, $l \geqslant 0$, здесь неизвестны. Для их определения воспользуемся особенностями решения (5). Будем в дальнейшем предполагать существование $\alpha'(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\alpha_k < \infty$. Несложно доказать ([1, с. 53]), что минимальный положительный корень ρ функции $\alpha(\theta)$ равен единице, если $\alpha'(1) \leqslant 0$, и меньше ее, если $\alpha'(1) > 0$.

Легко заметить, что

$$\lim_{\theta\to\rho-0} \exp\left\{s\int\limits_0^\theta \frac{dv}{\alpha(v)}\right\} = \infty, \quad s > 0,$$

и для аналитичности функции $q_l(s, \theta)$ по θ необходимо выполнение условий

$$\int\limits_0^\rho \exp\left\{-s\int\limits_0^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right\}\left[\alpha_0\tilde{p}_{1l}(s) - \frac{u^l}{l}\right]\frac{du}{\alpha(u)} = 0, \quad l \geqslant 1,$$

$$\int\limits_0^\rho \exp\left\{-s\int\limits_0^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right\}\left[\frac{\alpha(u)}{1-u} - \alpha_0 + \alpha_0\tilde{p}_{10}(s)\right]\frac{du}{\alpha(u)} = 0.$$

Обозначим $H(u) = \int\limits_0^u \frac{dv}{\alpha(v)}$, $|u| \leqslant \rho$, а $G(t)$ — обратная к ней функция $0 \leqslant G(t) \leqslant \rho$. Она существует, так как $H(u)$ — строго монотонно возрастающая на $(0, \rho)$ функция. После замены $t = H(u)$ и преобразований имеем

$$\tilde{p}_{1l}(s) = \frac{s}{\alpha_0 l}\int\limits_0^\infty e^{-st}G^l(t)\,dt, \quad l \geqslant 1, \tag{6}$$

$$\tilde{p}_{10}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha_0}\int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{dG(t)}{1-G(t)}.$$

Заметим, что из определения функции $G(t)$ следует тождество

$$\int\limits_0^{G(t)} \frac{dv}{\alpha(v)} = t, \tag{7}$$

откуда $dG(t) = \alpha(G(t))\,dt$. Обращая последние соотношения, получаем

$$p_{1l}(t) = \frac{1}{\alpha_0}\alpha(G(t))\,G^{l-1}(t), \quad l \geqslant 1, \qquad p_{10}(t) = 1 - \frac{1}{\alpha_0}\frac{\alpha(G(t))}{1-G(t)}. \tag{8}$$

Таким образом, получены переходные вероятности процесса ξ_t: из единицы в явном виде (8), остальные — в виде преобразований Лапласа производящих функций (5).

Интересно отметить связь изучаемого «перевернутого» процесса ξ_t с классическим ветвящимся процессом η_t, имеющих одинаковую производящую функцию $\alpha(u)$. Известно [1, с. 54], что вероятность продолжения жизни $p\{\eta_t > 0 \mid \eta_0 = 1\} = Q(t)$ процесса η_t удовлетворяет соотношению $\int\limits_{Q(t)}^{1} \frac{du}{\alpha(1-u)} = t$, следовательно (см. (7)), $Q(t) = 1 - G(t)$. Сопоставляя сказанное с формулой (8), получаем теорему.

Теорема 1. *Вероятности продолжения жизни процесса Гальтона — Ватсона η_t, «перевернутого» ξ_t с одной производящей функцией $\alpha(u)$ ($|u| \leqslant 1$) при условии $p\{\xi_0 = 1\} = p\{\eta_0 = 1\} = 1$ связаны соотношением $\alpha_0 p\{\xi_t > 0\} p\{\eta_t > 0\} = \alpha(p\{\eta_t = 0\}) = \alpha(G(t))$.*

При исследовании «перевернутого» ветвящегося процесса ξ_t, в частности, при доказательстве эргодических теорем, можно, таким образом, воспользоваться известной асимптотикой функции $G(t) = p\{\eta_t = 0/\eta_0 = 1\}$.

Назовем «перевернутый» процесс докритическим, если $\alpha'(1) > 0$; критическим, если $\alpha'(1) = 0$, и надкритическим, если $\alpha'(1) < 0$.

Теорема 2. *При условии $\alpha''(1) \neq 0$ ($\alpha''(1) < \infty$) вероятность продолжения жизни критического процесса ξ_t имеет асимптотическое разложение*

$$p\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = 1\} = \frac{1}{\alpha_0 t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство. Для функции $G(t)$ (при условии $\alpha'(1) = 0$, что соответствует критическому случаю процесса Гальтона—Ватсона η_t) имеет место асимптотическая формула ($t \to \infty$)

$$G(t) = 1 - \frac{2}{\alpha''(1)t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

(см [1, с. 58]). Функцию $\alpha(\theta)$ можно разложить в окрестности единицы

$$\alpha(\theta) = \frac{\alpha''(1)}{2}(1-\theta)^2 + o((1-\theta)^2).$$

Следовательно,

$$p\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = 1\} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{\alpha(G(t))}{1 - G(t)} = \frac{\alpha''(1)}{2\alpha_0} \frac{2}{\alpha''(1)} \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha_0 t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Phi_k(t) = p\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = k\}$ вероятность продолжения жизни процесса ξ_t при условии выхода из состояния «k». В частности, $\Phi_1(t) = \frac{1}{\alpha_0} \alpha(G(t))[1 - G(t)]^{-1}$.

Из соотношений (3) легко вывести следующую систему дифференциальных уравнений для вероятностей $\Phi_k(t)$

$$\Phi_k'(t) = k \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{k-j+1} \Phi_j(t), \quad k \geqslant 1. \tag{9}$$

Отсюда, полагая $k = 1, 2, \ldots$, можно последовательно находить $\Phi_k(t)$ для произвольного k. Ниже будут найдены асимптотические формулы для вероятностей продолжения жизни для критического, надкритического и докритического «перевернутого» процесса. В частности, имеет место следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2*

$$p\{\xi_t>0\mid\xi_0=n\}=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}k\nu_{n-k}+o\left(\frac{1}{t}\right),\quad t\to\infty,\quad n\geqslant 1,$$

где последовательность ν_k, $k\geqslant 0$, *задана своей производящей функцией*

$$\nu(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k\theta^k=\frac{(1-\theta)^2}{\alpha(\theta)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 существует $\lim_{t\to\infty}t\Phi_1(t)$. Полагая в соотношении (9) последовательно $k=1,2,\ldots$, убеждаемся, что существуют $\lim_{t\to\infty}t\Phi_k(t)=c_k$, $k\geqslant 1$, где c_k — некоторые неотрицательные числа. Для их определения умножим (8) на t и перейдем к пределу при $t\to\infty$. Получим

$$\sum_{j=1}^{k+1}\alpha_{k-j+1}c_j=0,\quad k\geqslant 0,\quad c_1=\alpha_0^{-1}. \tag{10}$$

Положим $c_0=0$, $c(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\theta^k=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\theta^k$, $|\theta|\leqslant 1$. После перехода в (10) к производящим функциям, получаем

$$\alpha(\theta)c(\theta)=\alpha_0c_1\theta,\quad c(\theta)=\theta\alpha^{-1}(\theta),\quad (1-\theta)^2c(\theta)=\theta(1-\theta)^2\alpha^{-1}(\theta). \tag{11}$$

Функция $\nu(\theta)=(1-\theta)^2\alpha^{-1}(\theta)$ аналитична $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$, единственный корень кратности 2 равен единице, следовательно, ее можно представить в виде $\nu(\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\theta^i$. Из (11) имеем $c_1=\nu_0$, $c_2-2c_1=\nu_1$, $c_i-2c_{i-1}+{}$ ${}+c_{i-2}=\nu_{i-1}$, $i\geqslant 3$, откуда, складывая по i от 1 до n, а затем по n от 1 до m, получаем $c_m=\sum_{k=1}^{m}k\nu_{m-k}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Для надкритического процесса* ξ_t

$$\lim_{t\to\infty}p\{\xi_t>0\mid\xi_0=n\}=-\alpha'(1)\sum_{k=0}^{n}b_k,$$

где b_k, $k\geqslant 0$, *имеет производящую функцию вида*

$$b(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\theta^k=\frac{1-\theta}{\alpha(\theta)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Доказательство проводится аналогично. Переходим к пределу по $t\to\infty$ в (9) (он существует) $\alpha_0\mu_{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k-j+1}\mu_j=0$, $k\geqslant 1$, или в терминах производящих функций

$$\alpha(\theta)\mu(\theta)=\theta\alpha_0\mu_1,\quad |\theta|\leqslant 1, \tag{12}$$

где

$$\mu_i=\lim_{t\to\infty}\Phi_i(t),\ \mu(\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\theta^i,\quad \mu_1=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\alpha_0}\frac{\alpha(G(t))}{1-G(t)}=$$
$$=-\frac{\alpha'(1)}{\alpha_0},\quad (1-\theta)\mu(\theta)=-\alpha'(1)\theta(1-\theta)\alpha^{-1}(\theta).$$

Функция $b(\theta)=(1-\theta)\alpha^{-1}(\theta)$ аналитична для $0\leqslant\theta\leqslant 1$, т. к. в рассматриваемом случае $\alpha'(1)<0$ минимальный положительный корень функции $\alpha(\theta)$ равен единице. Из равенства (12) получаем

$$\mu_n = -\alpha'(1)\sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Приведем, наконец, аналогичный результат для докритического процесса.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha''(1) < \infty$, $\alpha'(1) > 0$. *Тогда имеет место асимптотическая* формула $p\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = k\} = \gamma_k e^{at}(1+o(1))$, *где* $a = -\alpha'(\rho) > 0$, *а* γ_k, $k \geqslant 0$ *имеет производящую функцию вида*

$$\gamma(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \theta^k = \frac{\theta}{\alpha(\theta)} \exp\left\{-a\int_0^{\theta}\frac{du}{\alpha(u)}\right\}. \tag{13}$$

Доказательство. ρ, как было указано, — минимальный положительный корень $\alpha(u)$. Заметим, что в случае $\alpha'(1) > 0$ он простой и $\rho < 1$. Поэтому функция $z(u) = (\rho - u)\alpha^{-1}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ ограничена и положительна. Пусть

$$X(u) = \int_0^u \frac{z(v) - z(\rho)}{\rho - v}\,dv, \quad 0 \leqslant u \leqslant \rho.$$

Этот интеграл существует и непрерывен по u. При $u \to \rho$

$$\lim_{u\to\rho}\frac{z(u) - z(\rho)}{\rho - u} = -\frac{\alpha''(\rho)}{2[\alpha'(\rho)]^2} < \infty.$$

Из тождества (7), следует, что

$$t = \int_0^{G(t)}\frac{du}{\alpha(u)} = \int_0^{G(t)} z(u)\frac{du}{\rho - u} = \int_0^{G(t)}\frac{z(u) - z(\rho)}{\rho - u}\,du + z(\rho)\int_0^{G(t)}\frac{du}{\rho - u} =$$

$$= X(G(t)) + z(\rho)\ln\frac{\rho}{\rho - G(t)},$$

откуда

$$\rho - G(t) = \rho e^{X(G(t))z^{-1}(\rho)} e^{-tz^{-1}(\rho)},$$

$$\lim_{t\to\infty}[\rho - G(t)]\,e^{at} = \rho\lim_{t\to\infty} e^{X(G(t))z^{-1}(\rho)} = \rho e^{aX(\rho)},$$

$$a = \frac{1}{z(\rho)} = \lim_{u\to\rho}\frac{\alpha(u)}{\rho - u} = -\alpha'(\rho) > 0.$$

Выше было показано, что

$$\Phi_1(t) = \alpha(G(t))\,\alpha_0^{-1}(1 - G(t))^{-1}, \tag{14}$$

и так как $\alpha(G(t)) = -\alpha'(\rho)(\rho - G(t)) + o(G(t) - \rho)$, то, домножив обе части равенства (14) на e^{at} и перейдя к пределу по $t \to \infty$, получим

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_1(t)\,e^{at} = \gamma_1, \tag{15}$$

где

$$\gamma_1 = e^{aX(\rho)}\frac{-\alpha'(\rho)\rho}{\alpha_0(1 - \rho)},$$

$$\Phi_1'(t) = \left[\frac{\alpha(G(t))}{\alpha_0(1 - G(t))}\right]' = \Phi_1(t)\left[\alpha'(G(t)) + \frac{1}{1 - G(t)}\right].$$

Ввиду аналитичности функций $G(t) \leqslant \rho < 1$, $\alpha(u)$, $|u| \leqslant 1$, из последней формулы следует, что $\Phi_1(t)$ бесконечное число раз дифференцируема. Более того, существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi^{(i)}(t) e^{at}$, $i \geqslant 1$. Соотношения (9) позволяют выразить $\Phi_k(t)$ через конечную сумму $\Phi_1(t)$ и ее производных. Следовательно, существуют $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi_k(t) e^{at} = \gamma_k$, $k \geqslant 1$. Для нахождения γ_k, $k \geqslant 1$, домножим (9) на e^{at} и перейдем к пределу ($t \to \infty$). Имеем $-a\gamma_k = k \sum\limits_{j=1}^{k+1} \alpha_{k-j+1}\gamma_j$. После перехода к производящим функциям получаем уравнение $-a\theta\gamma(\theta) = \theta\gamma'(\theta)\alpha(\theta) + \theta\gamma(\theta)\alpha'(\theta) - \gamma(\theta)\alpha(\theta)$, $\gamma(0) = 0$, решением которого и является (13).

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М.: Наука, 1971.— 436 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
18.12.81