1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 35, № 1

УДК 519.50:54

В. В. Маслов

Частный случай гиперпространств полусинтопогенных пространств

Предлагаемая статья посвящена изучению гиперпространств полусинтопогенных пространств (по аналогии с гиперпространствами топологических пространств).

Предложение 1. *Пусть $[X;\ S]$ — некоторое полусинтопогенное пространство, а $[\mathcal{P}(X);\ S_\varkappa]$ — его гиперпространство. Для того чтобы кла с $U((A))$-окрестностей точки $(A)\in\mathcal{P}(x)$ образовывал фильтр, необходимо и достаточно, чтобы класс $\{B\colon (B)\in\mathcal{P}(X)\ \&\ (\exists<\in S)\ (A<B)$ является фильтром.*

Достаточность. Пусть $V_1^*,\ V_2^*\in U((A))$, так что $(A)<_{1\varkappa}V_1^*$ и $(A)<_{2\varkappa}V_2^*$ при $<_{1\varkappa}\in S_\varkappa$ и $<_{2\varkappa}\in S_\varkappa$. Пусть полутопогенный порядок $<_{3\varkappa}\in\in S_\varkappa$ мажорирует порядки $<_{1\varkappa}$ и $<_{2\varkappa}$. Тогда $(A)<_{3\varkappa}V_1^*$ и $(A)<_{3\varkappa}V_2^*$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_{3\varkappa}$ существуют такие части $u_1,\ V_1,\ u_2,\ V_2$ класса X, что $(A)\in\{(W):W\subset U_i\}$, $\{(W):W\subset V_i\}\subset V_i^*$, $U_i<<_3V_i$, $i=1,2$. Так как $A\subset U_i$, то $A<_3V_i$, $i=1,2$. Пусть полутопогенный порядок $<\in S$ таков, что $A<V_1\cap V_2$. Тогда $\{(W):W\subset A\}<_\varkappa\{(W)::W\subset V_1\cap V_2\}$. Поскольку $A\subset A$, то $(A)\in\{(W):W\subset A\}$. Далее, из очевидного равенства $\{(W):W\subset V_1\cap V_2\}=\{(W):W\subset V_1\}\cap\{(W):W\subset V_2\}$ получаем $\{(W):W\subset V_1\cap V_2\}\subset V_1^*\cap V_2^*$. Итак, $(A)<_\varkappa V_1^*\cap V_2^*$.

Необходимость. Пусть $A<_1B_1$ и $A<_2B_2$ при $<_1,\ <_2\in S$. Если $<\in S$ — полутопогенный порядок, мажорирующий поря ки $<_1$ и $<_2$, то $A<B_i$, $i=1,2$. Поэтому $(A)<_\varkappa\{(W):W\subset B_i\}$, $i=1,2$, так что

$$(A)<_\varkappa\{(W):W\subset B_1\}\cap\{(W):W\subset B_2\}=\{(W):W\subset B_1\cap B_2\}.$$

Если $U,\ V$ — такие части класса X, что $U<V$ и $(A)\in\{(W):W\subset U\}$, $\{(W):W\subset V\}\subset\{(W):W\subset B_1\cap B_2\}$, то отсюда получаем $A\subset U$ и $V\subset B_1\cap B_2$, а затем $A<B_1\cap B_2$.

Следствие 1. *Если каждый порядок $<\in S$ «замкнут» относительно конечных пересечений, то класс $S_\varkappa$-окрестностей каждой точки пространства $[\mathcal{P}(X);\ S_\varkappa]$ образует фильтр.*

Следствие 2. *Если $[X;\ S]$ — синтопогенное пространство, то класс $S_\varkappa$-окрестностей каждой точки пространства $[\mathcal{P}(X);\ S_\varkappa]$ образует фильтр.*

Предложение 2. *Пусть $[X;\ S]$ — некоторое полусинтопогенное пространство, а $[\mathcal{P}(X);\ S_\lambda]$ — его гиперпространство. Для того чтобы класс S_λ-окрестностей точки $(A)\in P(x)$ был фильтром, необходимо и достаточно, чтобы класс $\{B:(B)\in\mathcal{P}(X)\ \&\ (\exists<\in S)\ (A<B)\}$ был фильтром.*

Следствие 1. *Если каждый полутопогенный порядок $<\in S$ «замкнут» относительно конечных пересечений, то класс S_λ-окрестностей каждой точки пространства $[P(X);\ S_\lambda]$ образует фильтр.*

Следствие 2. *Если $[X;\ S]$ — синтопогенное пространство, то класс S_λ окрестностей каждой точки пространства $[\mathcal{P}(X);\ S_\lambda]$ является фильтром.*

Замечание. Доказательство предложения 2 аналогично доказательству предложения 1.

Рассмотрим некоторые свойства открытых и замкнутых подклассов полусинтопогенного пространства.

Определение 1. *Точку x_0 называют точкой прикосновения подкласса A полусинтопогенного пространства $[X; S]$, если класс $B(x_0)$ всех S-окрестностей этой точки образует фильтр и* $(\forall V)(V \in B(x_0) \to V \cap A \neq \varnothing)$. *Класс всех точек прикосновения класса A обозначается символом $S[A]$ и называется замыканием класса A* (*относительно полусинтопогенной структуры S*).

Замечание. Соотношение $A \subset S[A]$, вообще говоря, не имеет места.

Определение 2. *Класс B называется S-замкнутым в полусинтопогенном пространстве $[X; S]$, если $S[B] \subset B$.*

Определение 3. *Класс P называется S-открытым в полусинтопогенном пространстве $[X; S]$, если найдется хотя бы один полутопогенный порядок $< \in S$ такой, что $P < P$.*

Замечание. Можно доказать, что класс $X \setminus P$ S-замкнут всегда, когда S-открыт класс P. Обратное утверждение неверно, так что существуют такие S-замкнутые классы B, для которых класс $X \setminus B$ не является S-открытым.

Для того чтобы в синтопогенном пространстве $[X; S]$ S-открытые и S-замкнутые классы были взаимно дополнительными, необходимо и достаточно, чтобы структура S^t была топологией. С другой стороны, существуют полусинтопогенные пространства, не являющиеся синтопогенными, но удовлетворяющие сформулированному требованию.

Определение 4. *Полусинтопогенное пространство $[X; S]$ называется V-пространством, если в нем S-открытые и S-замкнутые классы взаимно дополнительны.*

Определение 5. *Полусинтопогенное пространство $[X; S]$ называется δ-пространством, если каждый класс $B(x)$, $x \in X$, является фильтром.*

Очевидно, каждое синтопогенное пространство является δ-пространством.

Пример. Пусть Q — часть множества $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел, состоящая из следующих элементов: 1) открытых в классической топологии числовой прямой множеств; 2) открытых в классической топологии множеств, объединенных с отрезком $[-1; 1]$; 3) $\varnothing$, $\mathbf{R}$, $[-1; 1]$. Положим $A < B$ тогда и только тогда, когда $A \subset G \subset B$ при некотором $G \in Q$. Получающееся полусинтопогенное пространство $[\mathbf{R}; \{<\}]$ не является топологическим и δ-пространством. Легко понять, что если из $\mathbf{R}$ удалить некоторое конечное подмножество, то получающееся при этом подпространство становится V- и δ- пространством.

Определение 6. *Класс A называется всюду плотным в полусинтопогенном пространстве $[X; S]$, если $S[A] = X$.*

Предложение 3.1. *Каков бы ни был подкласс A_0 полусинтопогенного пространства $[X; S]$, справедливо включение* $\{(A) : A \subset S[A_0]\} \subset S_\lambda[(A_0)]$.

Доказательство. Пусть $A \subset S[A_0]$ и $(A) <_\lambda O$ при $<_\lambda \in S_\lambda$ и $O \in \mathcal{P}(X)$. По определению порядка $<_\lambda$ можно найти такие части U, V класса X, что $U < V$, $A \subset U$, $\{(W) : W \cap V \neq \varnothing\} \subset O$. Очевидно, $(A) <_\lambda \{(W) : W \cap V \neq \varnothing\}$.

Если $x \in A$, то $\{x\} < V$, так что $A_0 \cap V \neq \varnothing$, а потому $(A_0) \in \{(W) : W \cap V \neq \varnothing\}$. Следовательно, $(A_0) \in O$. Итак, $(A) \in S_\lambda[(A_0)]$.

Предложение 3.2. *Если в условиях предыдущего предложения дополнительно считать, что $[X; S]$ есть V- и δ-пространство, то окажется справедливым обратное включение.*

В самом деле, допустим, что $(A) \in S_\lambda[(A_0)]$ и $A \not\subset S[A_0]$. Найдем полутопогенный порядок $< \in S$ так, чтобы $X \setminus S[A_0] < X \setminus S[A_0]$ и обозначим $O = \{(W) : W \cap (X \setminus S[A_0]) \neq \varnothing\}$. Получим соотношения $A <_\lambda O$ и $A_0 \cap$

$\cap (X \setminus S[A_0]) \neq \varnothing$, из которых заключаем, что класс O есть $<_\lambda$-окрестность точки (A), не содержащая точку (A_0).

Предложение 3.3. *Для каждого подкласса A_0 полусинтопогенного пространства $[X; S]$ справедливо соотношение включения*

$$S_\lambda[(A_0)] \subset \{(A) : (\forall < \in S)\ (\forall V \subset X)\ (A < V \Rightarrow A_0 \cap V \neq \varnothing)\}.$$

Доказательство. Пусть $(A) \in S_\lambda[(A_0)]$ и $A < V$ при $< \in S$, $V \subset X$. Тогда $(A) <_\lambda \{(W) : W \cap V = \varnothing\}$, так что $(A_0) \in \{(W) : W \cap V \neq \varnothing\}$, а потому $A_0 \cap V \neq \varnothing$.

Следствие 1. *Если полусинтопогенное пространство $[X; S]$ таково, что $S[X] = X$, то $S_\lambda[(X)] = \mathscr{P}(X)$.*

Действительно, $S_\lambda[(X)] \supset \{(A) : A \subset S[X]\} = \{(A) : A \subset X\} = \mathscr{P}(X)$.

Замечание. Результат следствия 1 верен, например, для δ-пространств (и в частности, для синтопогенных пространств).

Следствие 2. *Если $[X; S]$ — полусинтопогенное δ-пространство, то каждая, S_λ-замкнутая часть A пространства $[P(X); S_\lambda]$, отличная от $P(X)$, не содержит точку (X).*

Следствие 3. *Если $[X; S]$ — полусинтопогенное δ-пространство, то каждая S_λ-открытая часть B пространства $[\mathscr{P}(X); S_\lambda]$ содержит точку (X).*

В самом деле, класс $P(X) \setminus B$ является S_λ-замкнутым и не содержащим точку (X).

Следствие 4. *Полусинтопогенное пространство $[P(X); S_\lambda]$, соответствующее полусинтопогенному δ-пространству $[X; S]$, является S_λ-связным.*

Следствие 5. *Предположим, что полусинтопогенное δ-пространство $[X; S]$ удовлетворяет следующему условию: (S_2') каждому полутопогенному порядку $< \in S$ соответствует такой полутопогенный порядок $<_1 \in S$, что каждое соотношение вида $U < V$ влечет возможность выбора такой части W класса X, что $U \subset W <_1 W \subset V$. В таком случае пространство $[\mathscr{P}(X); S_\lambda]$ тоже удовлетворяет условию (S_2'). При этом каждая часть A класса $\mathscr{P}(X)$, содержащая точку (X) (в частности, каждая S_λ-открытая часть), является всюду плотной в пространстве $[\mathscr{P}(X); S_\lambda]$.*

В самом деле, если $(Y) \in \mathscr{P}(X)$ и $(Y) <_\lambda V$, то $(Y) \in U <_{1\lambda} U \subset V$. Так как класс U является S_λ-открытым, то, согласно следствию 3 $(X) \in U$. Поэтому $(X) \in V$ и $V \cap A \neq \varnothing$. Иначе говоря, $S_\lambda[A] = \mathscr{P}(X)$.

Замечание. Условие (S_2') есть очевидное усиление аксиомы (S_2) из определения полусинтопогенной структуры. Условию (S_2') удовлетворяют, например, все топологические пространства. Заметим, что, вообще говоря, полусинтопогенное пространство $[X;S]$, удовлетворяющее условию (S_2'), не является топологическим, ибо оно может и не быть синтопогенным. В работе [1] полусинтопогенные пространства указанного типа назывались τ^*-пространствами.

Предложение 4. *В каждой S_λ-окрестности любой точки пространства $[\mathscr{P}(X); S_\lambda]$ содержится хотя бы одна точка класса $\{(A) : A \subset X \& A$ — конечное$\}$. В частности, если $[X; S]$ — δ-пространство, то указанный класс всюду плотный в пространстве $[\mathscr{P}(X); S_\lambda]$.*

Доказательство. Если $(B) <_\lambda V^*$, то найдутся такие части U, V класса X, что $U < V$, $(B) \in \{(W) : W \cap U \neq \varnothing\}$, $\{(W) : W \cap V \neq \varnothing\} \subset V^*$. Выберем произвольный класс $W : W \cap V \neq \varnothing$, а затем в классе $W \cap V$ — произвольную конечную часть A. Тогда $(A) \in V^*$ и $A \in \{(A) : A \subset X \& A$ — конечно$\}$.

Предложение 5.1. *Если отображение $f : [X; S] \to [Y; S]$ $(S; S)$-непрерывно, то отображение $\hat{f} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$, определяемое правилом $(A) \to (f(A))$, если $(A) \in \mathscr{P}(X)$, является $(S_\lambda; S_\lambda)$-непрерывным.*

Доказательство. Каждый полутопогенный порядок $<_\lambda \in S_\lambda$ определяется полутопогенным порядком $< \in S$, для которого в структуре S найдется полутопогенный порядок $<_1$, мажорирующий полутопогенный порядок $f^{-1}(<)$. Допустим, что $A \hat{f}^{-1}(<_\lambda) B$; найдем части A_1, B_1 класса

$\mathscr{P}(Y)$ так, что $A_1 <_\lambda B_1$, $A \subset \hat{f}^{-1}(A_1)$ и $\hat{f}^{-1}(B_1) \subset B$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_\lambda$ соотношение $A_1 <_\lambda B_1$ равносильно существованию таких частей U, V класса Y, что $U < V$, $A_1 \subset \{(W) : W \cap U \neq \varnothing\}$, $\{(W) : W \cap V \neq \varnothing\} \subset B_1$. Тогда $f^{-1}(U) <_1 f^{-1}(V)$ и $\{(W) : W \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing\} < <_{1\lambda} \{(W) : W \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing\}$. Если $(M) \in A$, то $(M) \in \hat{f}^{-1}(A_1)$, так что найдется такая часть M_1 класса Y, что $\hat{f}((M)) = (M_1)$. Поэтому $M_1 \cap U \neq \varnothing$ и $\varnothing \neq f^{-1}(M_1 \cap U) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(U)$. Следовательно, $(f^{-1}(M_1)) \in \{(W) : W \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing\}$. Поскольку $f^{-1}(M_1) = M$, то $(M) \in \{(W) : W \cap f^{-1}(U) \neq \neq \varnothing\}$. Итак, $A \subset \{(W) : W \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing\}$. С другой стороны, если $(N) \in \in \{(W) : W \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing\}$, то $N \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, так что $\varnothing \neq f(N \cap \cap f^{-1}(V)) \subset f(N) \cap f(f^{-1}(V)) \subset f(N) \cap V$. Поэтому $(f(N)) \in B_1$ и $\hat{f}^{-1}((f(N))) \in \in B$, так что $(N) \in B$. Итак, $\{(W) : W \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing\} \subset B$. Проведенные рассуждения показывают, что $A <_{1\lambda} B$.

Следствие. *Если полусинтопогенные пространства $[X; S]$ и $[Y : S]$ изоморфны, то изоморфны полусинтопогенные пространства $[\mathscr{P}(x); S_\lambda]$ и $[\mathscr{P}(Y); S_\lambda]$.*

Предложение 5.2. *Если отображение $\hat{f} : (\mathcal{P}(X); S_\lambda] \to \mathcal{P}(Y); S_\lambda]$ $(S_\lambda; S_\lambda)$-непрерывно, то отображение $f : [X; S] \to [Y : S]$ $(S; S)$-непрерывно.*

Доказательство. Каждый полутопогенный порядок $< \in S$ определяет полутопогенный порядок $<_\lambda \in S_\lambda$. Пусть $<_{1\lambda}$ — полутопогенный порядок структуры S_λ, мажорирующий порядок $\hat{f}^{-1}(<_\lambda)$. Покажем, что полутопогенный порядок $<_1 \in S$, определяющий порядок $<_{1\lambda}$, мажорирует полутопогенный порядок $f^{-1}(<)$.

Пусть $A f^{-1}(<) B$, так что существуют такие A_1, $B_1 \subset Y$, что $A_1 < B_1$, $A \subset f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(B_1) \subset B$, Положив

$$A_1^* = \{(W) : W \cap A_1 \neq \varnothing\}, \quad B_1^* = \{(W) : W \cap B_1 \neq \varnothing\},$$

найдем $A_1^* <_\lambda B_1^*$. Отсюда $\hat{f}^{-1}(A_1^*) <_{1\lambda} \hat{f}^{-1}(B_1^*)$. Пусть части U, V класса X таковы, что $U <_1 V$, $\hat{f}^{-1}(A_1^*) \subset \{(W) : W \cap U \neq \varnothing\}$, $\{(W) : W \cap V \neq \varnothing\} \subset \subset \hat{f}^{-1}(B_1^*)$. Покажем, что $A \subset U$ и $V \subset B$.

Если $x \in A$, то $x \in f^{-1}(A_1)$, так что $f(x) \in A_1$, а потому $(f(x)) \in A_1^*$. Отсюда $\hat{f}^{-1}(f(x)) \in \hat{f}^{-1}(A_1^*)$. Поскольку $\hat{f}^{-1}(f(x)) \cap U \neq \varnothing$, то $x \in U$. Если $x \in \in V$, то $\{x\} \subset V$, т. е. $(x) \in \hat{f}^{-1}(B_1^*)$, а потому $\hat{f}((x) \in B_1^*$. Следовательно, $\hat{f}((x)) \cap B_1 \neq \varnothing$, так что $(f(x)) \cap B_1 \neq \varnothing$ и $f(x) \in B_1$. Остается воспользоваться соотношениями $x \in f^{-1}(f(x))$ и $f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(B_1)$ для получения соотношения $x \in B$. Итак, $A <_1 B$.

Следствие. *Если пространства $[\mathcal{P}(X); S_\lambda]$ и $[\mathcal{P}(Y); S_\lambda]$ изоморфны, то таковы же и пространства $[X; S]$ и $[Y; S]$.*

Теорема 1. *Полусинтопогенные пространства $[\mathcal{P}(x); S_\lambda]$ и $]\mathcal{P}(Y); S_\lambda]$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны пространства $[X; S]$ и $[Y; S]$.*

Теорема 2. *Если полусинтопогенное пространство $[X; S]$ обладает следующим свойством: каково бы ни было семейство $(V_x)_{x \in X}$ S-окрестностей, существует такая конечная часть класса X, например, $x_i \in X$, $i = = 1, 2, \dots p$, что $\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i} = X$, то аналогичным свойством обладает пространство $[\mathcal{P}(X); S_\lambda]$.*

Доказательство. Если $((M) <_{(M)\lambda} V^*_{(M)})_{(M) \in \mathscr{P}(X)}$, то $(M <_{(M)} V_{(M)})_{(M) \in \mathscr{P}(X)}$, где полутопогенный порядок $<_{(M)}$ определяет полутопогенный порядок $<_{(M)\lambda}$, а $\{(W) : W \cap V_{(M)} \neq \varnothing\} \subset V^*_{(M)}$. Выделим из полученного семейства подсемейство, соответствующее одноэлементным частям класса X:

$(\{x\}<_{\{x\}}V_{\{x\}})_{x\in X}$. Пусть конечное подсемейство $(\{x_i\}<_{\{x_i\}}V_{\{x_i\}})_{1\leqslant i\leqslant p}$ этого семейства таково, что $\bigcup_{i=1}^{p} V_{\{x_i\}}=X$. Тогда

$$(x_i)<_{(x_i)\lambda}\{(W)\}:W\cap V_{(x_i)}\neq\varnothing\}\subset V^*_{(x_i)}.$$

Так как $\bigcup_{i=1}^{p}\{(W):W\cap V_{(x_i)}\neq\varnothing\}=\mathcal{P}(X)$, то $\bigcup_{i=1}^{p}V^*_{(x_i)}=\mathcal{P}(X)$.

Замечание 1. В случае топологических пространств доказанная теорема выглядит так: если топологическое пространство $[X;\{<\}]$ компактно, то пространство $[\mathcal{P}(X);\{<^q_\lambda\}]$ тоже компактно.

Укажем, однако, что в понятие компактности мы не включаем здесь требование какой-либо отделимости.

Замечание 2. Из определения структуры S_λ вытекает, что каждые S_λ-окрестности произвольных точек пространства $[P(X);S_\lambda]$ имеют непустое пересечение (они, содержат, например, точку (X)). Таким образом, говорить, например, о T_2-отделимости пространства $[P(X);S_\lambda]$ не имеет смысла.

Определение 7. *Говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ сходится в полусинтопогенном пространстве $[X;S]$ (или относительно полусинтопогенной структуры S) к точке $a\in X$, если выполняются следующие условия: 1) класс $\mathcal{B}(a)$ всех S-окрестностей точки a образует фильтр; 2) фильтр $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр $\mathcal{B}(a)$; при этом точка a называется пределом фильтра $\mathcal{F}$ и обозначается записью $a=\lim\mathcal{F}(S)$.*

Определение 8. *Фильтр $\mathcal{F}$ называется фундаментальным фильтром (или фильтром Коши) в полусинтопогенном пространстве $[X;S]$, если каждому порядку $<\in S$ соответствует такой класс $F_<\in\mathcal{F}$, что соотношение $A<B\ \&\ A\cap F_<\neq\varnothing$ влечет соотношение $F_<\subset B$. Полусинтопогенное пространство $[X;S]$ называется полным, если каждый фундаментальный фильтр в нем сходится.*

Определение 9. *Фильтр $\mathcal{F}$ называется круглым в полусинтопогенном пространстве $[X;S]$, если для каждого соотношения $A<B$, $<\in S$, найдется такой класс $F\in\mathcal{F}$, который имеет непустое пересечение либо с A (тогда $F\cap(X\setminus B)=\varnothing$), либо с $X\setminus B$ (тогда $F\cap A=\varnothing$). Полусинтопогенное пространство $[X;S]$ называется компактным, если каждый его круглый фильтр сходится.*

Предложение 6.1. *Если $\mathcal{F}$ есть фильтр Коши в полусинтопогенном пространстве $[X;S]$, то класс*

$$\overline{\mathcal{F}}=\{F:F\supset\{(W):W\subset F\}\ \&\ F\in\mathcal{F}\}$$

есть фильтр Коши в полусинтопогенном пространстве $[\mathcal{P}_0(X);S^0_\lambda]$. Здесь положено $\mathcal{P}_0(X)=\mathcal{P}(X)\setminus(\varnothing)$, $S^0_\lambda=S_\lambda\,|\,\mathcal{P}_0(X)$.

Доказательство. Проверка того факта, что $\overline{\mathcal{F}}$ есть фильтр в классе $\mathcal{P}_0(X)$, довольно элементарна.

Каждый полутопогенный порядок $<_\lambda\in S^0_\lambda$ определяется полутопогенным порядком $<\in S$. Пусть $F_<$ — тот элемент фильтра $\mathcal{F}$, который удовлетворяет определению 8. Покажем, что элемент $\overline{F}_<=\{(W):W\subset F_<\}$ фильтра $\overline{F}$ удовлетворяет этому определению.

Предположим, что $A^*<_\lambda B^*$ и $A\cap\overline{F}_<\neq\varnothing$. Пусть U и V — такие части класса X, что $U<V$, $A^*\subset\{(W):W\cap U\neq\varnothing\}$, $\{(W:W\cap V\neq\varnothing\}\subset B^*$. Если $(W)\in A^*\cap\overline{F}_<$, то $(W)\in A^*$ и $(W)\in\overline{F}_<$, так что $W\cap U\neq\varnothing$ и $W\subset F_<$. Отсюда $F_<\cap U\neq\varnothing$. Следовательно, $F_<\subset V$. Наконец, $\overline{F}_<=\{(W):W\subset F_<\}\subset\{(W):W\subset V\}\subset B^*$.

Предложение 6.2. *Если $\mathcal{F}$ — круглый фильтр в полусинтопогенном пространстве $[X;S]$, то фильтр $\overline{\mathcal{F}}$, определенный в предыдущем предложении, круглый в пространстве $[\mathcal{P}_0(X);S^0_\lambda]$.*

Доказательство. Пусть $A^* <_\lambda B^*$, так что существуют такие части A и B класса X, что $A < B$, $A^* \subset \{(W) : W \cap A \neq \varnothing\}$, $\{(W) : W \cap B \neq \neq \varnothing\} \subset B^*$. Если считать, что $A^* \cap F \neq \varnothing$, то это означает, что $\varnothing \neq A^* \cap \{(W) : W \subset F\} \subset \{(W) : W \subset A\} \cap \{(W) : W \subset F\} = \{(W) : W \subset A \cap F\}$. Поэтому $A \cap F \neq \varnothing$. Тогда из определения 9 вытекает $F \subset B$. Отсюда $\{(W) : W \subset F\} \subset \{(W) : W \subset B\}$. Поскольку $(\mathcal{P}_0(X) \setminus B^*) \cap F \subset \{\mathcal{P}_0(X) \setminus \{(W) : W \subset B\}) \cap \{(W) : W \subset F\} = \{(W) : W \not\subset B\} \cap \{(W) : W \subset F\}$, то $(\mathcal{P}_0(X) \setminus B^*) \cap \overline{F} = \varnothing$. С другой стороны, если $(\mathcal{P}_0(X) \setminus B^*) \overline{F} \neq \varnothing$, то существует такой W_0, что $W_0 \subset F$ и $W_0 \not\subset B$. Так как $W_0 \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$, то $F \cap (X \setminus B) \neq \neq \varnothing$, а потому $F \cap A = \varnothing$. Но в таком случае $\overline{F} \cap A^* = \varnothing$.

Предложение 6.3. *Если $\mathcal{F}$ — такой фильтр в классе $\mathcal{P}_0(X)$, что* $(\forall F)$ $(\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow \overline{F} \cap X \neq \varnothing\}$, *то $\overline{\mathcal{F}} \mid X$ — фильтр в классе X. При этом, если $\overline{\mathcal{F}}$ — фундаментальный (круглый), то $\overline{\mathcal{F}} \mid X$ — фундаментальный (круглый).*

Теорема 3. *Полусинтопогенное пространство $[X;\ S]$ полное тогда и только тогда, когда каждый фундаментальный фильтр $\mathcal{F}$ в $\mathcal{P}_0(X)$, удовлетворяющий условию предложения 6.3., сходится относительно структуры S^0_λ к некоторой точке (x), где $x \in X$.*

Доказательство. Предположим сначала, что пространство $[X;S]$ полно. Если $\overline{\mathcal{F}}$ — фундаментальный фильтр в $\mathcal{P}_0(X)$, удовлетворяющий условию предложения 6.3, то $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ X — фундаментальный фильтр в X. Пусть $x = \lim \mathcal{F}(S)$, тогда $(x) - \lim \overline{\mathcal{F}}(S^0_\lambda)$.

Обратно, пусть выполняется требование условия теоремы. Если $\mathcal{F}$ — фильтр Коши в пространстве $[X;\ S]$, то $\overline{\mathcal{F}} = \{F : \overline{F} \supset \{(W) : W \subset F\}\ \&\ F \in \mathcal{F}\}$ есть фильтр Коши в пространстве $[\mathcal{P}_0(X);\ S^0_\lambda]$, причем, $\mathcal{F} \mid X = \mathcal{F}$. Пусть $(x) = \lim \overline{\mathcal{F}}(S^0_\lambda)$, где $x \in X$. Тогда $x = \lim \mathcal{F}(S)$.

Теорема 4. *Полусинтопогенное пространство $[X;\ S]$ компактно тогда и только тогда, когда каждый круглый фильтр $\overline{\mathcal{F}}$ в пространстве $[\mathcal{P}_0(X);\ S^0_\lambda]$, удовлетворяющий условию предложения 6.3, сходится относительно структуры S^0_λ к некоторой точке (x), где $x \in X$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Маслов В. В.* Полусинтопогенные пространства. — Учен. зап. Моск. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, № 277, с. 129—143.
2. *Császár Ю.* Grundlagen der allgemeinen Topologie.— Budapest: Akad. Kiadó, 1963.— 362 S
3. *Маслов В. В.* Связные полусинтопогенные пространства.— Ворошиловград, 1978.—10 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2472—76 78 Деп.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.02.79