УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. О. Чайченко (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ЯДРА КОШІ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

We compute the values of the best approximations of the Cauchy kernel on the real axis $\mathbb{R}$ by some subspaces from $L_q(\mathbb{R})$. This result is applied to the evaluation of the exact upper bounds for pointwise deviations of certain interpolation operators with interpolation nodes in the upper half plane and certain linear means of the Fourier series in the Takenaka–Malmquist system from the functions in a unit ball of the Hardy space H_p, $2 \le p < \infty$.

Вычислены величины наилучших приближений ядра Коши на действительной оси $\mathbb{R}$ некоторыми подпространствами из $L_q(\mathbb{R})$. Приведено применение полученного результата к вычислению точных верхних граней поточечных отклонений функций из единичного шара пространства Харди H_p, $2 \le p < \infty$, от некоторых интерполяционных операторов с узлами интерполяции в заданной системе точек верхней полуплоскости и некоторых линейных средних рядов Фурье по системе Такенака – Мальмквиста.

Нехай H_p, $p \ge 1$, — простір Гарді, який складається з функцій f, голоморфних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Відомо [1] (теорема 2) (див. також [2, с. 291]), що кожна функція f із простору H_p має майже скрізь на дійсній осі $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}_+$ недотичні граничні значення (за якими залишимо те ж саме позначення f), які належать простору $L_p(\mathbb{R})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_p := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Ядром Коші для площини $\mathbb{C}$ називається функція $\mathcal{C} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, визначена так:

$$\mathcal{C}(t,z) = \frac{-1}{2i(t-\overline{z})}, \qquad t, z \in \mathbb{C}, \quad t \ne \overline{z}.$$

Відомо [1] (теорема 14), що функція $\mathcal{C}$ є твірним ядром простору H_p, $1 \le p < \infty$, тобто в будь-якій точці $z \in \mathbb{C}_+$

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, z) \rangle \quad \forall f \in H_p, \tag{1}$$

де

$$\langle g, h \rangle := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)} dx.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_n := \{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ — послідовність n точок в $\mathbb{C}_+$ і $\mathcal{R}(\mathbf{a}_n)$ — сім'я раціональних функцій R_n вигляду

$$R_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(t-\overline{a}_k)^{s_k}},$$

де $b_k \in \mathbb{C}$, $1 \le s_k \le k$, s_k — кратність появи точки a_k у відрізку $\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ послідовності $\mathbf{a_n}$.

В [3, 4, с. 280] показано, що

$$\min\left\{\|\mathcal{C}(z,\cdot) - R_n(\cdot)\|_2 \colon R_n \in \mathcal{R}(\mathbf{a}_n)\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im} z}} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\frac{z-a_k}{z-\overline{a}_k}\right| \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+, \tag{2}$$

а мінімум досягається для функції $R_n^*(t) = \mathcal{S}_n(t,z)$, де

$$\mathcal{S}_n(t,z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) \frac{1}{t-\overline{a}_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{t-a_j}{t-\overline{a}_j}, \qquad c_k(z) = \frac{\operatorname{Im} a_k}{\overline{z}-a_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\overline{z}-\overline{a}_j}{\overline{z}-a_j}$$

$\Big($ добуток $\prod_{j=0}^{-1}$ покладається рівним одиниці$\Big)$.

Окрім великого значення в теорії раціонального наближення голоморфних функцій з H_2 цей результат є важливим ще й в теорії інтерполяції. А саме, з рівності (2) випливає, що функція $\mathcal{S}_n(t,\cdot)$ у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ інтерполює ядро Коші $\mathcal{C}(t,\cdot)$ в точках послідовності $\mathbf{a}_n$, тобто $\mathcal{S}_n(t,a_k) = \mathcal{C}(t,a_k)$.

Таким чином, лінійний оператор U_n, який діє з H_2 в $\mathcal{R}(\mathbf{a}_n)$ за правилом $U_n(f)(z) = \langle f, \mathcal{S}_n(\cdot,z)\rangle$, є інтерполяційним, тобто $U_n(f)(a_k) = f(a_k)$, $k = \overline{0, n-1}$, для будь-якої функції $f \in H_2$. До того ж згідно з (2) мають місце рівності

$$\max\{|f(z) - U_n(f)(z)| \colon f \in H_2, \|f\|_2 \le 1\} =$$

$$= \|\mathcal{C}(\cdot,z) - \mathcal{S}_n(\cdot,z)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im} z}} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\frac{z-a_k}{z-\overline{a}_k}\right| \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}_+,$$

де максимум (при фіксованому $z \in \mathbb{C}_+$) досягається для функції

$$f^*(\zeta) = \frac{\mathcal{C}(\zeta,z) - \mathcal{S}_n(\zeta,z)}{\|\mathcal{C}(\cdot,z) - \mathcal{S}_n(\cdot,z)\|_2}.$$

У даній статті ми розкриємо глибше зв'язок між найкращим наближенням ядра Коші на дійсній осі $\mathbb{R}$, екстремальними задачами теорії інтерполяції та теорією рядів Фур'є за ортонормованою системою Такенаки – Мальмквіста. А саме, наша мета — обчислення величини

$$E\,(z,\mathfrak{A}) := \inf\left\{\|\mathcal{C}(z,\cdot) - g(\cdot)\|_q \colon g \in \mathfrak{A}\right\}, \qquad \mathfrak{A} \subset L_q(\mathbb{R}), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

яка називається найкращим наближенням ядра $\mathcal{C}(\cdot,z)$ у метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi}^{n\perp}$ (див. означення нижче), і побудова для цих підпросторів у явному вигляді елемента найкращого наближення. Отриманий результат ми застосуємо до обчислення точних верхніх меж поточкових відхилень функцій з одиничної кулі простору H_p, $2 \le p < \infty$, від певних інтерполяційних операторів із вузлами інтерполяції $\mathbf{a}_n$ і певних лінійних середніх рядів Фур'є за системою Такенаки – Мальмквіста, яка відповідає послідовності $\mathbf{a}_n$.

Зазначимо, що аналогічні задачі для просторів Гарді в одиничному крузі розв'язано в [5].

Підпростори $H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n)$ і $H_{p,\Phi}^{n\perp}, n \in \mathbb{Z}_+$, означаються так:

$$H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) := \{g \in L_q(\mathbb{R})\colon \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall f \in H_p(\mathbf{a}_n)\}, \qquad 1/p + 1/q = 1,$$

$$H_{p,\Phi}^{n\perp} := \left\{g \in L_q(\mathbb{R})\colon \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall f \in H_{p,\Phi}^{n}\right\}, \qquad 1/p + 1/q = 1,$$

де

$$H_p(\mathbf{a}_n) := \{f \in H_p\colon f(a_k) = 0, \;\; k = \overline{0, n}\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad H_p(\mathbf{a}_0) := H_p,$$

$$H_{p,\Phi}^{n} := \left\{f \in H_p\colon \langle f, \Phi_k\rangle = 0, \;\; k = \overline{0, n}\right\}, \qquad H_{p,\Phi}^{-1} := H_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

і $\Phi := \{\Phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормована система Такенаки – Мальмквіста, яка означається так.

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність точок в $\mathbb{C}_+$. Тоді

$$\Phi_0(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_0}}{z - \overline{a}_0}, \qquad \Phi_n(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_n}}{z - \overline{a}_n} B_n(z), \qquad n = 1, 2, \ldots\,,$$

де

$$B_0(z) := 1, \qquad B_n(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \chi_k \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k}, \qquad \chi_k := \frac{|1 + a_k^2|}{1 + a_k^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Функція B_n називається n-добутком Бляшке з нулями в точках $\mathbf{a}_n$.

Систему функцій Φ увів М. М. Джрбашян [3] за аналогією, як це зробили С. Такенака і Ф. Мальмквіст (див. бібліографію в [3]) у випадку простору Гарді H_2 в одиничному крузі. Зокрема, в [3] показано, що система Φ є ортонормованою на дійсній осі $\mathbb{R}$, тобто

$$\langle \Phi_k, \Phi_l\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases} \qquad k,\, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Множину всіх систем Такенаки – Мальмквіста будемо позначати через TM.

Відправною точкою в наших дослідженнях є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_n$ — система n точок в $\mathbb{C}_+$ і $\Phi \in TM$ — система, породжена будь-якою точковою послідовністю вигляду $\mathbf{a}_n \cup \{b_k\}_{k=n}^{\infty}$, де $\{b_k\}_{k=n}^{\infty}$ — довільна послідовність точок в $\mathbb{C}_+$. Тоді*

$$H_p(\mathbf{a}_n) = H_{p,\Phi}^{n-1}.$$

З огляду на це твердження скрізь далі будемо використовувати єдині позначення $\mathfrak{A}_{n,p} = H_p(\mathbf{a}_n) = H_{p,\Phi}^{n-1}$ і $\mathfrak{A}_{n,p}^{\perp} = H_p(\mathbf{a}_n)^{\perp} = H_{p,\Phi}^{n-1\perp}$ (при цьому передбачається, що завжди $\mathbf{a}_n$ і Φ є такими, як і в теоремі 1).

Лема 1 [3]. *Нехай Φ належить TM. Тоді для довільних $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $z \neq \overline{\zeta}$, і $n \in \mathbb{Z}_+$ справджується рівність*

$$\frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\Phi_k(\zeta)}\Phi_k(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}B_n(z)}{2i(\overline{\zeta} - z)}, \tag{3}$$

де $\sum_{k=0}^{-1} = 0$.

Рівність (3) є аналогом формули Христоффеля – Дарбу для ортогональних многочленів. Вона також відома в літературі під назвою тотожності М. М. Джрбашяна. Доведення рівності (3), наведене в [3], є громіздким і технічно складним. Тому викликає певний інтерес, насамперед з методичної точки зору, наведення елементарного доведення. З цією метою розглянемо тотожність

$$(1-x_0)+(1-x_1)x_0+(1-x_2)x_0x_1+\ldots+(1-x_{n-1})x_0x_1\ldots x_{n-2}=$$

$$=1-x_0x_1\ldots x_{n-1}, \tag{4}$$

яка справджується для будь-яких комплексних чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1},\ n\in\mathbb{N}$.

Покладемо

$$x_k=\frac{(z-a_k)(\overline{\zeta}-\overline{a}_k)}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)}.$$

Тоді

$$1-x_k=\frac{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)-(z-a_k)(\overline{\zeta}-\overline{a}_k)}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)}=\frac{2i\operatorname{Im}a_k}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)}(\overline{\zeta}-z)$$

і згідно з (4)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x_k)\prod_{j=0}^{k-1}x_j=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2i\operatorname{Im}a_k}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)}(\overline{\zeta}-z)\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}=$$

$$=1-\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}.$$

Розділивши обидві частини рівності на $2i(\overline{\zeta}-z)$ і врахувавши те, що

$$\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}=\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\frac{z-a_j}{z-\overline{a}_j}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\overline{\chi}_j\frac{\overline{\zeta}-\overline{a}_j}{\overline{\zeta}-a_j}=B_k(z)\overline{B_k(\zeta)}$$

і

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\operatorname{Im}a_k}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{\operatorname{Im}a_k}}{z-\overline{a}_k}B_k(z)\frac{\sqrt{\operatorname{Im}a_k}}{\overline{\zeta}-a_k}\overline{B_k(\zeta)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_k(z)\overline{\Phi_k(\zeta)},$$

одержимо (3).

Позначимо

$$\mathcal{C}_{n,\Phi}(\zeta, z) := -\frac{B_n(\zeta)\overline{B_n(z)}}{2i(\zeta - \overline{z})}.$$

З означення підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}$, формули (1) і леми 1 випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *За умов теореми* 1 *для будь-якої функції* $f \in \mathfrak{A}_{n,p},\ 1 \le p < \infty$, *справджується рівність*

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}_{n,\Phi}(\cdot, z)\rangle = \frac{B_n(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\overline{B_n(t)}}{t - z}dt \quad \forall z \in \mathbb{C}_+. \tag{5}$$

***Доведення теореми* 1.** Оскільки $B_n(a_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, то включення $H^{n-1}_{p,\Phi} \subset \subset H_p(\mathbf{a}_n)$ є безпосереднім наслідком із формули (5).

Позначимо

$$\widehat{f}(j) := \langle f, \Phi_j\rangle, \qquad j = 0, 1, \ldots .$$

Для доведення включення $H_p(\mathbf{a}_n) \subset H^{n-1}_{p,\Phi}$ скористаємося формулою (1), тотожністю (3) і рівністю $\Phi_j(a_k) = 0,\ j = k+1, \ldots, n-1$:

$$0 = f(a_k) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, a_k)\rangle =$$

$$= \left\langle f, \sum_{j=0}^{n-1}\Phi_j(\cdot)\overline{\Phi_j(a_k)}\right\rangle + B_n(a_k)\langle f, \mathcal{C}_{n,\Phi}(\cdot, a_k)\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\langle f, \Phi_j\rangle\Phi_j(a_k) = \sum_{j=0}^{k}\widehat{f}(j)\Phi_j(a_k) \quad \forall\ f \in H_p(\mathbf{a}_n).$$

Звідси послідовно для кожного $k = 0, 1, \ldots, n-1$ отримуємо $\widehat{f}(k) = 0$. Отже, $f \in H^{n-1}_{p,\Phi}$.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1, зокрема, показує, що ядра $\mathcal{C}$ і $\mathcal{C}_{n,\Phi}$ мають властивість відтворення по відношенню до функцій простору $H^{n-1}_{p,\Phi}$, але вони у відомому сенсі не єдині такі твірні ядра. Наприклад, ядро Пуассона

$$P(\zeta, z) := \frac{\operatorname{Im} z}{|\zeta - z|^2}$$

також є твірним ядром для простору H_p, $1 \le p \le \infty$ (див., наприклад, [2, с. 364 – 366]).

Нашою найближчою метою є побудова інших твірних ядер, наділених певними екстремальними властивостями.

Нехай $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і B_n — n-добуток Бляшке системи Φ. Означимо функцію $\mathcal{C}_{p,n,\Phi}$ правилом

$$\mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\zeta, z) := \left(\frac{i}{2}\right)^{2/p}(\operatorname{Im} z)^{1-2/p}B_n(\zeta)\overline{B_n(z)}\frac{(\overline{\zeta} - z)^{2/p}}{|\zeta - \overline{z}|^2}. \tag{6}$$

Покажемо, що функція $\mathcal{C}_{p,n,\Phi}$ є твірним ядром простору $\mathfrak{A}_{n,p}$ при $p \ge 2$.

Теорема 2. *Нехай* $2 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\Phi \in TM$. *Якщо функція* f *належить підпростору* $\mathfrak{A}_{n,p}$, *то для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle. \tag{7}$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in \mathbb{C}_+$ і розглянемо функцію g, визначену правилом

$$g(\zeta) = \left(\frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{\zeta - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(\zeta).$$

Зрозуміло, що функція g належить простору H_p при $p \geq 2$.

Згідно з теоремою 1 $f(a_k) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$, для будь-якої функції $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$. Тому

$$g(a_k) = \left(\frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(a_k) = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

а це згідно з тією ж таки теоремою 1 рівносильно тому, що і g належить підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}$.

Застосувавши до функції g формулу (5), одержимо

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{t - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(t)\frac{B_n(z)\overline{B_n(t)}}{t - z}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{C_{p,n,\Phi}(t, z)}dt = \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle.$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* Φ *належить* TM. *Якщо функція* f *належить простору* H_p, $2 \leq p < \infty$, *то для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справджується формула*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n,p}(z)\widehat{f}(k)\Phi_k(z) + \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+, \tag{8}$$

де

$$\lambda_{k,n,p}(z) = 1 - \frac{1}{\Phi_k(z)}\langle \Phi_k, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle, \qquad k = \overline{0, n-1}. \tag{9}$$

Справді, функція $f - \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\Phi_k$ належить підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}$, тому за теоремою 2

$$\langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle =$$

$$= \left\langle f - \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\Phi_k, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\Phi_k, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\right\rangle =$$

$$= f(z) - \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\Phi_k(z) + \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\left\langle \Phi_k, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\right\rangle,$$

що й потрібно було довести.

Розглянемо лінійний функціонал $F_z(f) := f(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, визначений на H_p. Для його норми

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| := \sup\{|f(z)| : f \in \mathfrak{A}_{n,p}, \|f\|_p \le 1\}$$

на підпросторі $\mathfrak{A}_{n,p}$ справджується таке твердження.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $2 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| = \|\mathcal{C}_{p,n,\Phi}(\cdot, z)\|_q = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Справді, з формули (7) за нерівністю Гельдера маємо оцінку зверху

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| \le \|\mathcal{C}_{p,n,\Phi}(\cdot, z)\|_q = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}, \qquad 1/p + 1/q = 1.$$

Для оцінки знизу візьмемо функцію

$$f^*(\zeta) = e^{-i\arg B_n(z)} B_n(\zeta) \frac{(-\operatorname{Im} z)^{1/p}}{(\zeta - \overline{z})^{2/p}},$$

яка, очевидно, є голоморфною в $\mathbb{C}_+$, $f^*(a_0) = \ldots = f^*(a_{n-1}) = 0$ і

$$\|f^*\|_p^p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)|^p dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z}{|t - \overline{z}|^2} dt = 1.$$

Отже, f^* належить підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}$ і тому

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| \ge f^*(z) = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Зауваження. Згідно зі співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [6]) справджується рівність

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| = E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right). \tag{10}$$

Таким чином, згідно з (10) і наслідком 2 нашу мету в частині обчислення величини $E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right)$ досягнуто.

Повний розв'язок поставленої задачі міститься в такому твердженні.

Теорема 3. *Нехай* $2 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi \in TM$ *і* B_n — n*-добуток Бляшке системи* Φ. *Тоді для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right) = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}, \tag{11}$$

а елементом найкращого наближення з підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}$ *є єдина функція*

$$g_z(t) = \mathcal{C}(t, z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(t, z). \tag{12}$$

Доведення. Як зазначено вище, рівність (11) випливає з (10) за наслідком 2.

Доведемо екстремальність функції $g_z(t)$.

Насамперед зауважимо, що $\sup_{t\in\overline{\mathbb{C}_+}} |g_z(t)| < \infty$ і

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g_z(t)|^q dt \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{((t-x)^2+y^2)^q} dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2-q}}{(t-x)^2+y^2} dt < \infty, \qquad z = x+iy,$$

тобто звуження $g_z|_{\mathbb{R}}$ належить $L_q(\mathbb{R})$.

Далі, згідно з (1) і (7) для будь-якої функції $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$ справджуються рівності

$$\langle f, g_z\rangle = \langle f, \mathcal{C}(\cdot,z)\rangle - \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot,z)\rangle = f(z) - f(z) = 0. \tag{13}$$

Отже, $g_z \in \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}$ і для неї

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right) = \|\mathcal{C}(\cdot,z) - g_z(\cdot)\|_q = \|\mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot,z)\|_{L_q} = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Нехай h_z — будь-яка інша функція, для якої $\|C(\cdot,z) - h_z(\cdot)\|_q = E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right)$. Тоді за нерівністю Гельдера

$$\frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}} = f^*(z) = \langle f^*, \mathcal{C}(\cdot,z) - h_z\rangle \le \|f^*\|_p \|\mathcal{C}(\cdot,z) - h_z\|_q =$$

$$= \|\mathcal{C}(\cdot,z) - h_z\|_q = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Отже, скрізь у цих співвідношеннях повинні виконуватися тільки рівності, а це рівносильно тому, що

$$h_z(t) = \mathcal{C}(t,z) - \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}} f^*(t)\,|f^*(t)|^{p-2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$\frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}} f^*(t)\,|f^*(t)|^{p-2} = \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(t,z) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

то $h_z \equiv g_z$, що й доводить єдиність екстремальної функції g_z.

Застосуємо тепер отримані результати до інтерполяції функцій із простору H_p, $2 \le p < \infty$.

Розглянемо оператор $U_{n,p,\Phi}$, визначений на H_p правилом

$$U_{n,p,\Phi}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\lambda_{k,n,p}\Phi_k,$$

де $\lambda_{k,n,p}(z)$ визначаються формулою (9).

Оператор $U_{n,p,\Phi}$ є інтерполяційним на просторі H_p, $2 \le p < \infty$, з вузлами інтерполяції $\mathbf{a}_n$, де $\mathbf{a}_n$ — відрізок послідовності $\mathbf{a}$ точок в $\mathbb{C}_+$, що породжують систему $\Phi \in TM$, тобто

$$U_{n,p,\Phi}(f)(a_k) = f(a_k) \quad \forall\, f \in H_p, \quad 2 \le p < \infty, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{14}$$

Покажемо, що оператор $U_{n,p,\Phi}$ породжує найкращий лінійний метод наближення в такому розумінні.

Нехай $\mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ — множина лінійних операторів I_n, визначених на H_p правилом

$$I_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)\varphi_j(z),$$

де φ_j — функції, визначені та неперервні в $\mathbb{C}_+$, і

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) := \inf\left\{\max\left\{|f(z) - I_n(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\right\} : I_n \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)\right\}$$

— найкраще наближення в точці $z \in \mathbb{C}_+$ одиничної кулі простору Гарді H_p образами операторів I_n.

Теорема 4. *Нехай $2 \le p < \infty$, $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність різних точок $a_k \in \mathbb{C}_+$ і Φ — система Такенаки–Мальмквіста, породжена послідовністю $\mathbf{a}$. Тоді $U_{n,p,\Phi} \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ і*

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) = \max\{|f(z) - U_{n,p,\Phi}(f)(z)| \colon f \in H_p, \|f\|_p \le 1\} = \frac{|B_n(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+. \qquad (15)$$

Доведення. Згідно з рівністю (8)

$$U_{n,p,\Phi}(f)(z) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{t-z}\left(1 - \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{t-\overline{z}}\right)^{1-2/p} B_n(z)\overline{B_n(t)}\right)dt \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+.$$

При кожному фіксованому $z \in \mathbb{C}_+$ підінтегральну функцію можна розглядати як граничні значення на $\mathbb{R}$ функції

$$F(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(1 - \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{\zeta - \overline{z}}\right)^{1-2/p} B_n(z)\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\chi}_j\frac{\zeta - \overline{a}_j}{\zeta - a_j}\right),$$

яка є мероморфною в $\mathbb{C}_+$ з простими полюсами $\zeta_0 = z$, $\zeta_k = a_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$.

Тому за теоремою про лишки (див., наприклад, [7, с. 150, 227])

$$U_{n,p,\Phi}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n}\operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_k} F(\zeta) = \sum_{k=0}^{n}\lim_{\zeta\to\zeta_k}(\zeta - \zeta_k)F(\zeta) =$$

$$= f(z)\left(1 - \prod_{j=0}^{n-1}\chi_j\frac{z-a_j}{z-\overline{a}_j}\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\chi}_j\frac{z-\overline{a}_j}{z-a_j}\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p}\prod_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n-1}\frac{z-a_j}{a_k-a_j}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{a_k-\overline{a}_j}{z-\overline{a}_j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\varphi_k(z),$$

де

$$\varphi_k(z) = \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1} \frac{z-a_j}{a_k-a_j} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{a_k-\overline{a}_j}{z-\overline{a}_j}.$$

Отже, $U_{n,p,\Phi} \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$.

Враховуючи цей факт і наслідок 2, одержуємо оцінку

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) \leq \sup\left\{|f(z) - U_{n,p,\Phi}(f)(z)| : \|f\|_p \leq 1\right\} \leq \|\mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\|_q.$$

З іншого боку,

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) \geq \sup\left\{|f(z)| : \|f\|_p \leq 1, f(a_k) = 0, k = \overline{0, n-1}\right\} = \|F_z|\, \mathfrak{A}_{n,p}\|.$$

Тому рівності (15) випливають із цих співвідношень за наслідком 3.

1. *Крылов В. И.* О функциях, регулярных в полуплоскости // Мат. сб. – 1939. – **6**, № 1. – С. 95 – 138.
2. *Mashreghi J.* Representation theorem in Hardy spaces. – New York: Cambridge Univ. Press, 2009. – 372 p.
3. *Джрбашян М. М.* Биортогональные рациональные функции и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси // Мат. сб. – 1974. – **94**, № 3. – С. 418 – 444.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
5. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 661 – 671.
6. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
7. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

Одержано 08.07.13