УДК 517.518.2

С. І. Безкрила (Нац. пед. ун-т, Київ),
О. Н. Нестеренко, **А. В. Чайковський** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ТРЕТІ МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ

An inequality for the third uniform modulus of continuity is proved. It follows from this inequality that every 3-majorant is not necessarily a modulus of continuity of order 3.

Получено неравенство для третьих равномерных модулей непрерывности, с помощью которого доказано, что не каждая 3-мажоранта является модулем непрерывности третьего порядка.

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ розглядатимемо першу, другу та третю скінченні різниці в точці $x \in \mathbb{R}$ з кроком $h > 0$:

$$\Delta_h^1(f,x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2(f,x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta_h^3(f,x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Через $UC(\mathbb{R})$ позначимо простір рівномірно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ розглядатимемо її (рівномірний) k-й модуль неперервності при $k = 1$, 2, 3:

$$\omega_k(f,\delta) = \sup\left\{ \left| \Delta_h^k(f,x) \right| : x \in \mathbb{R},\ 0 < h \le \delta \right\}, \quad \delta > 0.$$

Аналогічно до випадку модулів неперервності функцій, заданих на відрізку, властивості яких викладено, наприклад, у монографії І. О. Шевчука [1, с. 19 – 34], легко можна довести, що для функцій із простору $UC(\mathbb{R})$ розглядувані нами модулі неперервності $\omega = \omega_k(f,\cdot)$ при $k = 1, 2, 3$ задовольняють такі умови:

1) $\omega(0) = 0$;

2) функція ω є неперервною на $[0,+\infty)$;

3) функція ω є неспадною на $[0,+\infty)$;

4) для довільних $\delta \ge 0$ і $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність $\omega(n\delta) \le n^k \omega(\delta)$.

Легко бачити, що умова 4 для невід'ємних функцій випливає з умови:

5) функція $(0, +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^k$ монотонно не зростає на $(0,+\infty)$.

Зауважимо, що в [1, с. 24] функції, що задовольняють умови 1 – 3 і 5, називаються *k-мажорантами*.

І. О. Шевчук звернув увагу авторів на таке питання. Чи правильно, що при $k = 3$ кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку якоїсь функції з простору $UC(\mathbb{R})$ на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0>0$? При $k=1$ позитивна відповідь на подібне питання помічена ще С. М. Нікольським [2]. Для $k=2$ негативну відповідь на таке ж питання дав С. В. Конягін [3]. Для доведення він встановив допоміжну нерівність

$$2\omega_2(f,T) \le \omega_2(f,T+t)+\omega_2(f,T-t)+2\omega_2(f,t), \quad 0\le t\le T, \quad f\in UC(\mathbb{R}).$$

У цій статті ми даємо також негативну відповідь на поставлене питання при $k=3$. Для отримання цього результату ми в цілому повторюємо міркування С. В. Конягіна з роботи [3], але при цьому досить істотно модифікуємо його метод отримання допоміжної нерівності (теорема 1).

Теорема 1. *Нехай* $f\in UC(\mathbb{R})$, $t>0$, $N\in\mathbb{N}$. *Тоді*

$$2\omega_3(f,Nt) \le \omega_3(f,(N+1)t)+\omega_3(f,(N-1)t)+6N\omega_3(f,t). \tag{1}$$

Доведення. Для $N=1$ нерівність (1) є тривіальною, тому вважаємо, що $N\ge 2$. Нехай $h\in(0,t]$ — довільне фіксоване число, $H=Nh$. Враховуючи означення третьої скінченної різниці та вираз для другої скінченної різниці з кроком $2h$ через таку ж різницю з кроком h (див. формулу (1.31) з [1] при $n=m=2$), для всіх $x\in\mathbb{R}$ маємо

$$\Delta^3_{H+h}(f,x-h)+\Delta^3_{H-h}(f,x+h)-2\Delta^3_H(f,x) =$$

$$= f(x+3H+2h)-3f(x+2H+h)+3f(x+H)-f(x-h)+$$

$$+ f(x+3H-2h)-3f(x+2H-h)+3f(x+H)-f(x+h)-$$

$$-2f(x+3H)+6f(x+2H)-6f(x+H)+2f(x) =$$

$$= \Delta^2_{2h}(f,x+3H-2h)-3\Delta^2_h(f,x+2H-h)-\Delta^2_h(f,x-h) =$$

$$= \Delta^2_h(f,x+3H)+2\Delta^2_h(f,x+3H-h)+$$

$$+\Delta^2_h(f,x+3H-2h)-3\Delta^2_h(f,x+2H-h)-\Delta^2_h(f,x-h) =$$

$$= \Delta^2_h(f,x+3Nh)-\Delta^2_h(f,x+(2N-1)h)+2\Delta^2_h(f,x+(3N-1)h)-$$

$$-2\Delta^2_h(f,x+(2N-1)h)+\Delta^2_h(f,x+(3N-2)h)-\Delta^2_h(f,x-h) =: E.$$

Розглядаючи третю скінченну різницю як різницю других скінченних різниць, для довільних $l\in\mathbb{Z}$ і $m\in\mathbb{N}$ отримуємо

$$\left|\Delta^2_h(f,x+(l+m)h)-\Delta^2_h(f,x+lh)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\Delta^2_h(f,x+(l+k+1)h)-\Delta^2_h(f,x+(l+k)h)\Big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_h^3 (f, x+(l+k)h)\right| \le \sum_{k=0}^{m-1}\left|\Delta_h^3 (f, x+(l+k)h)\right| \le \omega_3(f,t)m .$$

Враховуючи отриману оцінку, переконуємося, що

$$|E| \le \omega_3(f,t)(N+1+2N+3N-1) = 6N\omega_3(f,t).$$

Отже,

$$\left|\Delta_{H+h}^3 (f, x-h) + \Delta_{H-h}^3 (f, x+h) - 2\Delta_H^3 (f,x)\right| \le 6N\omega_3(f,t).$$

Звідси випливає, що

$$2\left|\Delta_H^3 (f,x)\right| \le \left|\Delta_{H+h}^3 (f, x-h)\right| + \left|\Delta_{H-h}^3 (f, x+h)\right| + 6N\omega_3(f,t) \le$$

$$\le \omega_3(f,(N+1)t) + \omega_3(f,(N-1)t) + 6N\omega_3(f,t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то H пробігає весь проміжок $(0,Nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (1).

Наслідок. *Функція* $\varphi(t)=t^3$, $t\in[0, 1/2]$, $\varphi(t)=1/8$, $t>1/2$, *задовольняє умови* $1-3$ *і* 5 *при* $k=3$, *але не є модулем неперервності третього порядку ні для якої функції з простору* $UC(\mathbb{R})$.

Доведення випливає з теореми 1, оскільки при досить великих $n\in\mathbb{N}$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) + 6n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) < 0 .$$

Отже, якщо покласти $t=\dfrac{1}{2n}$ і $N=n$, то нерівність (1) стає хибною, що для третього модуля неперервності неможливо. Умови $1-3$ і 5 для функції φ очевидно виконуються.

Цей наслідок значно посилює наступна теорема.

Теорема 2. *Для кожного числа* $\alpha>2$ *існує ненульова функція* $\omega\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *що задовольняє умови* $1-3$, *така, що функція* $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^{\alpha}$ *є незростаючою на* $(0,+\infty)$ *і при цьому ні для якої функції* $f\in UC(\mathbb{R})$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_3(f,\delta)/\omega(\delta) = 1.$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(t)=t^{\alpha}$, $t\in[0, 1/2]$, $\varphi(t)=(1/2)^{\alpha}$, $t\in(1/2, 1]$. Оскільки

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) + 6n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{\alpha}{2^{\alpha}n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty ,$$

то існують такі числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ і $\eta > 0$, що

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right)+6n_0\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right) = -\eta .$$

Позначимо $S=\dfrac{1}{2n_0}$, $T=(2S)^{\alpha}$. Визначимо тепер функцію ω. Нехай $\omega(0)=0$, а якщо $\delta\in[S^{j+1},S^j)$ при деякому $j\in\mathbb{Z}$, то покладемо $\omega(\delta)=T^j\varphi\left(\delta/S^j\right)$. Отримаємо функцію ω, коректно визначену на $[0,+\infty)$, яка задовольняє умови $1-3$ і 5. Дійсно, ці умови виконуються для функції φ, а також

$$\omega\left(S^j+\right) = \omega\left(S^j\right) = T^{j-1}\varphi\left(S^j/S^{j-1}\right) = \frac{1}{2^{\alpha}n_0^{\alpha j}},$$

$$\omega\left(S^j-\right) = \lim_{\delta\to S^j-} T^j\varphi\left(\delta/S^j\right) = \frac{1}{2^{\alpha}n_0^{\alpha j}} .$$

Отже, ω неперервна на $(0,+\infty)$; $|\omega(\delta)|\leq T^j\leq(1/2)^j$, $\delta\in[0,S^j)$, тому $\omega(0+)=0=$ $=\omega(0)$. Оскільки φ неспадна, то ω неспадна на кожному проміжку $[S^{j+1},S^j)$, тому, з огляду на її неперервність на $[0,+\infty)$, вона є неспадною на $[0,+\infty)$. Аналогічно легко бачити, що ω задовольняє умову 5.

Оскільки $0<S\leq 1/4$, то при всіх $j>0$

$$\left\{S^j(S+1/2),\ S^j/2,\ S^j(-S+1/2),\ S^{j+1}\right\}\subset[S^{j+1},S^j),$$

тому

$$\omega\left(S^j(S+1/2)\right)-2\omega\left(S^j/2\right)+\omega\left(S^j(-S+1/2)\right)+6n_0\omega\left(S^{j+1}\right) =$$

$$= T^j\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right)+6n_0\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right)\right) =$$

$$= -T^j\eta < -T^j\varphi(S+1/2)\eta = -\omega\left(S^j(S+1/2)\right)\eta . \tag{2}$$

Якщо функція $\tilde{\omega}\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ така, що $\lim_{\delta\to 0+}\tilde{\omega}(\delta)/\omega(\delta)=1$, то існує таке $j\in\mathbb{N}$, що для всіх $\delta\in(0,S^j)$ виконується нерівність

$$|\tilde{\omega}(\delta)-\omega(\delta)| \leq \frac{\eta\omega(\delta)}{6n_0+4} .$$

Звідси, враховуючи (2) і те, що функція ω є неспадною, отримуємо оцінку

$$\tilde{\omega}\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)-2\tilde{\omega}\left(S^j/2\right)+\tilde{\omega}\left(S^j\left(-S+1/2\right)\right)+6n_0\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right) <$$

$$< -\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)\eta+\left(6n_0+4\right)\frac{\eta\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)}{6n_0+4} = 0\,,$$

що суперечить нерівності (1), якщо в ній покласти $t = S^{j+1}$ і $N = n_0$. Таким чином, функція $\tilde{\omega}$ не може бути модулем неперервності третього порядку ні для якої функції з простору $UC(\mathbb{R})$.

Теорему доведено.

Автори висловлюють щиру подяку професору І. О. Шевчуку за постановку задачі й підтримку в роботі.

1. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
2. *Никольский С. М.* Ряд Фурье с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1946. – **52**, № 3. – С. 191 – 194.
3. *Конягин С. В.* О вторых модулях непрерывности // Труды Мат. ин-та РАН. – 2010. – **269**. – С. 1 – 3.

Одержано 10.07.13