УДК 517.9:519.46

А. Ф. Баранник (Ін-т математики, Помор. академія, Слупськ, Польща),
Т. А. Баранник (Полтав. держ. пед. ун-т),
І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНЕ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

We consider the generalized procedure of separation of variables of the nonlinear hyperbolic-type equations and the Korteweg – de Vries-type equations. We construct a wide class of exact solutions of these equations which cannot be obtained with the use of the S. Lie method and the method of conditional symmetries.

Рассматривается обобщенная процедура разделения переменных нелинейных уравнений гиперболического типа и уравнений типа Кортевега – де Фриза. Построен широкий класс точных решений этих уравнений, которые нельзя получить методом С. Ли и методом условных симметрий.

1. Вступ. Одним із ефективних методів побудови точних розв'язків лінійних рівнянь математичної фізики є метод відокремлення змінних. Для рівнянь з двома незалежними змінними x, t і шуканої функції u цей метод ґрунтується на пошуку точних розв'язків у вигляді добутку функцій різних аргументів:

$$u = a(x)\, b(t). \tag{1}$$

У роботі [1] викладено метод побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь з частиними похідними, який узагальнює класичний метод відокремлення змінних. Розв'язки шукаються у вигляді скінченної суми k доданків:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)\, a_i(x), \tag{2}$$

де $f_i(t)$, $a_i(x)$ — гладкі функції, які необхідно визначити. Точні розв'язки з узагальненим відокремленням змінних, які містять більше двох доданків, наведено у роботах [2, 3].

Підстановку (1) можна розглядати як анзац, який редукує досліджуване рівняння до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $a = a(x)$ (або з невідомою функцією $b = b(t)$). У роботі [4] запропоновано таке узагальнення анзацу (1) для нелінійних рівнянь:

$$u = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\, a_i(x) + f(x,t), \qquad m \geq 1. \tag{3}$$

Анзац (3) містить невідому функцію $f(x,t)$, m невідомих функцій $a_i(x)$ і m невідомих функцій $\omega_i(t)$, які визначаються з умови, що анзац (3) редукує розглядуване рівняння до системи m звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $\omega_i(t)$. Знаходження цієї системи розглянуто на прикладах нелінійних хвильових рівнянь. Якщо в анзаці (3) $m = 1$, то така система зводиться до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $\omega_1(t)$.

Дана робота є продовженням досліджень, викладених у [4]. В ній поряд з анзацем (3) ми розглядаємо анзац, який одержується з анзацу (3) в результаті підстановки $u \mapsto x$, $x \mapsto u$, $t \mapsto t$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\, a_i(u) + f(u,t). \tag{4}$$

Розв'язки (3), (4) будемо називати розв'язками з відокремленими змінними, а сам метод їх побудови — узагальненою процедурою відокремлення змінних. Зазначимо, що ми не накладаємо вимогу на функцію $f(x,t)$ в анзаці (3) бути поданою у вигляді скінченної суми (2).

У даній роботі будемо використовувати анзаци типу (3), (4) для побудови точних розв'язків нелінійного рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c \tag{5}$$

і рівняння типу Кортевега–де Фріза (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{6}$$

де k — дійсний параметр. У рівнянні (5) завжди можна покласти $a=1$, використавши локальне перетворення. Рівняння (5) було предметом досліджень у роботах [5, 6], а рівняння (6) за допомогою методу умовної симетрії вивчалось у роботі [7]. Ми розглядаємо також такі узагальнення рівнянь (5) (для $c=0$) і (6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \Phi(t)u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь, які наведені у даній роботі, не можна отримати методами групового аналізу [8].

2. Відокремлення змінних для рівняння (5). Для побудови точних розв'язків рівняння (5) використаємо анзац

$$u = \omega(t) + f(x,t), \tag{7}$$

який є частинним випадком загального анзацу (3). Цей анзац є узагальненням підстановки

$$u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

яка часто використовується для пошуку точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики. Підставивши (7) в (5), одержимо рівняння

$$\omega'' + f_{tt} = a(\omega + f)f_{xx} + bf_x^2 + c, \tag{8}$$

яке повинно бути звичайним диференціальним рівнянням з невідомою функцією $\omega = \omega(t)$. Звідси отримуємо, що коефіцієнт af_{xx} при ω в рівнянні (8) можна подати у вигляді $af_{xx} = 2a\mu_2(t)$, а тому

$$f = \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \tilde{\mu}_0(t),$$

де $\tilde{\mu}_0(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — деякі функції від t. На підставі (7) одержимо анзац

$$u = \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \mu_0(t), \quad \mu_0(t) = \tilde{\mu}_0(t) + \omega(t). \tag{9}$$

Після підстановки (9) у рівняння (5) знаходимо систему рівнянь для визначення функції $\mu_i(t)$:

$$\mu_2'' = (2a + 4b)\mu_2^2,$$

$$\mu_1'' = (2a + 4b)\mu_1\mu_2,$$

$$\mu_0'' = 2a\mu_0\mu_2 + b\mu_1^2 + c.$$

Дану систему рівнянь іншими методами отримано в [5].

Розглянемо частинний випадок рівняння (5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{10}$$

Для побудови точних розв'язків рівняння (10) використаємо анзац

$$u = \omega(t)d(x) + f(x,t), \tag{11}$$

який є частинним випадком загального анзацу (3). Анзац (11) редукує (10) до рівняння

$$\omega''d - \omega(af_{xx}d + 2bf_xd' + afd'') - \omega^2(add'' + bd'^2) + f_{tt} - aff_{xx} - bf_x^2 = 0. \tag{12}$$

Рівняння (12) повинно бути звичайним диференціальним рівнянням з невідомою функцією $\omega = \omega(t)$. Звідси випливає, що

$$add'' + bd'^2 = \beta d, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$adf_{xx} + 2bd'f_x + ad''f = \tilde{\gamma}(t)d. \tag{14}$$

В результаті задача знаходження точних розв'язків вигляду (11) для рівняння (10) звелась до інтегрування системи двох звичайних диференціальних рівнянь, одне з яких є нелінійним. Рівняння (13) має такий частинний розв'язок:

$$d = x^\alpha, \quad a = \frac{\alpha}{1-\alpha}b, \quad \beta = 0, \quad \alpha \neq 1. \tag{15}$$

Підставивши $d = x^\alpha$ в рівняння (14), матимемо

$$x^2 f_{xx} + 2(1-\alpha)xf_x + \alpha(\alpha-1)f = \gamma(t)x^2, \tag{16}$$

де $\gamma(t) = \dfrac{1-\alpha}{b}\tilde{\gamma}(t)$.

Розглянемо три випадки.

Випадок 1: $\alpha = 2$. З (15) випливає, що $a = -2b$. Загальним розв'язком рівняння (16) для $\alpha = 2$ є функція

$$f = \gamma(t)x^2\ln|x| + \tilde{\beta}(t)x^2 + \delta(t)x,$$

а тому на підставі (11)

$$u = \gamma(t)x^2\ln|x| + \beta(t)x^2 + \delta(t)x, \quad \beta(t) = \tilde{\beta}(t) + \omega(t). \tag{17}$$

Підставивши (17) у рівняння (10), знайдемо $\delta(t) = 0$ і систему рівнянь для визначення функцій $\beta(t)$ і $\gamma(t)$:

$$\gamma'' = -2\beta\gamma^2, \quad \beta'' = -2b\beta\gamma + b\gamma^2. \tag{18}$$

Систему (18) можна розв'язати повністю в неявному вигляді. Якщо $\gamma = \gamma(t)$ є розв'язком першого рівняння системи (18), то функції $\gamma(t)$, $\frac{1}{\gamma}\int\frac{dt}{\gamma^2}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $\beta'' = -2b\beta\gamma$ [6]. Тому загальний розв'язок другого рівняння системи (18) можна знайти через розв'язок першого рівняння (у квадратурах).

Система (18) має такий частинний розв'язок:

$$\gamma = -\frac{3}{b}t^{-2}, \quad \beta = c_1t^3 + c_2t^{-2} - \frac{9}{5b}t^{-2}\ln|t|.$$

В результаті знаходимо такий точний розв'язок рівняння (10) $a = -2b$:

$$u = -\frac{3}{b}t^{-2}x^2\ln|x| + \left(c_1t^3 + c_2t^{-2} - \frac{9}{5b}t^{-2}\ln|t|\right)x^2,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Випадок 2: $\alpha = 3$. З (15) випливає, що $a = -\frac{3}{2}b$. Загальним розв'язком рівняння (16) для $\alpha = 3$ є функція

$$f = -\gamma(t)x^2\ln|x| + \beta(t)x^2 + \tilde{\delta}(t)x^3,$$

а тому на підставі (11)

$$u = -\gamma(t)x^2\ln|x| + \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3, \quad \delta(t) = \tilde{\delta}(t) + \omega(t). \tag{19}$$

Підставивши (19) у рівняння (10), знайдемо $\gamma(t) = 0$ і систему рівнянь для визначення функцій $\beta(t)$ і $\delta(t)$:

$$\delta'' = 0, \quad \beta'' = b\beta^2. \tag{20}$$

Система (20) має такий частинний розв'язок:

$$\delta = c_1t + c_2, \quad \beta = \frac{6}{b}t^{-2},$$

а тому точним розв'язком рівняння (10) для $a = -\frac{3}{2}b$ є функція

$$u = \frac{6}{b}t^{-2}x^2 + (c_1t + c_2)x^3,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Анзац $u = \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3$ є частиним випадком більш загального анзацу

$$u = \mu_3(t)x^3 + \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \mu_0(t). \tag{21}$$

Після підстановки анзацу (21) у рівняння (10) знаходимо систему рівнянь для визначення функцій $\mu_i(t)$:

$$\mu_3'' = 0,$$

$$\mu_2'' = b\mu_2^2 - 3b\mu_1\mu_3,$$

$$\mu_1'' = b\mu_1\mu_2 - 9b\mu_0\mu_3,$$

$$\mu_0'' = -3b\mu_0\mu_2 + b\mu_1^2.$$

Зазначимо, що анзац (21) було розглянуто в [9].

Випадок 3: $\alpha \neq 1; 2; 3$. Загальним розв'язком рівняння (16) є функція

$$f = \frac{\gamma(t)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}x^2 + \tilde{\mu}_2(t)x^\alpha + \mu_0(t)x^{-1+\alpha},$$

а тому на підставі (11)

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha + \mu_0(t)x^{-1+\alpha}, \tag{22}$$

де невідомі функції $\mu_0(t)$, $\mu_1(t) = \dfrac{\gamma(t)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}$, $\mu_2(t) = \tilde{\mu}_2(t) + \omega(t)$ необхідно визначити. Підставивши (22) у рівняння (10), знайдемо $\mu_0(t) = 0$ і систему рівнянь для визначення функцій $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$:

$$\mu_1'' = (2a+4b)\mu_1^2, \tag{23}$$

$$\mu_2'' = \left(-\frac{a^2b}{(a+b)^2} + \frac{2a^2+6ab}{a+b}\right)\mu_1\mu_2. \tag{24}$$

Частинним розв'язком рівняння (23) є функція

$$\mu_1 = \frac{3}{a+2b}t^{-2}. \tag{25}$$

Підставивши (25) в (24) і використавши (15), отримаємо лінійне рівняння для визначення функції $\mu_2(t)$:

$$t^2\mu_2'' = (9\alpha - 3\alpha^2)\mu_2. \tag{26}$$

Рівняння (26) має такі розв'язки:

$$\mu_2 = t^{1/2}[c_1\cos(\sigma\ln t) + c_2\sin(\sigma\ln t)], \quad \text{якщо} \quad \sigma^2 = 3\alpha^2 - 9\alpha - \frac{1}{4} > 0,$$

$$\mu_2 = t^{1/2}[c_1t^\sigma + c_2t^{-\sigma}], \quad \text{якщо} \quad \sigma^2 = \frac{1}{4} - 3\alpha^2 + 9\alpha > 0,$$

$$\mu_2 = t^{1/2}[c_1 + c_2\ln t], \quad \text{якщо} \quad \alpha = \frac{9 \pm 2\sqrt{21}}{6},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Отже, рівняння (10) має такі точні розв'язки:

$$u = \frac{3}{a+2b}t^{-2}x^2 + t^{1/2}x^\alpha[c_1\cos(\sigma\ln t) + c_2\sin(\sigma\ln t)],$$

якщо $\sigma^2 = 3\alpha^2 - 9\alpha - \frac{1}{4} > 0,$

$$u = \frac{3}{a+2b} t^{-2} x^2 + t^{1/2} x^{\alpha} [c_1 t^{\sigma} + c_2 t^{-\sigma}],$$

якщо $\sigma^2 = \frac{1}{4} - 3\alpha^2 + 9\alpha > 0,$ і

$$u = \frac{3}{a+2b} t^{-2} x^2 + t^{1/2} x^{\alpha} [c_1 + c_2 \ln t],$$

якщо $\alpha = \frac{9 \pm 2\sqrt{21}}{6} > 0,$ де c_1, c_2 — довільні сталі.

Відмітимо, що анзац $u = \mu_1 x^2 + \mu_2 x^4$ є частиним випадком більш загального анзацу

$$u = \mu_4(t) x^4 + \mu_3(t) x^3 + \mu_2(t) x^2 + \mu_1(t) x + \mu_0(t),$$

де функції $\mu_i(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\mu_4'' = -\frac{8}{3} b\mu_2\mu_4 + b\mu_3^2,$$

$$\mu_3'' = \frac{4}{3} b\mu_2\mu_3 - 8b\mu_1\mu_4,$$

$$\mu_2'' = \frac{4}{3} b\mu_2^2 - 2b\mu_1\mu_3 - 16b\mu_0\mu_4,$$

$$\mu_1'' = \frac{4}{3} b\mu_1\mu_2 - 8b\mu_0\mu_3,$$

$$\mu_0'' = -\frac{8}{3} b\mu_0\mu_2 + b\mu_1^2.$$

Даний анзац було розглянуто в [9].

Результати, отримані для рівняння (10), можна узагальнити на рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \phi(t) u. \tag{27}$$

Маємо такі випадки.

Випадок 1: $a = -2b$. Анзац

$$u = \gamma(t) x^2 \ln|x| + \beta(t) x^2$$

редукує рівняння (27) до системи

$$\gamma'' = -2b\gamma^2 + \phi\gamma, \qquad \beta'' = -2b\beta\gamma + \beta\gamma^2 + \phi\beta.$$

Випадок 2: $a = -\frac{3}{2} b$. Анзац

$$u = \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3$$

редукує рівняння (27) до системи

$$\delta'' = \phi\delta, \qquad \beta'' = b\beta^2 + \phi\beta .$$

Випадок 3: $a \neq -b$; $-2b$; $-\frac{3}{2}b$. Анзац

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^{\alpha},$$

де $\alpha = \dfrac{a}{a+b}$, редукує рівняння (27) до системи

$$\mu_1'' = (2a + 4b)\mu_1^2 + \phi(\mu_1),$$

$$\mu_2'' = \left(-\frac{a^2 b}{(a+b)^2} + \frac{2a^2 + 6ab}{a+b}\right)\mu_1\mu_2 + \phi(\mu_2).$$

3. Відокремлення змінних для рівняння (6). З'ясуємо, для яких функцій $F(u)$ рівняння (6) допускає анзац вигляду

$$x = \omega_1(t)d(u) + \omega_2(t). \tag{28}$$

Функції $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ і $d(u)$ будемо визначати з умови, що анзац (28) редукує рівняння (6) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$. Підставимо (28) у рівняння (6):

$$-\frac{\omega_1'}{\omega_1}\frac{d}{d'} - \frac{\omega_2'}{\omega_1}\frac{1}{d'} + \frac{1}{\omega_1^k}\frac{F(u)}{(d')^k} - \frac{1}{\omega_1^3}\frac{d'''}{(d')^4} + \frac{1}{\omega_1^3}\frac{3(d'')^2}{(d')^5} = 0. \tag{29}$$

Функції $\dfrac{d}{d'}$, $\dfrac{1}{d'}$ при $-\dfrac{\omega_1'}{\omega_1}$, $-\dfrac{\omega_2'}{\omega_1}$ у рівнянні (29) є лінійно незалежними. Нехай у рівнянні (29) $k \neq 3$. Накладемо вимогу на коефіцієнти при функціях $\dfrac{1}{\omega_1^k}$, $\dfrac{1}{\omega_1^3}$, щоб їх можна було подати у вигляді лінійної комбінації над полем дійсних чисел функцій $\dfrac{d}{d'}$, $\dfrac{1}{d'}$. Маємо

$$-\frac{d'''}{(d')^4} + 3\frac{(d'')^2}{(d')^5} = \lambda\frac{d}{d'} + \mu\frac{1}{d'}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

або

$$-d'd''' + 3(d'')^2 = \lambda d(d')^4 + \mu(d')^4. \tag{30}$$

Враховуючи (30), з рівняння (29) знаходимо

$$F(u) = [\omega_1'\omega_1^{k-1} - \lambda\omega_1^{k-3}]d(d')^{k-1} + [\omega_2'\omega_1^{k-1} - \mu\omega_1^{k-3}](d')^{k-1},$$

а тому

$$\omega_1{}'\omega_1^{k-1} - \lambda\omega_1^{k-3} = \lambda_1, \qquad \omega_2{}'\omega_1^{k-1} - \mu\omega_1^{k-3} = \lambda_2,$$

де λ_1, λ_2 — сталі. Отже, у випадку $k \neq 3$ рівняння (6) допускає анзац (28), якщо функція $F(u)$ має вигляд

$$F(u) = \lambda_1 d(d')^{k-1} + \lambda_2 (d')^{k-1}, \tag{31}$$

де $d = d(u)$ є довільним розв'язком рівняння (30). У випадку $\lambda = 0$ рівняння (30) можна повністю зінтегрувати. Розглянемо такі частинні розв'язки рівняння (30):

a) $d = \ln u$, якщо $\lambda = 0$, $\mu = 1$;

b) $d = u^{1/2}$, якщо $\lambda = \mu = 0$;

c) $d = \arcsin u$, якщо $\lambda = 0$, $\mu = -1$;

d) $d = \operatorname{arcsinh} u$, якщо $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

У випадку a) на підставі (31) знаходимо

$$F(u) = (\lambda_1 \ln u + \lambda_2) u^{1-k}, \tag{32}$$

а розв'язками рівняння (6) є функції

$$u = \exp\left[-\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} t^{(k-3)/k} + ct^{-1/k} + k(k\lambda_1 t)^{-1/k} x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right], \qquad k \neq 2,$$

$$u = \exp\left[-(2\lambda_1)^{-3/2} t^{-1/2} \ln t + ct^{-1/2} + (2\lambda_1 t)^{-1/2} x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right], \qquad k = 2,$$

де c — довільна стала. Перша з цих функцій є розв'язком рівняння (6) і у випадку $k = 3$ (цей випадок буде розглянуто нижче).

У випадку b)

$$F(u) = \lambda_1' u^{(2-k)/2} + \lambda_2' u^{(1-k)/2}, \qquad \lambda_1' = 2^{1-k}\lambda_1, \quad \lambda_2' = 2^{1-k}\lambda_2, \tag{33}$$

у випадку c)

$$F(u) = (\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1 - u^2)^{(1-k)/2} \tag{34}$$

і у випадку d)

$$F(u) = (\lambda_1 \operatorname{arcsinh} u + \lambda_2)(1 + u^2)^{(1-k)/2}. \tag{35}$$

Функції (32) – (35) і розв'язки рівняння (6), які їм відповідають, було отримано методом умовної симетрії в [7].

Нехай $k = 3$ у рівнянні (6). З рівняння (29) знаходимо

$$F(u) = \omega_1{}'\omega_1^2 d(d')^2 + \omega_2{}'\omega_1^2 (d')^2 + \frac{d'''}{d'} - \frac{3(d'')^2}{(d')^2},$$

а тому внаслідок лінійної незалежності функцій $d(d')^2$ і $(d')^2$

$$\omega_1{}'\omega_1^2 = \lambda_1, \qquad \omega_2{}'\omega_1^2 = \lambda_2, \tag{36}$$

де λ_1, λ_2 — довільні сталі.

Отже, у випадку $k = 3$ рівняння (6) допускає анзац (28), якщо функція $F(u)$ має вигляд

$$F(u) = \lambda_1 d(d')^2 + \lambda_2 (d')^2 + \frac{d'''}{d'} - \frac{3(d'')^2}{(d')^2}, \tag{37}$$

де $d = d(u)$ є довільною гладкою функцією. Якщо, наприклад, $d = \exp u$, то на підставі (37) отримуємо

$$F(u) = \lambda_1 \exp(3u) + \lambda_2 \exp(2u) - 2,$$

і тому рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [\lambda_1 \exp(3u) + \lambda_2 \exp(2u) - 2]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

має в силу (28), (36) точний розв'язок

$$u = \ln\left[\frac{x + c_1}{(3\lambda_1 t + c_2)^{1/3}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right],$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Результати, отримані для рівняння (6), можна узагальнити на рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{38}$$

Має місце така теорема.

Теорема. *Рівняння* (38) *допускає анзац* (28) *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з таких умов*:

1) *функція* $F(t,u)$ *має вигляд*

$$F(t,u) = f(t)\, d(d')^{k-1} + g(t)(d')^{k-1},$$

де $d = d(u)$ — *довільний розв'язок рівняння* (30), $f(t)$, $g(t)$ — *функції від змінної* t, *а* $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$ *задовольняють систему рівнянь*

$$\omega_1'\omega_1^{k-1} - \lambda\omega_1^{k-3} = f(t), \qquad \omega_2'\omega_1^{k-1} - \mu\omega_1^{k-3} = g(t); \tag{39}$$

2) $k = 3$ *і функція* $F(t,u)$ *має вигляд*

$$F(t,u) = f(t)\, d(d')^2 + g(t)(d')^2 + \frac{d'''}{d'} - \frac{3(d'')^2}{(d')^2}$$

де $d = d(u)$ — *довільна гладка функція,* $f(t)$, $g(t)$ — *функції від змінної* t, *а* $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$ *задовольняють систему рівнянь*

$$\omega_1'\omega_1^2 = f(t), \qquad \omega_2'\omega_1^2 = g(t).$$

В п. 2 даної теореми можна вважати, що $d = d(u)$ є довільною гладкою функцією, яка є розв'язком рівняння (30).

Розглянемо такий частинний розв'язок рівняння (30): $d = \ln u$, якщо $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Система (39) набирає вигляду

$$\omega_1'\omega_1^{k-1} = f(t), \qquad \omega_2'\omega_1^{k-1} - \omega_1^{k-3} = g(t),$$

і її загальним розв'язком є функції

$$\omega_1 = \left[k\int f(t)\,dt + c_1 \right]^{1/k}, \tag{40}$$

$$\omega_2 = \int \left[k\int f(t) + c_1 \right]^{-2/k} dt + \int g(t)\left[k\int f(t) + c_1 \right]^{(1-k)/k} dt + c_2, \tag{41}$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

У цьому випадку

$$F(t,u) = \left[f(t)\ln u + g(t) \right] u^{1-k}$$

і розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[f(t)\ln u + g(t) \right] u^{1-k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^k + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

є функція

$$u = \exp\left[\frac{1}{\omega_1(t)} x - \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \right],$$

де ω_1, ω_2 визначаються формулами (40), (41).

Аналогічно показуємо, що у випадку $d = u^{1/2}$, $\lambda = \mu = 0$

$$F(t,u) = f_1(t)u^{(2-k)/2} + g_1(t)u^{(1-k)/2},$$

$$f_1(t) = 2^{1-k} f(t), \quad g_1(t) = 2^{1-k} g(t),$$

а розв'язком рівняння (38) є функція

$$u = \left[\frac{1}{\omega_1(t)} x - \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \right]^2;$$

у випадку $d = \arcsin u$, $\lambda = 0$, $\mu = -1$

$$F(t,u) = \left[f(t)\arcsin u + g(t) \right](1 - u^2)^{(1-k)/2},$$

а розв'язком рівняння (38) є функція

$$u = \sin\left[\frac{1}{\omega_1(t)} x - \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \right]$$

і у випадку $d = \operatorname{arc\,sinh} u$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$

$$F(t,u) = \left[f(t)\operatorname{arc\,sinh} u + g(t) \right](1 + u^2)^{(1-k)/2},$$

а розв'язком рівняння (38) є функція

$$u = \sinh\left[\frac{1}{\omega_1(t)} x - \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \right],$$

де ω_1, ω_2 визначаються формулами (40), (41).

4. Висновки. Узагальнену процедуру відокремлення змінних, викладену в даній роботі, можна використати для знаходження розв'язків широкого класу нелінійних диференціальних рівнянь, зокрема нелінійних хвильових рівнянь. Приклади таких рівнянь розглянуто в роботі [4]. За допомогою анзацу (3) і анзаців, які отримуються з нього в результаті перестановки змінних u, x, t, можна побудувати розв'язки, які не можуть бути отримані методами групового аналізу. Розв'язки рівняння (5), наведені в п. 2, мають вигляд (2) з кількістю доданків 2, 3, 4 і 5, а тому прямий пошук їх у вигляді суми (2) є неефективним.

Анзац (3) можна застосувати, як правило, до рівнянь з поліноміальною нелінійністю. Якщо пошук розв'язку у вигляді (3) є неможливим, то спочатку шукаємо перетворення, яке зводить досліджуване рівняння до рівнянь з поліноміальною нелінійністю, і розв'язок цього останнього шукаємо у вигляді (3). Такі перетворення в багатьох випадках можна знайти, якщо рівняння допускає анзац типу (4).

1. *Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R.* Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities // Different. Equat. – 1995. – **31**. – P. 233 – 240.
2. *Pokhozhaev S. I.* On a problem of L. V. Ovsyannikov // Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz. – 1989. – **2**. – S. 5 – 10 (in Rusian).
3. *Galaktionov V. A., Posashkov S. A.* New exact solutions of parabolic equations with quadratic nonlinearities // U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. – 1989. – **29**. – P. 112 – 119.
4. *Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I.* Generalized procedure of separation of variables and reduction of nonlinear wave equations // Ukr. Mat. Zh. – 2009. – **61**, № 7. – S. 892 – 905 (in Ukranian).
5. *Galaktionov V. A.* Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1995. – **125**, № 2. – P. 225 – 246.
6. *Polyanin A. D., Zajcev V. F.* Handbook of nonlinear mathematical physics equation. – Moscow: Fizmat, 2002.
7. *Fushchich W. I., Serov N. I., Ahmerov T. K.* On the conditional symmetry of the generalized KdV equation // Rep. Ukr. Acad. Sci. A. – 1991. – № 12.
8. *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. – Second ed. // Grad. Texts Math. – New York: Springer, 1993. – Vol. 107.
9. *Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics // Chapman and Hall / CRC Appl. Math. and Nonlinear Sci. Ser. – 2007. – 498 p.

Одержано 26.11.09,
після доопрацювання — 06.10.10