УДК 517.96

С. А. Плакса, Ю. В. Кудьявина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА РАЗОМКНУТОЙ ЖОРДАНОВОЙ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ. II

The Riemann boundary-value problem is solved for classes of open Jordan rectifiable curves extended in comparison with the previous results and for functions given on these curves.

Розв'язано крайову задачу Рімана для розширених у порівнянні з попередніми результатами класів розімкнених жорданових спрямлюваних кривих та заданих на них функцій.

Данная работа является продолжением работы [1] и имеет общие с ней обозначения, нумерацию пунктов, лемм и теорем.

3. Вспомогательные утверждения. Как обычно, характеристическая функция $\chi(z)$ области D определяется равенствами $\chi(z) := 1$ при $z \in D$ и $\chi(z) := 0$ при $z \notin D$.

При $j = 1, 2$ для целого неотрицательного числа n и точки $x \in \gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ обозначим через $\rho^j\big(x, (2n+1)\pi\big)$ расстояние от x до множества $\gamma \setminus \{t \in \gamma\colon |\arg(t-a_j) - \arg(x-a_j)| < (2n+1)\pi\}$ в случае, когда это множество не пусто, в противном случае примем по определению $\rho^j\big(x, (2n+1)\pi\big) := |x-a_j|/2$. Обозначим теперь $\rho_{n,j}(x) := \min\big\{|x-a_j|/2,\ \rho^j\big(x,(2n+1)\pi\big)\big\}$.

Лемма 5. *Пусть $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ — разомкнутая жорданова спрямляемая кривая, а функция X голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ и имеет предельные значения X^+, X^- на $\gamma \setminus \{a_1, a_2\}$. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, $\rho(z,\gamma) < |z-a_j|/8$ при $j=1$ или $j=2$ и x — одна из ближайших к z точек кривой γ. Если $\rho \le \dfrac{1}{2}\min\{\rho_{n,j}(x), |x-a_1|, |x-a_2|\}$ при некотором целом неотрицательном n и либо $\rho \le |z-x|/2$, либо $\rho \ge 2|z-x|$, то справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho(x)} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} \right| \le c\ \max\left\{ |G(x)|^n, \frac{1}{|G(x)|^{n+1}} \right\} \times$$

$$\times \sup_{z \in \overline{K(x,\rho)} \setminus \gamma} \frac{1}{|X(z)|} \left(1 + \int\limits_{[0,\rho]} \frac{\Omega_x(G,\gamma,\eta)}{\eta}\, d\theta_x(\eta) \right), \tag{1}$$

где $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, а постоянная c не зависит от z.

Доказательство. При целом значении k введем в рассмотрение множество

$$\gamma_k := \{t \in \gamma\colon (2k-1)\pi < \arg(t-a_j) - \arg(x-a_j) < (2k+1)\pi\},$$

которое назовем витком. Витки γ_{k-1}, γ_{k+1} будем называть соседними к γ_k.

Зафиксируем ρ' такое, что $\operatorname{mes}\{t \in \gamma\colon \rho' < |t-x| < \rho\} \le \rho/2$. Очевидно, что $\rho' \ge 3\rho/4$. Компоненты множества $\gamma_\rho(x)$, имеющие пустое пересечение с кругом $K(x,\rho')$, назовем компонентами первого типа, а остальные компоненты этого множества — компонентами второго типа. Число компонент второго типа конечно, поскольку кривая γ спрямляема.

Компоненты второго типа описанным ниже способом разобьем на классы.

© С. А. ПЛАКСА, Ю. В. КУДЬЯВИНА, 2010

В класс $A_{0,0}$ включим все компоненты $e^j_{0,0}$, которые можно дополнить до замкнутой жордановой кривой дугами окружности $c_\rho(x)$, объединение которых обозначим $c[e^j_{0,0}]$, и компонентами первого типа, объединение которых обозначим $e[e^j_{0,0}]$, при этом множества $c[e^j_{0,0}]$, $e[e^j_{0,0}]$ расположены на том же витке, что и $e^j_{0,0}$.

Если ориентация дуги $e^j_{0,0}$ совпадает с положительной ориентацией замкнутой кривой $e^j_{0,0} \cup c[e^j_{0,0}] \cup e[e^j_{0,0}]$, то с учетом интегральной формулы Коши и теоремы Коши получаем

$$\int\limits_{e^j_{0,0}} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \chi^j_{0,0}(z)\frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e^j_{0,0}]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} -$$

$$- \int\limits_{e[e^j_{0,0}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}\,, \tag{2}$$

а в противном случае имеем

$$\int\limits_{e^j_{0,0}} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \int\limits_{e^j_{0,0}} \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)}\right)\frac{dt}{X^-(t)(t-z)} +$$

$$+\frac{1}{G(x)}\left(-\chi^j_{0,0}(z)\frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e^j_{0,0}]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e^j_{0,0}]} \frac{dt}{X^-(t)(t-z)}\right), \tag{3}$$

где $\chi^j_{0,0}$ — характеристическая функция области, ограниченной кривой $e^j_{0,0} \cup c[e^j_{0,0}] \cup$ $\cup\, e[e^j_{0,0}]$.

Определяя классы $A_{0,l}$, $l = \overline{1, k_0}$, число которых обозначено через k_0, полагаем, что класс $A_{0,l}$ включает все компоненты $e^j_{0,l}$, не принадлежащие классам $A_{0,k}$ при $k = 0, 1, \ldots, l-1$, которые можно дополнить до замкнутой жордановой кривой дугами окружности $c_\rho(x)$ (объединение которых обозначим $c[e^j_{0,l}]$), компонентами первого типа (объединение этих дуг обозначим $e[e^j_{0,l}]$) и компонентами классов $A_{0,k}$ (объединение указанных компонент класса $A_{0,k}$ обозначим $e_{0,k}[e^j_{0,l}]$) при $k =$ $= 0, 1, \ldots, l-1$, при этом предполагаем также, что все множества $c[e^j_{0,0}]$, $e[e^j_{0,0}]$, $e_{0,k}[e^j_{0,l}]$ расположены на том же витке, что и $e^j_{0,l}$.

Если ориентация дуги $e^j_{0,l}$ совпадает с положительной ориентацией замкнутой кривой $e^j_{0,l} \cup c[e^j_{0,l}] \cup e[e^j_{0,l}] \cup \left(\bigcup_{k=0}^{l-1} e_{0,k}[e^j_{0,l}]\right)$, то с учетом интегральной формулы Коши и теоремы Коши получаем

$$\int\limits_{e^j_{0,l}} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \chi^j_{0,l}(z)\frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e^j_{0,l}]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} -$$

$$- \int\limits_{e[e^j_{0,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{0,k}[e^j_{0,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}\,, \tag{4}$$

в противном случае имеем

$$\int\limits_{e_{0,l}^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \int\limits_{e_{0,l}^j} \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \right) \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} +$$

$$+ \frac{1}{G(x)} \left(-\chi_{0,l}^j(z) \frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e_{0,l}^j]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e_{0,l}^j]} \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{0,k}[e_{0,l}^j]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt \right) - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{0,k}[e_{0,l}^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}, \tag{5}$$

где $\chi_{0,l}^j$ — характеристическая функция области, ограниченной кривой $e_{0,l}^j \cup c[e_{0,l}^j] \cup$ $\cup\, e[e_{0,l}^j] \cup \left(\bigcup_{k=0}^{l-1} e_{0,k}[e_{0,l}^j] \right)$.

Определим теперь класс B_1, включив в него все компоненты e_1^j, при дополнении которых до замкнутой жордановой кривой используются компоненты, расположенные как на том же витке, что и e_1^j, так и на одном из соседних витков; при этом используются только дуги окружности $c_\rho(x)$ (объединение которых обозначим $c[e_1^j]$), компоненты первого типа (объединение которых обозначим $e[e_1^j]$) и компоненты классов $A_{0,k}$, $k = \overline{0, k_0}$. Объединение указанных компонент класса $A_{0,k}$, расположенных на том же витке, что и e_1^j, обозначим $e_{0,k}[e_1^j]$, а объединение указанных компонент класса $A_{0,k}$, расположенных на соседнем витке, обозначим $e'_{0,k}[e_1^j]$.

Если ориентация дуги e_1^j совпадает с положительной ориентацией замкнутой кривой $e_1^j \cup c[e_1^j] \cup e[e_1^j] \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0} e_{0,k}[e_1^j] \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0} e'_{0,k}[e_1^j] \right)$, то с учетом интегральной формулы Коши и теоремы Коши получаем

$$\int\limits_{e_1^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \chi_1^j(z) \frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e_1^j]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e_1^j]} \frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0} \int\limits_{e_{0,k}[e_1^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{k=0}^{k_0} \int\limits_{e'_{0,k}[e_1^j]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt -$$

$$- G(x) \sum_{k=0}^{k_0} \int\limits_{e'_{0,k}[e_1^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}, \tag{6}$$

в противном случае имеем

$$\int\limits_{e_1^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \int\limits_{e_1^j} \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \right) \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} + \frac{1}{G(x)} \left(-\chi_1^j(z) \frac{2\pi i}{X(z)} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{c[e_1^j]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e_1^j]} \frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)} - \sum_{k=0}^{k_0} \int\limits_{e_{0,k}[e_1^j]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt \right) -$$

$$-\sum_{k=0}^{k_0}\int\limits_{e_{0,k}[e_1^j]}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}-\frac{1}{G(x)}\sum_{k=0}^{k_0}\int\limits_{e'_{0,k}[e_1^j]}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}\,, \tag{7}$$

где χ_1^j — характеристическая функция области E_1^j, ограниченной кривой $e_1^j\cup c[e_1^j]\cup$ $\cup\, e[e_1^j]\cup\left(\bigcup_{k=0}^{k_0}e_{0,k}[e_1^j]\right)\cup\left(\bigcup_{k=0}^{k_0}e'_{0,k}[e_1^j]\right)$, а в интегралах по компонентам множества $e[e_1^j]$ выбираются значения X^+ или X^- в зависимости от того, слева или справа от соответствующей компоненты находится область E_1^j.

Аналогично определяются классы B_q, $q=\overline{2,p}$, число которых обозначено через p, и $A_{q,l}$, $q=\overline{1,p}$, $l=\overline{0,k_q}$, число которых при фиксированном q обозначено через k_q.

Так, в класс B_q включаются все компоненты e_q^j, при дополнении которых до замкнутой жордановой кривой используются компоненты, расположенные как на том же витке, что и e_q^j, так и на одном из соседних витков; при этом используются только дуги окружности $c_\rho(x)$ (объединение этих дуг обозначим $c[e_q^j]$), компоненты первого типа (объединение этих компонент обозначим $e[e_q^j]$), а также компоненты классов B_m и $A_{m,k}$ при $m=\overline{1,q-1}$ и $k=0,1,\ldots,k_m$. Объединение указанных компонент классов B_m, $A_{m,k}$, расположенных на том же витке, что и e_q^j, обозначим соответственно $e_m[e_q^j]$, $e_{m,k}[e_q^j]$, а объединение указанных компонент классов B_m, $A_{m,k}$, расположенных на соседнем витке, обозначим соответственно через $e'_m[e_q^j]$, $e'_{m,k}[e_q^j]$.

В класс $A_{q,0}$ включаем все компоненты $e_{q,0}^j$, не принадлежащие классам B_m при $m=\overline{1,q}$ и $A_{m,k}$ при $m=\overline{1,q-1}$, $k=0,1,\ldots,k_m$, которые можно дополнить до замкнутой жордановой кривой дугами окружности $c_\rho(x)$ (объединение этих дуг обозначим $c[e_{q,0}^j]$), компонентами первого типа (объединение этих компонент обозначим $e[e_{q,0}^j]$), компонентами классов B_m при $m=\overline{1,q}$, а также компонентами классов $A_{m,k}$ при $m=\overline{1,q-1}$ и $k=0,1,\ldots,k_m$ (объединение указанных компонент классов B_m, $A_{m,k}$ обозначим соответственно через $e_m[e_{q,0}^j]$, $e_{m,k}[e_{q,0}^j]$); при этом предполагаем также, что все множества $c[e_{q,0}^j]$, $e[e_{q,0}^j]$, $e_m[e_{q,0}^j]$, $e_{m,k}[e_{q,0}^j]$ расположены на том же витке, что и $e_{q,0}^j$.

Далее, в класс $A_{q,l}$, $l=\overline{1,k_q}$, включаем все компоненты $e_{q,l}^j$, не принадлежащие классам B_m при $m=\overline{1,q}$ и $A_{m,k}$ при $m=\overline{1,q-1}$, $k=0,1,\ldots,k_m$, а также классам $A_{q,k}$ при $k=0,1,\ldots,l-1$, которые можно дополнить до замкнутой жордановой кривой дугами окружности $c_\rho(x)$ (объединение этих дуг обозначим $c[e_{q,l}^j]$), компонентами первого типа (объединение этих компонент обозначим $e[e_{q,l}^j]$), компонентами классов B_m при $m=\overline{1,q}$ и $A_{m,k}$ при $m=\overline{1,q-1}$, $k=0,1,\ldots,k_m$ (объединение указанных компонент классов B_m, $A_{m,k}$ обозначим соответственно через $e_m[e_{q,l}^j]$ и $e_{m,k}[e_{q,l}^j]$), а также компонентами классов $A_{q,k}$ (объединение указанных компонент обозначим через $e_{q,k}[e_{q,l}^j]$) при $k=0,1,\ldots,l-1$; при этом предполагаем также, что все множества $c[e_{q,l}^j]$, $e[e_{q,l}^j]$, $e_m[e_{q,l}^j]$, $e_{m,k}[e_{q,l}^j]$, $e_{q,k}[e_{q,l}^j]$ расположены на том же витке, что и $e_{q,l}^j$.

Аналогично равенствам (4) – (7) устанавливаются равенства

$$\int\limits_{e_{q,l}^j}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}=\chi_{q,\,l}^j(z)\frac{2\pi i}{X(z)}\;-\int\limits_{c[e_{q,l}^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}-$$

$$
- \int\limits_{e[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} -
$$

$$
- \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{q,k}[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{m=0}^{q} \int\limits_{e_m[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}, \tag{8}
$$

$$
\int\limits_{e^j_q} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \chi^j_q(z) \frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e^j_q]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e^j_q]} \frac{dt}{X^{\pm}(t)(t-z)} -
$$

$$
- \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e^j_q]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e_m[e^j_q]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} -
$$

$$
- \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e'_{m,k}[e^j_q]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt - \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e'_m[e^j_q]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt -
$$

$$
-G(x) \left(\sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e'_{m,k}[e^j_q]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} + \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e'_m[e^j_q]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} \right) \tag{9}
$$

в случае, когда ориентации дуг $e^j_{q,l}$, e^j_q совпадают с положительной ориентацией описанных при определении классов $A_{q,l}$, B_q замкнутых кривых (характеристические функции областей, ограниченных этими кривыми, обозначены соответственно через $\chi^j_{q,\,l}$, χ^j_q), частью которых являются дуги $e^j_{q,l}$, e^j_q, или же равенства

$$
\int\limits_{e^j_{q,l}} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \int\limits_{e^j_{q,l}} \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \right) \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} +
$$

$$
+ \frac{1}{G(x)} \left(-\chi^j_{q,l}(z) \frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} - \right.
$$

$$
- \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e^j_{q,l}]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{q,k}[e^j_{q,l}]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt -
$$

$$
\left. - \sum_{m=0}^{q} \int\limits_{e_m[e^j_{q,l}]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)} dt \right) - \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} -
$$

$$
- \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{e_{q,k}[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{m=0}^{q} \int\limits_{e_m[e^j_{q,l}]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} \tag{10}
$$

и

$$\int\limits_{e_q^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \int\limits_{e_q^j} \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)}\right) \frac{dt}{X^-(t)(t-z)} +$$

$$+\frac{1}{G(x)}\left(-\chi_q^j(z)\frac{2\pi i}{X(z)} - \int\limits_{c[e_q^j]} \frac{dt}{X(t)(t-z)} - \int\limits_{e[e_q^j]} \frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)} -\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e_q^j]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)}dt - \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e_m[e_q^j]} \frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)}dt\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e_{m,k}[e_q^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} - \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e_m[e_q^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} -$$

$$-\frac{1}{G(x)}\left(\sum_{m=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{k_m} \int\limits_{e'_{m,k}[e_q^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} + \sum_{m=0}^{q-1} \int\limits_{e'_m[e_q^j]} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}\right) \qquad (11)$$

в противной случае.

Таким образом, определена последовательность классов $A_{0,0}, A_{0,1}, \ldots, A_{0,k_0}$, $B_1, A_{1,0}, A_{1,1}, \ldots, A_{1,k_1}, B_2, A_{2,0}, A_{2,1}, \ldots, A_{2,k_2}, \ldots, B_p, A_{p,0}, A_{p,1}, \ldots, A_{p,k_p}$, при этом равенства (2) – (11) задают выражения интегралов, содержащихся в их левых частях, через интегралы по дугам предшествующих классов, дугам окружности $c_\rho(x)$ и компонентам первого типа.

Выполним суммирование интегралов

$$\int\limits_{e_{0,l}^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} \qquad (12)$$

по всем компонентам из классов $A_{0,k_0}, A_{0,k_0-1}, \ldots, A_{0,0}$. На первом шаге, используя равенства (4), (5) для интегралов по дугам класса A_{0,k_0}, замечаем, что последние слагаемые из указанных равенств уничтожаются при сложении с интегралами (12) по компонентам множества $e_{0,k}[e_{0,k_0}^j]$. На следующем шаге, используя равенства (4), (5) для оставшихся после выполнения первого шага сложения интегралов по дугам класса A_{0,k_0-1}, аналогично замечаем, что последние слагаемые из указанных равенств уничтожаются при сложении с интегралами (12) по компонентам множества $e_{0,k}[e_{0,k_0-1}^j]$. Продолжая суммирование описанным способом и учитывая при этом равенство

$$\left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)}\right)\frac{1}{X^-(t)} = -\frac{G(t)-G(x)}{G(x)\,X^+(t)}\,, \qquad (13)$$

а также замечая, что в случае, когда интеграл (12) выражается равенством (5), интегралы вида (12) по компонентам множества $e_{0,k}[e_{0,l}^j]$ выражаются равенствами вида (4), получаем

$$\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j \int\limits_{e_{0,l}^j} \frac{dt}{X^+(t)(t-z)} = \left(c_0 + \frac{c_{-1}}{G(x)}\right)\frac{2\pi i}{X(z)} +$$

$$+\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j\left(\left(c_1^{l,j}+\frac{c_2^{l,j}}{G(x)}\right)\int\limits_{c[e_{0,l}^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}+\left(c_3^{l,j}+\frac{c_4^{l,j}}{G(x)}\right)\int\limits_{e[e_{0,l}^j]}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}\right)+$$

$$+\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j\frac{c_5^{l,j}}{G(x)}\int\limits_{e_{0,l}^j}\frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)}\,dt\,, \tag{14}$$

где каждая из постоянных $c_0, c_{-1}, c_1^{l,j}, c_2^{l,j}, \ldots, c_5^{l,j}$ принимает одно из значений $0, \pm 1$.

Далее, используя выражения (6), (7) интегралов по дугам класса B_1, замечаем, что при суммировании их с интегралами (12) уничтожаются входящие в равенства (6), (7) интегралы вида (12) по компонентам множеств $e_{0,k}[e_1^j]$, $k=\overline{0,k_0}$. В то же время для интегралов вида (12) по компонентам множеств $e'_{0,k}[e_1^j]$, $k=\overline{0,k_0}$, получены представления (14), используя которые, а также равенство (13), находим

$$\sum_j\int\limits_{e_1^j}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}+\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j\int\limits_{e_{0,l}^j}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}=C_0(G)\,\frac{2\pi i}{X(z)}+$$

$$+\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j\left(C_1^{l,j}(G)\int\limits_{c[e_{0,l}^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}+C_2^{l,j}(G)\int\limits_{e[e_{0,l}^j]}\frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)}\right)+$$

$$+\sum_j\left(C_3^j(G)\int\limits_{c[e_1^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}+C_4^j(G)\int\limits_{e[e_1^j]}\frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)}\right)+$$

$$+\sum_{l=0}^{k_0}\sum_j C_5^{l,j}(G)\int\limits_{e_{0,l}^j}\frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)}dt+\sum_j C_6^j(G)\int\limits_{e_1^j}\frac{G(t)-G(x)}{X^+(t)(t-z)}dt\,, \tag{15}$$

где $C_0(G)$, $C_1^{l,j}(G)$, $C_2^{l,j}(G)$, $C_5^{l,j}(G)$ имеют вид $c_0+\dfrac{c_{-1}}{G(x)}+c_1G(x)+\dfrac{c_{-2}}{(G(x))^2}$, а $C_3^j(G)$, $C_4^j(G)$, $C_6^j(G)$ — коэффициенты вида $c_0+\dfrac{c_{-1}}{G(x)}$, при этом через c_0, c_{-1}, c_1, c_{-2} обозначены различные постоянные, каждая из которых принимает одно из значений $0, \pm 1$.

Теперь, продолжая суммирование интегралов по всем дугам второго типа, аналогично равенствам (14), (15) получаем

$$\sum_{q=0}^{p}\sum_{l=0}^{k_q}\sum_j\int\limits_{e_{q,l}^j}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}+\sum_{q=1}^{p}\sum_j\int\limits_{e_q^j}\frac{dt}{X^+(t)(t-z)}=C_{p,0}(G)\,\frac{2\pi i}{X(z)}+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}\sum_{l=0}^{k_q}\sum_j\left(C_{p,1}^{q,l,j}(G)\int\limits_{c[e_{q,l}^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}+C_{p,2}^{q,l,j}(G)\int\limits_{e[e_{q,l}^j]}\frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)}\right)+$$

$$+\sum_{q=1}^{p}\sum_j\left(C_{p,3}^{q,j}(G)\int\limits_{c[e_q^j]}\frac{dt}{X(t)(t-z)}+C_{p,4}^{q,j}(G)\int\limits_{e[e_q^j]}\frac{dt}{X^\pm(t)(t-z)}\right)+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}\sum_{l=0}^{k_q}\sum_{j} C_{p,5}^{q,l,j}(G)\int\limits_{e_{q,l}^{j}} \frac{G(t)-G(x)}{X^{+}(t)(t-z)}\,dt+$$

$$+\sum_{q=1}^{p}\sum_{j} C_{p,6}^{q,j}(G)\int\limits_{e_{q}^{j}} \frac{G(t)-G(x)}{X^{+}(t)(t-z)}\,dt. \qquad (16)$$

Здесь $C_{p,0}(G)$, $C_{p,1}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,2}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,3}^{q,j}(G)$, $C_{p,4}^{q,j}(G)$, $C_{p,5}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,5}^{q,j}(G)$ имеют вид $c_0+c_1G(x)+c_2(G(x))^2+\ldots+c_p(G(x))^p+\dfrac{c_{-1}}{G(x)}+\dfrac{c_{-2}}{(G(x))^2}+\ldots+\dfrac{c_{-p-1}}{(G(x))^{p+1}}$, при этом через $c_0,\ c_1,\ldots,c_p,\ c_{-1},\ c_{-2},\ldots,c_{-p-1}$ обозначены различные постоянные, каждая из которых принимает одно из значений $0, \pm 1$.

Заметим, что простым следствием включения $\gamma_\rho(x)\subset\bigcup_{k=-n}^{n}\gamma_k$, которое выполняется в силу неравенства $\rho\le\rho_{n,j}(x)/2$, является неравенство $p\le n$. Поэтому каждый из коэффициентов $C_{p,0}(G)$, $C_{p,1}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,2}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,3}^{q,j}(G)$, $C_{p,4}^{q,j}(G)$, $C_{p,5}^{q,l,j}(G)$, $C_{p,5}^{q,j}(G)$ оценивается сверху выражением $(2n+2)\max\big\{|G(x)|^n, |G(x)|^{-(n+1)}\big\}$. Следовательно, используя равенство

$$\int\limits_{\gamma_\rho(x)}\frac{dt}{X^{+}(t)(t-z)}=\int\limits_{e}\frac{dt}{X^{+}(t)(t-z)}+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}\sum_{l=0}^{k_q}\sum_{j}\int\limits_{e_{q,l}^{j}}\frac{dt}{X^{+}(t)(t-z)}+\sum_{q=1}^{p}\sum_{j}\int\limits_{e_{q}^{j}}\frac{dt}{X^{+}(t)(t-z)},$$

где через e обозначено объединение всех компонент первого типа множества $\gamma_\rho(x)$, и оценивая входящий в него интеграл по множеству e и интегралы в правой части равенства (16) с учетом неравенств $|t-z|\ge|t-x|/2$ для всех $t\in\gamma_\rho(x)$, $|t-z|\ge\rho/2$ для всех $t\in c_\rho(x)$, $|t-z|\ge\rho/4$ для всех $t\in e$, $\operatorname{mes} e\le\rho/2+2\pi\rho+2\pi\rho'\le$ $\le(4\pi+1/2)\rho$, получаем неравенство (1).

Лемма доказана.

Для функции h, заданной на $\gamma\setminus T$, обозначим

$$M_\gamma(h\,|\,\varepsilon):=\begin{cases}\sup\limits_{t\in\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(T)}|h(t)|, & \text{если } \gamma\setminus\gamma_\varepsilon(T)\ne\varnothing\,,\\ 0\,, & \text{если } \gamma\setminus\gamma_\varepsilon(T)=\varnothing\,.\end{cases}$$

Лемма 6. *Пусть γ, z, x и ρ — такие, как и в лемме 5, а функция h непрерывна на $\gamma\setminus\{a_1,a_2\}$ и суммируема на γ. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\rho(x)}\frac{h(t)}{t-z}dt\right|\le$$

$$\le c\left(\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{[0,d]}\frac{M_\gamma(h|\,\eta)}{r+\eta}d\theta_{a_j}(\eta)+M_\gamma\left(h\,\Big|\,\frac{r}{2}\right)\int\limits_{\rho}^{3r/8}\frac{d\theta_x(\eta)}{\eta}\right), \qquad (17)$$

где $r:=\min\{|z-a_1|,|z-a_2|\}$, а c — некоторая универсальная постоянная.

Доказательство. Без ограничения общности полагаем, что $r = |z - a_1|$. Имеем равенство

$$\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\rho(x)} \frac{h(t)}{t-z}dt = \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_1)} \frac{h(t)}{t-z}\,dt + \int\limits_{\gamma_{2r}(a_1)\setminus\gamma_\rho(x)} \frac{h(t)}{t-z}\,dt =: I_1 + I_2.$$

Далее, оценивая I_1 с использованием неравенства $|t - a_1| \le 2|t - z|$, которое выполняется при всех $t \in \gamma \setminus \gamma_{2r}(a_1)$, получаем

$$|I_1| \le 2 \int\limits_{[2r,d]} \frac{M_\gamma(h\,|\,\eta)}{\eta}\,d\theta_{a_1}(\eta) \le 3 \int\limits_{[2r,d]} \frac{M_\gamma(h\,|\,\eta)}{r+\eta}\,d\theta_{a_1}(\eta),$$

а при оценке интеграла I_2 с использованием неравенства $|t - x| \le 2|t - z|$ имеем

$$|I_2| \le 2 \int\limits_{\gamma_{2r}(a_1)\setminus\gamma_{\frac{3r}{8}}(x)} \frac{|h(t)|}{|t-x|}\,|dt| + 2 \int\limits_{\gamma_{\frac{3r}{8}}(x)\setminus\gamma_\rho(x)} \frac{|h(t)|}{|t-x|}\,|dt| \le$$

$$\le \frac{16}{3r} \int\limits_{[0,2r]} M_\gamma(h\,|\,\eta)\,d\theta_{a_1}(\eta) + 2M_\gamma\left(h \;\Big|\; \frac{r}{2}\right) \int\limits_{\rho}^{\frac{3r}{8}} \frac{d\theta_x(\eta)}{\eta} \le$$

$$\le 16 \int\limits_{[0,2r]} \frac{M_\gamma(h\,|\,\eta)}{r+\eta}\,d\theta_{a_1}(\eta) + 2M_\gamma\left(h \;\Big|\; \frac{r}{2}\right) \int\limits_{\rho}^{\frac{3r}{8}} \frac{d\theta_x(\eta)}{\eta}.$$

Лемма доказана.

4. Неоднородная краевая задача Римана. Обозначим $r_t := \dfrac{1}{4} \min\limits_{a_j \in T} |t - a_j|$, где $t \in \gamma \setminus T$, и

$$\Delta_p^*(a_j) := \limsup_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\operatorname{Re}\widetilde{p}\,(z)}{\ln|z-a_j|}.$$

Теорема 2. *Пусть $\gamma = \smile{a_1a_2}$ — разомкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию*

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon^\nu), \quad \varepsilon \to 0, \quad 0 < \nu \le 1, \tag{18}$$

и дополнительному условию

$$\rho_{n,j}(t) \ge c\,|t - a_j|^k \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \quad k \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \tag{19}$$

где n — целое неотрицательное число и положительная постоянная c не зависит от t. Пусть функция G представима в виде $G(t) = \exp(p(t))$, при этом $\widetilde{p} \in H_T$ и для всех $a_j \in T$ конечны числа $\Delta_p(a_j), \Delta_p^*(a_j)$ и, кроме того, при всех $t \in \gamma \setminus T$ функция G удовлетворяет оценкам

$$c_1 \prod_{j=1}^{2} |t - a_j|^{\alpha^0_{G,j}} \le |G(t)| \le c_2 \prod_{j=1}^{2} |t - a_j|^{\alpha_{G,j}}, \quad \alpha^0_{G,\,j} \ge 0, \quad \alpha_{G,\,j} \le 0, \tag{20}$$

$$\int\limits_{[0,\,r_t]} \frac{\Omega_t(G,\,\gamma,\,\eta)}{\eta}\,d\theta_t(\eta) \le c\sum_{j=1}^{2}|t-a_j|^{\beta_{G,\,j}}, \quad \beta_{G,\,j}\le 0, \tag{21}$$

в которых положительные постоянные c_1, c_2, c *не зависят от* t, *а функция* g *удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \int\limits_{[0,\varepsilon]} \frac{\Omega_x(g,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_x(\eta)\to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad \forall\,\delta>0. \tag{22}$$

и при всех $t\in\gamma\setminus T$ — *оценкам*

$$|g(t)|\le c\prod_{j=1}^{2}|t-a_j|^{\alpha_{g,j}}, \tag{23}$$

$$\int\limits_{[0,\,r_t]} \frac{\Omega_t(g,\,\gamma,\,\eta)}{\eta}\,d\theta_t(\eta) \le c\prod_{j=1}^{2}|t-a_j|^{\beta_{g,\,j}}, \quad \beta_{g,\,j}>-1+\Delta_p^*-\Delta_p\,, \tag{24}$$

где $\alpha_{g,j}>-1+\Delta_p^*-\Delta_p+\max\{k(1-\nu);\,(n+1)\alpha^0_{G,j}-\beta_{G,\,j}\,;\,-n\,\alpha_{G,j}-\beta_{G,\,j}\}$ *и постоянная* c *не зависит от* t.

Тогда при $\kappa\geqslant -1$ *неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при* $\kappa<-1$ *для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения* $(-\kappa-1)$*-го условия*

$$\int\limits_{\gamma}\frac{g(t)}{X^+(t)}\,t^{s-1}\,dt=0, \quad s=1,\,2,\,\ldots,\,-\kappa-1\,, \tag{25}$$

где $X(z):=\exp(\widetilde{p}(z))\prod_{j=1}^{2}(z-a_j)^{-\kappa_j}$. *Общее решение задачи дается формулой*

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+X(z)\,P_\kappa(z)\,, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma, \tag{26}$$

где

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{t-z}\,,$$

а P_κ — *произвольный полином степени не выше* κ, *если* $\kappa\geqslant 0$, *и* $P_\kappa(z)\equiv 0$, *если* $\kappa<0$.

Доказательство. Используя равенство $G(t)=X^+(t)/X^-(t)$, которое выполняется при всех $t\in\gamma\setminus T$, приводим краевое условие

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \quad \forall\,t\in\gamma\setminus T, \tag{27}$$

к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)} \quad \forall\,t\in\gamma\setminus T.$$

С учетом условия (18) и оценки (23) легко устанавливается, что функция $h(t) := g(t)/X^+(t)$ суммируема на γ. Кроме того, дополняя кривую γ до замкнутой жордановой спрямляемой кривой, согласно лемме 1 из [1], дугой $\gamma_1 := \overset{\frown}{a_2 a_1}$ и полагая при этом $g(t) \equiv 0$ на γ_1, на основании леммы 1 из [2] заключаем, что функция $\widetilde{h}$ имеет предельные значения $\widetilde{h}^+$, $\widetilde{h}^-$ на $\gamma \setminus T$. Отсюда следует, что предельные значения Φ_0^+ и Φ_0^- функции Φ_0 удовлетворяют условию граничного сопряжения (27).

Оценим теперь $\widetilde{h}(z)$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ из достаточно малой окрестности точки $a_j \in T$. Пусть $r := |z - a_j|$ и положительное число ε такое, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\beta_{g,j} + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - 2\varepsilon > -1, \\ &\alpha_{g,j} + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - k(1-\nu) - 2\varepsilon > -1, \\ &\alpha_{g,j} + \beta_{G,j} + n\,\alpha_{G,j} + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - 2\varepsilon > -1, \\ &\alpha_{g,j} + \beta_{G,j} - (n+1)\,\alpha_{G,j}^0 + \Delta_p(a_j) - \Delta_p^*(a_j) - 2\varepsilon > -1. \end{aligned} \tag{28}$$

В случае $\rho(z,\,\gamma) \geq r/8$ аналогично оценке (17) имеем

$$|\widetilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\left|\int\limits_{\gamma_{2r}(a_j)} \frac{h(t)}{t-z}\,dt\right| + \left|\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2r}(a_j)} \frac{h(t)}{t-z}\,dt\right|\right) \leq$$

$$\leq c\left(\frac{1}{r}\int\limits_{[0,2r]} M_\gamma(h\,|\,\eta)\,d\theta_{a_j}(\eta) + \int\limits_{[2r,d]} \frac{M_\gamma(h\,|\,\eta)}{\eta}\,d\theta_{a_j}(\eta)\right)$$

(здесь и далее в доказательстве постоянные c не зависят от z). Оценивая далее интегралы Лебега – Стилтьеса с учетом предложения 1 работы [3] (см. также доказательство теоремы 1 из [4]) и используя при этом условие (18), оценку (23) для функции g, а также неравенство

$$1/|X^+(z)| \,\leq\, c\prod_{j=1}^{2} |z-a_j|^{\kappa_j - \Delta_p^*(a_j) - \varepsilon} \quad \forall\, z \in \gamma \setminus T\,, \tag{29}$$

при достаточно малых значениях r получаем

$$|\widetilde{h}(z)| \leq c\left(1 + \sum_{j=1}^{2} r^{\alpha_{g,j} + \kappa_j - \Delta_p^*(a_j) + \nu - 1 - \varepsilon}\right).$$

В случае $\rho_{n,j}(x)/4 \leq \rho(z,\gamma) < r/8$ обозначим $\rho := \rho_{n,j}(x)/8$ и представим интеграл $\widetilde{h}(z)$ в виде суммы трех интегралов:

$$\widetilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_\rho(x)} \frac{g(t)-g(x)}{X^+(t)(t-z)}\,dt + \int\limits_{\gamma_\rho(x)} \frac{g(x)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\rho(x)} \frac{h(t)}{t-z}\,dt\right) =:$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

Используя неравенство $|t-x| \leq 2|t-z|$ и оценки (24), (29), при достаточно малых значениях r имеем

$$|I_1| \le 2 \sup_{t\in\gamma_\rho(x)} \frac{1}{|X^+(t)|} \int\limits_{[0,\rho]} \frac{\Omega_x(g,\,\gamma,\,\eta)}{\eta}\, d\theta_x(\eta) \le c\, r^{\kappa_j - \Delta_p^*(a_j)+\beta_{g,j}-\varepsilon}\,.$$

Используя оценки (1), (20) – (23), (29), при достаточно малых значениях r получаем

$$|I_2| \le c\, r^{\alpha_{g,j}+\kappa_j-\Delta_p^*(a_j)+\beta_{G,j}-\varepsilon}\left(r^{n\,\alpha_{G,j}} + r^{-(n+1)\,\alpha^0_{G,j}}\right).$$

Наконец, при оценке интеграла I_3 используем неравенство (17) и предложение 1 из работы [3] (см. также доказательство теоремы 1 из [4]), при этом с учетом условий (18) и (19), а также оценки (23) для функции g и неравенства (29) получим

$$|I_3| \le c\left(1 + \sum_{j=1}^{2} r^{\alpha_{g,j}+\kappa_j-\Delta_p^*(a_j)-k(1-\nu)-\varepsilon}\right).$$

В случае $\rho(z,\gamma) < \min\{r/8, \rho_{n,j}(x)/4\}$ обозначим $\rho := \rho_{n,j}(x)/2$. Теперь интеграл $\widetilde{h}(z)$ оценивается так же, как и в случае $\rho_{n,j}(x)/4 \le \rho(z,\gamma) < r/8$.

Используя полученные оценки интеграла $\widetilde{h}(z)$ и неравенство $|X(z)| \le$ $\le cr^{\Delta_p(a_j)-\kappa_j-\varepsilon}$, выполняющееся при достаточно малых значениях r, для функции Φ_0 получаем следующую оценку:

$$|\Phi_0(z)| \le c\left(1 + \sum_{j=1}^{2} r^{\Delta_p(a_j)-\Delta_p^*(a_j)-2\varepsilon}\left(r^{\beta_{g,j}} + r^{\alpha_{g,j}-k(1-\nu)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + r^{\alpha_{g,j}+n\,\alpha_{G,j}+\beta_{G,j}} + r^{\alpha_{g,j}-(n+1)\,\alpha^0_{G,j}+\beta_{G,j}}\right)\right) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\gamma.$$

В силу неравенств (28) функция Φ_0 удовлетворяет неравенству

$$|\Phi_0(z)| \le c\sum_{j=1}^{2} |z-a_j|^{-\nu_{\Phi_0}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\gamma,$$

в котором постоянная c не зависит от z и $\nu_{\Phi_0} \in (0;1)$. Следовательно, функция Φ_0 является частным решением неоднородной краевой задачи Римана. При этом отметим, что в случае $\kappa < 0$ функция $X(z)$ имеет полюс порядка $-\kappa$ в бесконечно удаленной точке и Φ_0 является решением краевой задачи Римана лишь при выполнении $(-\kappa-1)$-го условия (25).

Для завершения доказательства остается заметить, что в формуле (26) общее решение неоднородной краевой задачи Римана представлено в виде суммы частного решения этой задачи и общего решения однородной задачи.

Заметим, что если кривая γ удовлетворяет условию (18) при $\nu = 1$, то она удовлетворяет также условию (19). Действительно, обозначим через $\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}, \ldots, \gamma_{k_m}$ те витки γ_k (определенные при доказательстве леммы 5), которые имеют непустое пересечение с множеством $\gamma_{|x-a_j|/2}(x)$, и с учетом неравенств

$$\operatorname{mes}\left(\gamma_{k_s} \cap \gamma_{|x-a_j|/2}(a_j)\right) \ge |x-a_j|/2, \quad s = 1, 2\ldots, m,$$

получим соотношения

$$m\,|x-a_j|/2 \le \sum_{s=1}^{m} \operatorname{mes}\left(\gamma_{k_s} \cap \gamma_{|x-a_j|/2}(a_j)\right) \le \theta_{a_j}(|x-a_j|/2) \le c_\gamma\,|x-a_j|/2,$$

откуда следует оценка $m \le c_\gamma$, где постоянная c_γ зависит только от кривой γ, но не зависит от точки $x \in \gamma$. Поэтому при $n = [c_\gamma]+1$ неравенство $\rho_{n,j}(x) \ge |x-a_j|/2$ выполняется для всех $x \in \gamma \setminus T$ и $j = 1, 2$.

Все другие условия теоремы 3 так же, как и условие (19), выполняются в соответствующих результатах работ [5 – 7] о разрешимости неоднородной краевой задачи Римана; в частности, неравенства (20) выполняются, по крайней мере, при $\alpha^0_{G,j} = -\alpha_{G,j} = \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, оценка (21) выполняется при $\beta_{G,j} = 0$, а в работах [5, 6], кроме того, выполняется равенство $\Delta^*_p = \Delta_p$.

В следующей теореме, которая доказывается аналогично теореме 3, ослабляется условие (19) на кривую γ при одновременном ужесточении условия (18).

Теорема 3. *Пусть $\gamma = \overset{\smile}{a_1 a_2}$ — разомкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условиям*

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^\nu), \quad \varepsilon \to 0, \quad \nu \ge 0,$$
$$\rho_{n,j}(t) \geqslant c\,\exp(|t-a_j|^{-k}) \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \quad k > 0, \quad j = 1, 2,$$

где n — целое неотрицательное число и положительная постоянная c не зависит от t. Пусть функция G представима в виде $G(t) = \exp(p(t))$, при этом $\widetilde{p} \in H_T$ и для всех $a_j \in T$ конечны числа $\Delta_p(a_j), \Delta^*_p(a_j)$ и, кроме того, при всех $t \in \gamma \setminus T$ функция G удовлетворяет оценкам (20), (21), *а функция g — условию* (22) *и при всех $t \in \gamma \setminus T$ — оценкам* (23), (24), *где $\alpha_{g,j} > -1 + \Delta^*_p - \Delta_p + \max\{k(1+\nu);\ (n+1)\alpha^0_{G,j} - \beta_{G,j}\,;\ -n\,\alpha_{G,j} - \beta_{G,j}\}$. Тогда при $\kappa \geqslant -1$ неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при $\kappa < -1$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение $(-\kappa - 1)$-ого условия* (25). *Общее решение задачи дается формулой* (26).

1. *Плакса С. А., Кудьявина Ю. В.* Краевая задача Римана на разомкнутой жордановой спрямляемой кривой. I // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 11. – С. 1511 – 1522.
2. *Васильева Ю. В., Плакса С. А.* Кусочно-непрерывная краевая задача Римана на спрямляемой кривой // Там же. – 2006. – **58**, № 5. – С. 616 – 628.
3. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре. I // Там же. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1509 – 1517.
4. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594 – 601.
5. *Сейфуллаев Р. К.* Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Мат. сб. – 1980. – **112**, № 2. – С. 147 – 161.
6. *Kutlu K.* On Riemann boundary value problem // An. Univ. Timişoara: Ser. mat.-inform. – 2000. – **38**, № 1. – P. 89 – 96.
7. *Pena D., Reyes J.* Riemann boundary value problem on a regular open curve // J. Natur. Geom. – 2002. – **22**, № 1. – P. 1 – 17.

Получено 19.01.10