УДК 517.956

Б. А. Худайгулыев (Туркмен. ун-т, Ашгабат)

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

We consider the problem of finding a nonnegative function $u(x)$ in the ball $B = B(O, R) \subset R^n$, $n \geq$ ≥ 3:

$$-\Delta u = V(x)u, \quad u\big|_{\partial B} = \phi(x),$$

where Δ is the Laplace operator, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ∂B is a boundary of the ball B. It is assumed that $0 \leq V(x) \in L_1(B)$, $0 \leq \phi(x) \in L_1(\partial B)$, and $\phi(x)$ is continuous on ∂B.

We study the behavior of nonnegative solutions of this problem and prove that there exists a constant $C_*(n) = (n-2)^2/4$ such that if $V_0(x) = \dfrac{c}{|x|^2}$, then for $0 \leq c \leq C_*(n)$ and $V(x) \leq$ $\leq V_0(x)$ in the ball B, this problem has a nonnegative solution for all nonnegative continuous boundary functions $\phi(x) \in L_1(\partial B)$ and, for $c > C_*(n)$ and $V(x) \geq V_0(x)$ in the ball B, this problem has no nonnegative solutions if $\phi(x) > 0$.

Розглядається задача знаходження невід'ємної функції $u(x)$ у кулі $B = B(O, R) \subset R^n$, $n \geq 3$:

$$-\Delta u = V(x)u, \quad u\big|_{\partial B} = \phi(x),$$

де Δ — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ∂B — межа кулі B, у припущенні, що $0 \leq$ $\leq V(x) \in L_1(B)$, $0 \leq \phi(x) \in L_1(\partial B)$ і $\phi(x)$ неперервна на ∂B.

Вивчається поведінка невід'ємних розв'язків цієї задачі і доведено, що існує стала $C_*(n) =$ $= (n-2)^2/4$ така, що якщо $V_0(x) = \dfrac{c}{|x|^2}$, то ця задача при $0 \leq c \leq C_*(n)$ і $V(x) \leq V_0(x)$ у кулі B має невід'ємний розв'язок при будь-якій невід'ємній неперервній граничній функції $\phi(x) \in L_1(\partial B)$, а при $c > C_*(n)$ і $V(x) \geq V_0(x)$ у кулі B не має невід'ємних розв'язків, якщо $\phi(x) > 0$.

Рассматривается задача нахождения неотрицательной функции $u(x)$:

$$-\Delta u = V(x)u, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial B} = \phi(x), \tag{2}$$

в шаре $B = B(0, R) \subset R^n$, $n \geq 3$, радиуса R, $R \leq 1$, с центром в начале координат, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ∂B — граница шара B.

В качестве решения уравнения (1) понимается обобщенная функция $u(x) \in$ $\in D'(B)$ такая, что $u(x) \geq 0$, $Vu \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(B)$. Предполагается, что $0 \leq V(x) \in$ $\in L_1(B)$, $0 \leq \phi(x) \in L_1(\partial B)$ и $\phi(x)$ непрерывна на ∂B, где $L_{1,\,\mathrm{loc}}(B)$ — пространство локально интегрируемых в B функций, $L_1(\partial B)$ — пространство интегрируемых на ∂B функций. Через $D'(B)$ обозначим пространство обобщенных функций.

В работе изучается поведение неотрицательных решений задачи (1), (2) и доказывается, что существует постоянная $C_* = C_*(n) = \dfrac{(n-2)^2}{4}$ такая, что если $V_0(x) = c/|x|^2$, то при $0 \leq c \leq C_*$ и $V(x) \leq V_0(x)$ в шаре B эта задача имеет решение, а при $c > C_*$ и $V(x) \geq V_0(x)$ не имеет решений, если $\phi(x) > 0$.

Аналогичный вопрос изучен в работе [1] для первой смешанной задачи для линейного уравнения теплопроводности и в работе [2] для первой смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности.

Пусть $V_0(x) = c/|x|^2$, $x \in B$. Найдем радиальную функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta\varphi + V_0(x)\varphi = -\delta(x)$ в смысле обобщенных функций, где $\delta(x)$ — функция Дирака. Поскольку $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, достаточно решить уравнение $-\Delta\varphi = V_0(x)\varphi$. Положим $\varphi(x) = |x|^{-\alpha}$. Тогда

$$\Delta\varphi = \varphi_{rr} + \frac{n-1}{r}\varphi_r = \alpha(\alpha + 2 - n)|x|^{-\alpha-2},$$

так что $-\Delta\varphi/\varphi = c|x|^{-2}$, где $c = \alpha(n-2-\alpha)$. В случае $\varphi(x) = |x|^{-\alpha} > 0$ условие $\Delta\varphi \in L_1(B)$ означает, что $n - 2 - \alpha > 0$. Последнее выполняется, если $c > 0$ (и $\alpha > 0$). Заметим, что при $0 \leq c \leq C_*(n)$ α определяется из равенства $\alpha = \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} - c}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. 1. *Если* $0 \leq c \leq C_*$ *и* $V(x) \leq V_0(x)$ *в шаре* B, *то задача* (1), (2) *имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной непрерывной граничной функции* $\phi(x) \in L_1(\partial B)$.

2. *Если* $c > C_*$ *и* $V(x) \geq V_0(x)$ *в шаре* B, *то при* $\phi(x) > 0$ *задача* (1), (2) *не имеет неотрицательных решений*.

Доказательство. Сначала докажем первую часть теоремы.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\Delta u_m = V_m(x)u_m, \tag{1_m}$$

$$u_m|_{\partial B} = \phi_m(x), \tag{2_m}$$

где $m = 1, 2, \ldots, 0 \leq V_m(x) \leq V(x)$, $\{V_m(x)\}$ — последовательность монотонно возрастающих ограниченных измеримых функций такая, что $\lim_{m\to\infty} V_m(x) = V(x)$ для почти всех $x \in B$, $0 \leq \phi_m(x) \leq \phi(x)$, $\{\phi_m(x)\}$ — последовательность монотонно возрастающих неотрицательных непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к непрерывной граничной функции $\phi(x) \in L_1(\partial B)$. Из классической теории линейных эллиптических задач [3] следует, что задача (1_m), (2_m) имеет единственное ограниченное неотрицательное решение. Это решение для почти всех $x \in B$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_m(x) = \int\limits_{\partial B} K(x, y)\phi(y)\,dS_y + \int\limits_B G(x, y)V_m(y)u_m(y)\,dy,$$

где $K(x, y)$ — ядро Пуассона, $G(x, y)$ — функция Грина задачи $-\Delta u = 0$, $u|_{\partial B} = 0$, причем $G(x, y) \geq 0$, $K(x, y) > 0$ в B. Очевидно, что последовательность $\{u_m(x)\}$ монотонно возрастает.

Покажем, что предел $u(x)$ последовательности $\{u_m(x)\}$ решений задачи (1_m), (2_m) является решением задачи (1), (2). Умножим уравнение (1_m) на

$u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2$, $p \ge 2$, где $\psi = \psi(x)$ — срезающая функция для шара B, $\varphi = \varphi(x) = |x|^{-\alpha}$ и α определяется из равенства $\alpha(n-2-\alpha) = c$, и проинтегрируем по B:

$$-\int_B \Delta u_m u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2\,dx = \int_B V_m(x)\,u_m u_m^{p-1}\varphi^{2-p}\psi^2\,dx.$$

Положим $k_m = u_m/\varphi$. После прямых вычислений будем иметь

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int_B \left|\nabla\left(k_m^{p/2}\right)\right|^2 \varphi^2\psi^2\,dx + \int_B k_m^p\varphi(-\Delta\varphi)\,\psi^2\,dx + $$
$$+\ 2\int_B \nabla k_m k_m^{p-1}\varphi^2\psi\,\nabla\psi\,dx = \int_B V_m(x)\,k_m^p\varphi^2\psi^2\,dx.$$

Поскольку по предположению $-\Delta\varphi\varphi = V_0(x)\varphi^2 \ge V_m(x)\varphi^2$, из последнего равенства получаем

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int_B \left|\nabla\left(k_m^{p/2}\right)\right|^2 \varphi^2\psi^2\,dx \le 2\left|\int_B \nabla k_m k_m^{p-1}\varphi^2\psi\,\nabla\psi\,dx\right|. \tag{3}$$

Для интеграла в правой части используем обычное неравенство Коши:

$$2\left|\int_B \nabla k_m\, k_m^{p-1}\varphi^2\psi\,\nabla\psi\,dx\right| \le \frac{2}{p^2}\int_B \left|\nabla\left(k_m^{p/2}\right)\right|^2\varphi^2\psi^2\,dx + 2\int_B k_m^p\,\varphi^2\,|\nabla\psi|^2\,dx.$$

Теперь неравенство (3) можно записать в виде

$$\int_B \left|\nabla\left(k_m^{p/2}\right)\right|^2 \varphi^2\psi^2\,dx \le \frac{p^2}{2(p-3/2)}\int_B k_m^p\varphi^2\,|\nabla\psi|^2\,dx. \tag{4}$$

Используя интегрирование по частям и неравенство Гельдера, можно доказать следующий факт.

Пусть $0 \le h(s) \in C^1[0, r]$ и $h(r) = 0$, $0 < r \le 1$. Тогда при $p \ge 2$ выполняется неравенство

$$\left(\int_0^r h^{np/(n-2)}\, s^{n-2\alpha-1}\,ds\right)^{(n-2)/n} \le K\int_0^r \left|\left(h^{p/2}(s)\right)'\right|^2 s^{n-2\alpha-1}\,ds, \tag{5}$$

где постоянная $K = K(n,\alpha) > 0$ и α определяется из равенства $\alpha(n-2-\alpha) = c$.

Пусть $B_r = B(0, r) \subset\subset B$. Выберем функцию $\psi(x)$ следующим образом: $0 \le \psi(x) \le 1$, $\psi(x) = 1$ при $x \in B_{r-\delta}$, $\psi(x) = 0$ при $x \in B\backslash B_r$, $\delta > 0$. Предположим, что $|\nabla\psi|^2 \le C_1\delta^{-2}$. Тогда неравенство (4) примет вид

$$\int_{B_{r-\delta}} \left|\nabla\left(k_m^{p/2}\right)\right|^2\varphi^2\,dx \le \frac{C_1\delta^{-2}p^2}{2(p-3/2)}\int_{B_r} k_m^p\varphi^2\,dx. \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует, что для любой неотрицательной функции $v(x) \in C_0^1(B_r)$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{B_r} v^{np/(n-2)}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{(n-2)/n} \le C_2 \int_{B_r} \left|\nabla\left(v^{p/2}(x)\right)\right|^2 \varphi^2\,dx. \tag{7}$$

Поэтому, используя неравенство (6) и неравенство Коши, получаем

$$\left(\int_{B_{r-\delta}} k_m^{np/(n-2)}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{(n-2)/n} \le \left(\int_{B_r} (k_m\psi)^{np/(n-2)}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{(n-2)/n} \le$$

$$\le C_2 \int_{B_r} \left|\nabla\left(k_m^{p/2}(x)\,\psi\right)\right|^2 \varphi^2\,dx \le \frac{C_3\delta^{-2}p^2}{p-3/2}\int_{B_r} k_m^p(x)\,\varphi^2\,dx.$$

Таким образом,

$$\left(\int_{B_{r-\delta}} k_m^{np/(n-2)}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{(n-2)/pn} \le \left(\frac{C_3\,\delta^{-2}p^2}{p-3/2}\right)^{1/p}\left(\int_{B_r} k_m^p(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{1/p}. \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad r_1 = r, \quad r_{j+1} = r_j - \frac{\varepsilon}{2^j},$$

$$p_j = 2\left(\frac{n}{n-2}\right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Тогда в этих обозначениях неравенство (8) примет вид

$$\left(\int_{B_{r_{j+1}}} k_m^{p_{j+1}}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{1/(p_{j+1})} \le \left(\frac{C_3\,2^{2j}\,p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)^{1/p_j}\left(\int_{B_{r_j}} k_m^{p_j}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{1/p_j}, \tag{9}$$

откуда по индукции находим

$$\left(\int_{B_{r_{j+1}}} k_m^{p_{j+1}}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{1/(p_{j+1})} \le \left(\frac{C_3\,p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right)^{1/p_j} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{C_3\,p_1^2}{\varepsilon^2(p_1-3/2)}\right)^{1/p_1} \cdot 2^{\sum_{i=1}^{j} 2i/p_i}. \tag{10}$$

Но ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p_j}\ln\left(\frac{C_3\,p_j^2}{\varepsilon^2(p_j-3/2)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ сходится, так как $\alpha_j \sim$ $\sim \mu^{-j}\ln(C\mu^j)$ при $\mu > 1$. Кроме того, сходится и ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2j}{p_j} =$ $= \sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{n-2}{n}\right)^{j-1}$. Отсюда для всех $j \ge 1$ имеем $\left(\int_{B_{r_j}} k_m^{p_j}(x)\,\varphi^2\,dx\right)^{1/p_j} \le A$, причем постоянная $A > 0$ не зависит от p. Поэтому, переходя в неравенстве (10) к пределу при $j \to \infty$, получаем $\sup k_m(x) \le A$ для почти всех $x \in B$. Это означает, что $k_m(x) \le A$ для почти всех $x \in B$ и $u_m(x) \le A\varphi(x)$ для почти всех $x \in B$. В силу монотонности последовательности $\{u_m(x)\}$ можем положить $k = \lim_{m\to\infty} k_m$, $u = \lim_{m\to\infty} u_m$ для почти всех $x \in B$.

Теперь покажем, что $Vu \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(B)$. Зафиксируем точку $x_0 \in B$ такую, что $u(x_0)$ конечна. Тогда для любого m и для любой компактной подобласти $\Omega \subset B$ из интегрального уравнения для функции $u_m(x)$ имеем

$$u_m(x_0) \;\geq\; \int\limits_{\Omega} G(x_0,\, y)\, V_m(y)\, u_m(y)\, dy\,.$$

Но в силу строгого принципа максимума существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что $G(x_0,\, y) \geq C_0$ в Ω. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} V_m(y)\, u_m(y)\, dy \;\leq\; C_0^{-1}\, u_m(x_0) \;\leq\; C_0^{-1}\, u(x_0)\,. \tag{11}$$

Это и показывает, что $Vu \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(B)$.

Поскольку u_m — решение задачи (1_m), (2_m), для любой функции $\xi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} u_m\, \Delta\, \xi\, dx \;+\; \int\limits_{\Omega} V_m\, u_m \xi\, dx \;=\; 0.$$

Отсюда, учитывая (11) и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} u\, \Delta\, \xi\, dx \;+\; \int\limits_{\Omega} V\, u \xi\, dx \;=\; 0.$$

Это и показывает, что $u(x)$ является решением задачи (1), (2). Первая часть теоремы доказана.

Теперь покажем, что если $V(x) \geq V_0(x)$, то при $\phi > 0$ для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset\subset B = B(0,\, R)$ такой, что $0 \in \Omega'$, существует постоянная $C = C(\varepsilon,\, \Omega') > 0$ такая, что

$$u(x) \;\geq\; C \cdot \varphi(x) \tag{12}$$

для почти всех $x \in \Omega'$, где $\varphi(x) = |x|^{-\alpha}$, α определяется из равенства $\alpha(n - 2 - \alpha) = c$.

Пусть $B_0 = B(0,\, r_0) \subset \Omega'$ — шар радиуса r_0 с центром в начале координат. Далее, пусть v — решение задачи

$$-\Delta\, v \;=\; V_0 v\,, \qquad v\big|_{\partial B_0} \;=\; \phi(x)\,.$$

Здесь v — предел последовательности $\{v_m\}$ единственных неотрицательных решений задачи

$$-\Delta\, v_m \;=\; V_m v_m\,, \qquad v_m\big|_{\partial B_0} \;=\; \phi_m(x)\,, \tag{13}$$

где $V_m = \inf\{V_0,\, m\}$ и $\{\phi_m(x)\}$ — последовательность монотонно возрастающих неотрицательных непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к непрерывной граничной функции $\phi(x) \in L_1(\partial B)$. Очевидно, что $u \geq v \geq v_m$.

Покажем, что для почти всех $x \in \dfrac{1}{2} B_0 = B_{r_0/2}$ выполняется неравенство

$$v(x) \ \geq \ \text{Const} \cdot \varphi(x). \tag{14}$$

Пусть $g\colon [0, \infty[\ \to \ [0, \infty[$ — неотрицательная выпуклая функция из C^2. Умножим уравнение из (13) на $g'(k_m)\, g(k_m)\, \varphi\psi^2$, где $k_m = \dfrac{v_m}{\varphi}$, ψ — срезающая функция для шара B_0, и проинтегрируем по B_0:

$$-\int\limits_{B_0} \Delta\, v_m g'(k_m)\, g(k_m)\, \varphi\psi^2\, dx \ = \ \int\limits_{B_0} V_m v_m g'(k_m)\, g(k_m)\, \varphi\psi^2\, dx .$$

Отсюда после прямых вычислений получаем

$$\int\limits_{B_0} |\nabla\, g(k_m)|^2\, \varphi^2\psi^2\, dx \ + \ \int\limits_{B_0} g''(k_m)\, |\nabla\, k_m|^2\, g(k_m)\, \varphi^2\psi^2 dx \ +$$

$$+ \ \int\limits_{B_0} \nabla\, g(k_m)\, g(k_m)\, \varphi^2\, \nabla\, \psi^2 dx \ = \ \int\limits_{B_0} (\Delta\, \varphi + V_m\, \varphi)\, g'(k_m)\, g(k_m)\, k_m\, \varphi\psi^2 dx .$$

Но второй член в левой части неотрицателен, так как функция g выпукла и неотрицательна. Для третьего члена в левой части используем обычное неравенство Коши:

$$2\left|\,\int\limits_{B_0} \nabla\, g(k_m)\, g(k_m)\, \varphi^2\psi\, \nabla\psi\, dx\right| \ \leq \ \frac{1}{2}\int\limits_{B_0} |\nabla\, g(k_m)|^2 \varphi^2\psi^2 dx \ +$$

$$+ \ 2\int\limits_{B_0} g^2(k_m)\, \varphi^2\, |\nabla\, \psi|^2\, dx .$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_0} |\nabla\, g(k_m)|^2\, \varphi^2\psi^2\, dx \ \leq \ 2\int\limits_{B_0} g^2(k_m)\, \varphi^2\, |\nabla\, \psi|^2 dx \ +$$

$$+ \ \int\limits_{B_0} (\Delta\, \varphi + V_m \varphi)\, g'(k_m)\, g(k_m)\, k_m \varphi\psi^2 dx .$$

Пусть $B_r = B(0, r)$ — шар достаточно малого радиуса. Теперь предположим, что $\varphi\, \Delta\, \varphi \in L_1(B_r)$ (что эквивалентно условию $\alpha < (n-2)/2$). Поскольку по предположению функция g выпукла и неотрицательна, $V_m(x) \ \leq \ V_0(x) = -\Delta\, \varphi/\varphi$ и, кроме того, $\|k_m\|_\infty$ ограничена, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла второй член в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{B_r} |\nabla\, g(k)|^2 \varphi^2\psi^2 dx \ \leq \ 4\int\limits_{B_r} g^2(k)\, \varphi^2\, |\nabla\, \psi|^2 dx . \tag{15}$$

Выберем функцию $\psi(x)$ следующим образом: $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1$ в $B_{r-\delta}$, $\psi(x) = 0$ в $B_0 \backslash B_r$, $\delta > 0$. Предположим, что $|\nabla\, \psi|^2 \leq C_4 \delta^{-2}$, где постоянная $C_4 > 0$ не зависит от δ. Тогда неравенство (15) примет вид

$$\int\limits_{B_{r-\delta}} |\nabla\, g(k)|^2 \varphi^2 dx \ \leq \ 4\, C_4 \delta^{-2} \int\limits_{B_r} g^2(k)\, \varphi^2 dx . \tag{16}$$

Теперь нам понадобится следующий факт из работы [1, с. 129]:

если $0 < r' \le r \le 1$ и $h(s) \in C^1[0, r]$, то выполняется неравенство

$$\left(\int_0^r |h(s)|^q s^{n-2\alpha-1} ds\right)^{2/q} \le C_5 \int_0^r \left[|h'(s)|^2 + h^2(s)\right] s^{n-2\alpha-1} ds, \tag{17}$$

где $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n-2\alpha}$ (и $q < \infty$, если $n - 2\alpha = 2$). Постоянная C_5 зависит от r', но не зависит от r.

***Замечание* 1.** Если Q задано и $2 \le q \le \min\left\{Q,\ 2(n-2\alpha)(n-2\alpha-2)^{-1}\right\}$, то постоянная C_5 в неравенстве (17) равномерно ограничена при $\alpha \in \left[0, (n-2)/2\right]$.

Определим β формулой $\beta + \dfrac{2}{q} = 1$, где $1 > \dfrac{2}{q} \ge \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n-2\alpha}$. Используя неравенство Гельдера и неравенство (17) для неотрицательной функции h, имеем

$$\int_{B_r} h^{2+2\beta}\varphi^2 dx \le \left(\int_{B_r} h^q \varphi^2 dx\right)^{2/q} \left(\int_{B_r} h^2\varphi^2 dx\right)^{\beta} \le$$

$$\le C_5 \left(\int_{B_r} |\nabla h|^2 \varphi^2 dx + \int_{B_r} h^2\varphi^2 dx\right)\left(\int_{B_r} h^2\varphi^2 dx\right)^{\beta}, \tag{18}$$

откуда, заменяя h на $g(k)$ и B_r на $B_{r-\delta}$, получаем

$$\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k)\varphi^2 dx \le$$

$$\le C_5 \left(\int_{B_{r-\delta}} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 dx + \int_{B_r} g^2(k)\varphi^2 dx\right)\left(\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2 dx\right)^{\beta}.$$

Используя неравенство (16), из последнего неравенства находим

$$\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k)\varphi^2 dx \le C_5(4C_4\delta^{-2} + 1)\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2 dx \left(\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2\, dx\right)^{\beta} \le$$

$$\le C_6\delta^{-2}\left(\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2\, dx\right)^{1+\beta}$$

или

$$\left(\int_{B_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k)\varphi^2\, dx\right)^{1/(2+2\beta)} \le (C_6\,\delta^{-2})^{1/(2+2\beta)}\left(\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2\, dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le C_7\delta^{-1}\left(\int_{B_r} g^2(k)\varphi^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad r_1 = r, \quad r_{j+1} = r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad g_{j+1} = g_j^{1+\beta},$$

$$H_j = \left(\int\limits_{B_{r_j}} g_j^2(k)\varphi^2 dx \right)^{1/2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad g_1 = g.$$

В этих обозначениях неравенство (19) примет вид

$$H_{j+1}^{1/(1+\beta)} \le C_7\, 2^j \varepsilon^{-1} H_j,$$

откуда по индукции

$$H_j^{1/(1+\beta)} \le \left(C_7 \varepsilon^{-1}\right)^{\alpha_j} 2^{\gamma_j} H_1^{(1+\beta)^{j-2}},$$

где $\alpha_j = (1+\beta)^{j-2} \sum_{\nu=0}^{j-2} (1+\beta)^{-\nu}$, $\gamma_j = \sum_{\nu=0}^{j-1} (1+\nu)(1+\beta)^{j-2-\nu}$. Поскольку $g_j = g^{(1+\beta)^{j-1}}$, переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} g(k(x)) \le \left(C_7\, \varepsilon^{-1}\, 2^{(1+\beta)/\beta}\right)^{(1+\beta)/\beta} \left(\int\limits_{B_r} g^2(k)\varphi^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Заменим g последовательностью $\{g_l\}$, где g_l те же, что и g, $g_l(k) \to k^{-\gamma}$ при $l \to \infty$. Тогда

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \le \left(C_7\, \varepsilon^{-1}\, 2^{(1+\beta)/\beta}\right)^{(1+\beta)/\beta} \left(\int\limits_{B_r} k^{-2\gamma}\varphi^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Так как при $r < r_0$ для почти всех $x \in B_r$: $k(x) = \upsilon(x)/\varphi(x) \ge C_8\, \varphi^{-1}(x)$, имеем

$$\sup_{B_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \le C_9\, \varepsilon^{-1-1/\beta} \left(\int\limits_{B_r} \varphi^{2+2\gamma}\, dx \right)^{1/2},$$

откуда

$$k(x) \ge C_{10}\, \varepsilon^{(1+1/\beta)/\gamma} \left(\int\limits_{B_r} \varphi^{2+2\gamma}\, dx \right)^{-1/2\gamma} \tag{20}$$

для почти всех $x \in B_{r-\varepsilon}$, Здесь постоянная $C_{10} > 0$ не зависит от r и ε. Неравенство (14), а следовательно, и неравенство (12) доказаны для случая $\alpha < (n-2)/2$; нетрудно показать, что это неравенство имеет место и в предельном случае $\alpha = (n-2)/2$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Пусть $c > C_*(n)$, $V(x) \ge V_0(x)$ и $\phi(x) > 0$. Если задача (1), (2) имеет решение, то оно удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u \;=\; C_*(n)\,|\,x\,|^{-2}\,u \;+\; \big(c - C_*(n)\big)\,|\,x\,|^{-2}\,u$$

в $D'(B)$. Умножая это уравнение на $|\,x\,|^{-(n-2)/2}$ и интегрируя по B, получаем

$$-\int\limits_B \Delta u\,|\,x\,|^{-(n-2)/2}\,dx \;=\; C_*\int\limits_B u\,|\,x\,|^{-(n+2)/2}dx \;+\; (c - C_*)\int\limits_B u\,|\,x\,|^{-(n+2)/2}dx\,.$$

Но из неравенства (12) следует, что для любого шара $B_r \subset\subset B$: $u(x) \ge$ $\ge \mathrm{Const}\cdot\varphi(x) = \mathrm{Const}\cdot|\,x\,|^{-(n-2)/2}$, поэтому

$$\int\limits_{B_r} u(x)\,|\,x\,|^{-(n+2)/2}dx \;\ge\; \mathrm{Const}\int\limits_{B_r}|\,x\,|^{-n}dx \;=\; \infty.$$

Это и доказывает вторую часть теоремы.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Теорема может быть доказана для потенциалов $V(x) =$ $= -\Delta\varphi/\varphi$, где $\varphi > 0$, $\Delta\varphi \in L_1(B)$ и для которых при некотором $q > 2$ выполняется неравенство

$$\left(\int\limits_B |\,h\,|^q\,\varphi^2\,dx\right)^{1/q} \;\le\; \mathrm{Const}\left(\int\limits_B |\,\nabla h\,|^2\,\varphi^2\,dx + \int\limits_B |\,h\,|^2\,\varphi^2\,dx\right)^{1/2}.$$

1. *Baras P., Goldstein J. A.* The heat equation with a singular potential // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – **284**, № 1. – P. 121 – 139.
2. *Garsia Azorero J., Peral I.* Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems // Different. Equat. – 1998. – **144**. – P. 441 – 476.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка – М.: Наука, 1989.

Получено 23.10.09,
после доработки — 27.07.10