УДК 517.925.46

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ПОСИЛЕННЯ ТЕОРЕМИ КНЕЗЕРА ПРО НУЛІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $u'' + q(t)u = 0$ З ВИКОРИСТАННЯМ ОДНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

We present conditions under which a linear homogeneous second-order equation is nonoscillatory on the semiaxis and also conditions under which its solutions have infinitely many zeros.

Приведеы условия, при которых линейное однородное уравнение второго порядка является неосциллирующим на полуоси, а также условия, при которых его решения имеют бесконечное число нулей.

1. Постановка основної задачі. Встановимо умови коливності розв'язків лінійного диференціального рівняння

$$u'' + q(t)u = 0, \tag{1}$$

де $q: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Ця задача — об'єкт досліджень багатьох математиків (див. [1 – 12]).

Розглянемо один підхід до дослідження рівняння (1), що дозволить іншим способом посилити теорему Кнезера про нулі рівняння (1) (перший варіант наведено автором в [10]) та отримати результати про одне важливе для (1) функціональне рівняння та його розв'язки.

Спочатку виконаємо заміну змінних t та u в рівнянні (1).

Вважатимемо, що

$$t = e^s + 1 - e \quad \text{і} \quad u(t) = \omega(s)z(s), \tag{2}$$

де $\omega(s)$ і $z(s)$ — двічі неперервно диференційовні на $[1, +\infty)$ функції.

Використовуючи правила диференціювання функцій [13], отримуємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = \left(\frac{d\omega}{ds}z + \omega\frac{dz}{ds}\right)e^{-s},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\left(\frac{d\omega}{ds}z + \omega\frac{dz}{ds}\right)e^{-s}\right)}{ds}e^{-s} =$$

$$= \left(-\left(\frac{d\omega}{ds} z + \omega \frac{dz}{ds} \right) e^{-s} + \left(\frac{d^2\omega}{ds^2} z + 2 \frac{d\omega}{ds} \frac{dz}{ds} + \omega \frac{d^2 z}{ds^2} \right) e^{-s} \right) e^{-s} =$$

$$= \left(\left(\omega \frac{d^2 z}{ds^2} + 2 \frac{d\omega}{ds} \frac{dz}{ds} + \frac{d^2\omega}{ds^2} z \right) - \left(\omega \frac{dz}{ds} + \frac{d\omega}{ds} z \right) \right) e^{-2s}. \tag{3}$$

Завдяки (2) і (3) рівняння (1) матиме вигляд

$$e^{-2s} \left(\omega \frac{d^2 z}{ds^2} + \left(2 \frac{d\omega}{ds} - \omega \right) \frac{dz}{ds} + \left(\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{d\omega}{ds} \right) z \right) + q(e^s + 1 - e)\omega z = 0. \tag{4}$$

Далі виберемо функцію $\omega(s)$ так, щоб $2 \dfrac{d\omega}{ds} - \omega \equiv 0$ і $\omega(1) = 1$. Ці умови, очевидно, задовольняє функція

$$\omega = e^{(s-1)/2}. \tag{5}$$

Оскільки

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{4} e^{(s-1)/2},$$

то рівняння (4) рівносильне рівнянню

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(e^{2s} q(e^s + 1 - e) - \frac{1}{4} \right) z = 0. \tag{6}$$

Отже, якщо виконати в рівнянні (1) заміну змінних t та u згідно з (2) і (5), то прийдемо до рівняння (6), що аналогічне (1).

Тепер уточнимо основну мету цієї статті.

У подальшому з'ясуємо, який вигляд повинна мати функція $q(t)$ в рівнянні (1), щоб при розглянутих вище замінах змінних t та u диференціальне рівняння (6) збігалося з вихідним рівнянням (1), і дослідимо це рівняння при такому q на предмет коливності розв'язків. Очевидно, що функція $q(t)$, що нас цікавить, повинна бути розв'язком функціонального рівняння

$$x(t) = e^{2t} x(e^t + 1 - e) - \frac{1}{4}, \qquad t \geq 1. \tag{7}$$

2. Дослідження функціонального рівняння (7). Розглянемо функції

$$v_0(t) = \frac{t - 1 + e}{e}, \qquad v_n(t) = \frac{\ln(e v_{n-1}(t)) - 1 + e}{e}, \qquad n \geq 1,$$

$$Q_k(t) = \prod_{n=0}^{k} v_n(t), \qquad k \geq 0,$$

що визначені і неперервні на $[1, +\infty)$.

Теорема 1. *Функціональне рівняння* (7) *має єдиний неперервний на* $[1, +\infty)$ *розв'язок* $K = K(t)$, *що зображується у вигляді*

$$K(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4e^{2n}(Q_{n-1}(t))^2}. \tag{8}$$

Доведення. Використаємо нову змінну

$$\tau = e^t + 1 - e.$$

Тоді функціональне рівняння (7) набере вигляду

$$x(\tau) = \frac{1}{4(\tau - 1 + e)^2} + \frac{1}{(\tau - 1 + e)^2} x\big(\ln(\tau - 1 + e)\big), \qquad \tau \geq 1. \tag{9}$$

Оскільки для всіх $\tau \geq 1$

$$\frac{1}{(\tau - 1 + e)^2} \leq \frac{1}{e^2} < 1,$$

то в банаховому просторі $C_b([1, +\infty), \mathbb{R})$ неперервних і обмежених функцій $x\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C_b([1, +\infty), \mathbb{R})} = \sup_{\tau \geq 1} |x(\tau)|$ лінійний оператор

$$(Ax)(\tau) = \frac{1}{4(\tau - 1 + e)^2} + \frac{1}{(\tau - 1 + e)^2} x\big(\ln(\tau - 1 + e)\big), \qquad \tau \geq 1,$$

є стискаючим. Тому у просторі $C_b([1, +\infty), \mathbb{R})$ цей оператор має єдину нерухому точку (позначимо її через $K = K(t)$), а функціональне рівняння (9) — єдиний розв'язок $K \in C_b([1, +\infty), \mathbb{R})$. Легко перевірити, що

$$K(t) = \frac{1}{4(t - 1 + e)^2} + \frac{1}{4(t - 1 + e)^2(\ln(t - 1 + e) - 1 + e)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{4e^{2n}(Q_{n-1}(t))^2} + \ldots,$$

тобто справджується рівність (8). Зазначимо, що сума функціонального ряду в правій частині попереднього співвідношення є неперервною на $[1, +\infty)$ функцією, оскільки члени цього ряду неперервні на $[1, +\infty)$ і цей ряд мажорується на $[1, +\infty)$ числовим рядом

$$\frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4e^4} + \ldots + \frac{1}{4e^{2n}} + \ldots.$$

Покажемо, що рівняння (7) не може мати необмежений неперервний на $[1, +\infty)$ розв'язок. Позначимо через $v(t)$ довільний неперервний розв'язок цього рівняння і, отже, рівняння (9). Оскільки

$$\ln(\tau - 1 + e) \leq \tau,$$

$$\frac{1}{4(\tau - 1 + e)^2} \leq \frac{1}{4e^2}$$

і

$$\frac{1}{(\tau - 1 + e)^2} \leq \frac{1}{e^2} < 1$$

для всіх $\tau \geq 1$, то завдяки (9) для кожного числа $T \geq 1$ виконується нерівність

$$\max_{1 \leq \tau \leq T} |v(\tau)| \leq \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{e^2} \max_{1 \leq \tau \leq T} |v(\tau)|.$$

Звідси випливає, що

$$\max_{1 \leq \tau \leq T} |v(\tau)| \leq \frac{\frac{1}{4e^2}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{1}{4(e^2 - 1)}, \qquad T \geq 1.$$

Отже, кожний неперервний розв'язок рівняння (7) є елементом простору $C_b([1, +\infty), \mathbb{R})$.

Теорему 1 доведено.

3. Зв'язок між розв'язками рівнянь (1) і (6) у випадку $q(t) = K(t)$. Завдяки дослідженням, викладеним у п. 1, функціям (2), (5) та тотожності

$$K(t) \equiv e^{2t} K(e^t + 1 - e) - \frac{1}{4}$$

правильним є наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо функція $z = z(t)$ є розв'язком диференціального рівняння*

$$y'' + K(t) y = 0, \tag{10}$$

то розв'язком цього рівняння також є функція

$$u(t) = \sqrt{v_0(t)}\, z(\ln(t - 1 + e)).$$

4. Неколивність розв'язків рівняння (10). Спочатку покажемо, що правильним є наступне твердження.

Теорема 3. *Існує єдиний розв'язок рівняння* (10), *для якого* $z(1) = 1$ *і*

$$z(t) = \sqrt{v_0(t)}\, z(\ln(t - 1 + e)), \qquad t \geq 1. \tag{11}$$

Доведення. Нехай $z = z(t)$ — розв'язок рівняння (10), що задовольняє умову $z(1) = 1$ (таких розв'язків є нескінченно багато). Тоді за теоремою 2 функція

$$u(t) = \sqrt{\frac{t - 1 + e}{e}}\, z(\ln(t - 1 + e))$$

також є розв'язком рівняння (10) і $u(1) = 1$. Виберемо розв'язок z цього рівняння так, щоб

$$u'(1) = z'(1). \tag{12}$$

Оскільки

$$u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{e}\sqrt{t-1+e}}\left(z(\ln(t-1+e)) + 2z'(\ln(t-1+e))\right), \qquad t \geq 1,$$

то

$$u'(1) = \frac{1}{2e}(1 + 2z'(1)).$$

На підставі (12)

$$z'(1) = \frac{1}{2e}(1 + 2z'(1)).$$

Звідси отримуємо

$$z'(1) = \frac{1}{2(e-1)}.$$

Отже, існує єдиний розв'язок z рівняння (10), для якого

$$z(1) = 1 \quad \text{і} \quad z'(1) = u'(1).$$

Оскільки рівняння (10) має єдиний розв'язок y, що задовольняє початкові умови

$$y(1) = 1 \quad \text{і} \quad y'(1) = \frac{1}{2(e-1)},$$

а розв'язки z і u рівняння (10) також задовольняють ці умови, то виконується співвідношення (11).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Функція* $z = z(t)$, *що задовольняє умови теореми* 3, *додатна на* $[1, +\infty)$.

Доведення. Якщо точка $t^* \in [1, +\infty)$ є нулем функції $z(t)$, то

$$\ln(t^* - 1 + e) = t^*$$

завдяки (11) і тому, що $v_0(t) > 0$ для всіх $t \in [1, +\infty)$. Оскільки $\ln(t-1+e) < t$ для всіх $t > 1$ і $\ln(t-1+e) = t$ тільки для $t = 1$, то $t^* = 1$. Однак $z(1) = 1$. Звідси випливає, що множина нулів функції $z(t)$ є порожньою.

Отже, завдяки неперервності $z(t)$ на $[1, +\infty)$ та рівності $z(1) = 1$ множина значень цієї функції міститься в $(0, +\infty)$.

Теорему 4 доведено.

Легко показати, що функція $z(t)$, яка задовольняє умови теореми 3, має вигляд

$$z(t) = \sqrt{\prod_{k=0}^{+\infty} v_k(t)}.$$

Основним у цьому пункті є наступне твердження.

Теорема 5. *Кожний ненульовий розв'язок диференціального рівняння* (10) *на проміжку* $[1, +\infty)$ *має не більше одного нуля.*

Це твердження — наслідок теореми 4 та теореми Штурма про відокремлення нулів [1, 5, 9].

5. Умови коливності розв'язків рівняння (1). У цьому пункті наведемо основне твердження про коливність розв'язків рівняння (1), що посилює теорему Кнезера про нулі розв'язків цього рівняння і показує важливість функції $K(t)$.

Теорема 6. *Нехай* $q\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ — *неперервна функція. Якщо виконується нерівність*

$$q(t) \leq K(t)$$

для всіх досить великих $t \geq 1$, *то кожний розв'язок диференціального рівняння* (1) *на проміжку* $[1, +\infty)$ *має не більше скінченного числа нулів. Якщо для деякого натурального числа* n

$$\varliminf_{t \to +\infty} (q(t) - K(t))(Q_n(t))^2 > 0, \tag{13}$$

то кожний ненульовий розв'язок рівняння (1) *має нескінченну множину нулів у кожному інтервалі* $(t_1, +\infty)$, $t_1 \geq 1$.

Ця теорема наведена автором у статті [10]. Повторення її тут є природним і підкреслює важливість проведених у попередніх пунктах досліджень, пов'язаних із функцією $K(t)$. Функція $K(t)$ у певному сенсі є універсальною (ця функція краща, ніж функції, які розглядали Хілле [3] і Хартман [4] (див. також наступний пункт)). Крім цього ми наведемо інше доведення частини твердження теореми 6, що стосується коливності розв'язків рівняння (1).

***Доведення теореми* 6.** Розглянемо число $t_0 \in (1, +\infty)$, для якого виконується співвідношення

$$q(t) \leq K(t), \quad t \geq t_0. \tag{14}$$

Також розглянемо довільний ненульовий розв'язок $y = y(t)$ рівняння (1). Завдяки теоремі порівняння [9, с. 588], теоремі 4 та співвідношенню (14) розв'язок $y = y(t)$ рівняння (1) на проміжку $[t_0, +\infty)$ може мати не більше одного нуля. Цей розв'язок на проміжку $[1, t_0]$ може мати лише скінченне число нулів (див., наприклад, [9, с. 582, 583]). Тому множина нулів розв'язку y на $[1, +\infty)$ є скінченною множиною.

Отже, першу частину теореми доведено.

Доведемо тепер другу частину теореми.

Позначимо нижню границю у співвідношенні (13) через γ. За допомогою цієї границі функцію $q(t)$ можна подати у вигляді

$$q(t) = \frac{\psi + \varepsilon(t)}{(Q_n(t))^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4e^{2(k+1)}(Q_k(t))^2},$$

де $\varepsilon\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої $\varliminf_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0$. Виконавши у рівнянні (1) заміну змінних t та u за формулами

$$t = e^{s_1} + 1 - e, \quad u(t) = \sqrt{v_0(s_1)}\, z_1(s_1),$$

як і в першому пункті, прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{d^2 z_1(s_1)}{ds_1^2} + q_1(s_1)\, z_1(s_1) = 0, \tag{15}$$

де

$$q_1(s_1) = \frac{\gamma + \varepsilon_1(s_1)}{(Q_{n-1}(s_1))^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4e^{2(k+1)}(Q_k(s_1))^2}$$

і

$$\varepsilon_1(s_1) = \varepsilon\left(\ln(t-1+e)\right).$$

Далі, виконавши у рівнянні (15) заміну змінних s_1 та z_1 за формулами

$$s_1 = e^{s_2} + 1 - e, \qquad z_1(s_1) = \sqrt{v_0(s_2)}\, z_2(s_2),$$

отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 z_2(s_2)}{ds_2^2} + q_2(s_2)\, z_2(s_2) = 0, \tag{16}$$

де

$$q_2(s_2) = \frac{\gamma + \varepsilon_2(s_2)}{(Q_{n-2}(s_2))^2} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{4e^{2(k+1)}(Q_k(s_1))^2}$$

і

$$\varepsilon_2(s_2) = \varepsilon_1\big(\ln(s_1 - 1 + e)\big) = \varepsilon\left(\ln(\ln(t-1+e) - 1 + e)\right).$$

Виконуючи далі послідовно аналогічні заміни змінних за формулами

$$s_2 = e^{s_3} + 1 - e, \qquad z_2(s_2) = \sqrt{v_0(s_3)}\, z_3(s_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = e^{s_{n+1}} + 1 - e, \qquad z_n(s_n) = \sqrt{v_0(s_{n+1})}\, z_{n+1}(s_{n+1}),$$

приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{d^2 z_{n+1}(s_{n+1})}{ds_{n+1}^2} + (\gamma + \varepsilon_{n+1}(s_{n+1}))\, z_{n+1}(s_{n+1}) = 0, \tag{17}$$

в якому $\varepsilon_{n+1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і

$$\varliminf_{s_{n+1} \to +\infty} \varepsilon_{n+1}(s_{n+1}) = 0. \tag{18}$$

Очевидно, що

$$u(t) = \sqrt{v_0(s_1)\, v_0(s_2) \ldots v_0(s_{n+1})}\, z_{n+1}(s_{n+1}). \tag{19}$$

Оскільки $\gamma > 0$, то кожний ненульовий розв'язок рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds_{n+1}^2} + \frac{\gamma}{2} w = 0$$

має на проміжку $[1, +\infty)$ нескінченне число нулів. На підставі того, що для всіх досить великих додатних s_{n+1}

$$\frac{\gamma}{2} + \varepsilon_{n+1}(s_{n+1}) > 0$$

(завдяки (18)), та теореми порівняння [9, с. 588] аналогічну властивість мають усі ненульові розв'язки диференціального рівняння (17). Завдяки (19) і тому, що

$$v_0(s_1)\, v_0(s_2) \ldots v_0(s_{n+1}) \geq 1$$

для всіх $s_1 \geq 1$, $s_2 \geq 1, \ldots$, $s_{n+1} \geq 1$, ненульові розв'язки рівняння (1) мають нескінченне число нулі на кожному проміжку $[t_1, +\infty)$, $t_1 \geq 1$.

Теорему 6 доведено.

6. Порівняння теореми 6 з теоремою Кнезера. Наведені вище результати тісно пов'язані з теоремою Кнезера про нулі розв'язків рівняння (1), тобто з наступним твердженням.

Теорема Кнезера [2]. *Якщо в рівнянні* (1) *коефіцієнт* $q(t)$ *задовольняє умову*

$$0 < q(t) \leq \frac{1}{4t^2}, \qquad t \geq t_0,$$

то його ненульові розв'язки не можуть мати нескінченне число нулів в інтервалі $(t_0, +\infty)$. *Якщо ж*

$$q(t) > \frac{1+\alpha}{4t^2}, \quad \alpha > 0, \quad t \geq t_1,$$

то кожний ненульовий розв'язок рівняння (1) *має нескінченну множину нулів в інтервалі* $(t_1, +\infty)$.

Хілле [3] і Хартман [4] переконалися, що твердження теореми Кнезера залишаються правильними, якщо в цій теоремі функції

$$p_1(t, 0) \leq \frac{1}{4t^2} \quad \text{і} \quad p_1(t, \alpha) \leq \frac{1+\alpha}{4t^2}$$

замінити відповідно функціями $p_n(t, 0)$ і $p_n(t, \alpha)$, $n \geq 2$, де

$$p_n(t, \beta) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + p_{n-1}(\ln t, \beta)\right), \qquad n \geq 2, \qquad \beta \in \{0, \alpha\}.$$

Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує таке число $\alpha > 0$, що

$$K(t) > p_n(t, 0)$$

для всіх $t > a$ і

$$\lim_{t \to +\infty} (p_n(t, \alpha) - K(t))\,(Q_{n-1}(t))^2 = \alpha$$

(у цьому легко переконатися), то теорема 6 посилює не тільки теорему Кнезера, а й відповідні результати Хілле [3] і Хартмана [4].

Зауваження. Вище зазначалося, що функція $K(t)$ в певному сенсі є універсальною.

Згідно з дослідженнями Рея (див. [8], теорема 5) для диференціального рівняння (1), ненульові розв'язки якого не осцилюють, існує неперервна на $[1, +\infty)$ функція $\tilde{q}(t)$, для якої

$$q(t) < \tilde{q}(t), \quad t \geq 1,$$

і всі ненульові розв'язки диференціального рівняння

$$u'' + \tilde{q}(t)u = 0$$

також не осцилюють.

У випадку диференціального рівняння (10) існує неперервна на $[1, +\infty)$ функція $\tilde{K}(t)$, для якої також

$$K(t) < \tilde{K}(t), \quad t \geq 1,$$

і всі ненульові розв'язки диференціального рівняння

$$u'' + \tilde{K}(t)u = 0$$

не осцилюють (таких функцій є нескінченно багато). Однак знаходження таких функцій є складною задачею, оскільки потрібно використовувати розв'язок $Y = Y(t)$ рівняння (10), для якого невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{Y^2(s)}$$

є збіжним, функцію

$$\eta(t) = Y(t)\int_t^{+\infty} \frac{ds}{Y^2(s)},$$

які не є простими внаслідок громіздкості функції $K(t)$, та інші допоміжні функції і співвідношення.

На завершення зазначимо, що функції $\upsilon_n(t)$, $n \geq 0$, і $\prod_{n=0}^{+\infty} \upsilon_n(t)$ використовувалися автором також для дослідження збіжності числових рядів [14].

1. *Sturm C.* Sur les équation différentielles linéaires du second order // J. math. pures et appl. – 1836. – **1**, № 1. – P. 106 – 186.
2. *Kneser A.* Untersuchung über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgeleichunges // Math. Ann. – 1893. – **42**. – S. 409 – 435.
3. *Hille E.* Nonoscillation theorems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **64**. – P. 234 – 252.
4. *Hartman P.* On the linear logarithmicoexponential differential equations of the second order // Amer. J. Math. – 1948. – **70**. – P. 768 – 779.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 216 с.
7. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Замечание об асимптотическом поведении решений уравнения $u'' + a(t)u = 0$ // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 6. – С. 1115 – 1117.

8. *Wray S. D.* Integral comparison theorems in oscillation theory // J. London Math. Soc. – 1974. – **2**, № 8. – P. 595 – 606.
9. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйш. шк., 1974. – 768 с.
10. *Слюсарчук В. Е.* Усиление теоремы Кнезера о нулях решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 520 – 524.
11. *Слюсарчук В. Е.* Узагальнення теореми Кнезера про нулі розв'язків рівняння $y'' + p(t)y = 0$ // Там же. – 2007. – **59**, № 4. – С. 571 – 576.
12. *Евтухов В. М., Васильева Н. С.* Условия колеблемости и неколеблемости решений одного класса полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Там же. – С. 458 – 466.
13. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Рівнен. держ. техн. ун-т, 2001. – 240 с.

Одержано 21.07.09,
після доопрацювання — 10.08.10