УДК 517.956.4

В. А. Літовченко, О. В. Стрибко
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРИНЦИП ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

In the case where the initial data are generalized functions of the Gevrey-distribution type for which the classical notion of equality of two functions on a set is correct, we establish the principle of local strengthening of the convergence of solution of the Cauchy problem to its limiting value as $t \to +0$ for a class of degenerate parabolic equations of the Kolmogorov type with $\overrightarrow{2b}$-parabolic part such that coefficients of this part are continuous functions dependent only on t.

Установлен принцип локального усиления сходимости решения задачи Коши при $t \to +0$ к своему граничному значению для одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью, коэффициенты которой являются непрерывными зависящими только от t функциями, в случае, когда начальные данные являются обобщенными функциями типа распределений Жевре, для которых корректно классическое понятие равенства двух функций на множестве.

Вступ. Досліджуючи броунівський рух фізичної системи, А. М. Колмогоров прийшов до рівняння, яке у простішому випадку має вигляд [1]

$$\left(\partial_t - x_1\partial_{x_2} - a^2\partial_{x_1}^2\right) u\,(t;x) = 0, \quad x = (x_1;x_2)\,, \quad (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^2.$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням із частинними похідними з виродженою щодо змінної x_2 параболічною за Петровським частиною $\partial_t - a^2\partial_{x_1}^2$. Воно має важливе значення при дослідженні теплових та дифузійних процесів з інерцією в однорідних середовищах. Зазначене рівняння багаторазово узагальнювалось і відтак досліджувалось різними авторами (див. [2]). При цьому виродження може бути не лише за однією, але й за двома і більше змінними різного виміру (групами), а його параболічна частина може бути параболічною в тому чи іншому сенсі.

У праці [3] досліджується задача Коші для одного класу рівнянь типу Колмогорова з виродженою за двома групами змінних x_2 та x_3 $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною й неперервними коефіцієнтами, залежними лише від змінної t. У випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями з простору $\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$, встановлено коректну розв'язність відповідної задачі Коші в класі нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$. Тут $x := (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^n$, x_l — n_l-вимірна змінна, $n := n_1 + n_2 + n_3$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $\alpha_* = (\alpha_{1*};\alpha_{2*};\alpha_{3*}) \in \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{l*} := \left(1 - \dfrac{1}{2b_1};\ldots;1 - \dfrac{1}{2b_{n_l}}\right)$, $\overrightarrow{2b} := (2b_1;\ldots;2b_{n_1})$, $\mathbf{1} := (1;\ldots;1)$ — n-вимірний вектор, а $\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$ — топологічно спряжений простір з простором $S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}$ І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова [4].

Оскільки початкова функція f є узагальненою, то початкова умова в задачі Коші визначається як слабка збіжність розв'язку $u\,(t;\cdot)$ у просторі $\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$ при $t \to +0$ до f. Однак простір $\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$ є досить багатим на елементи, серед яких зустрічаються неперервні та різного ступеня гладкості функції, тому важливим є дослідження питання про можливість посилення збіжності розв'язку задачі Коші до свого граничного значення при $t \to +0$ виходячи із тих чи інших властивостей

f. Відповідь на це питання частково дається в [3]: якщо узагальнена функція $f \in \in \left(S^{\beta}_{\alpha_*}\right)'$, $\beta = (\beta_{11}, \ldots, \beta_{1n_1}; \beta_{21}, \ldots, \beta_{2n_2}; \beta_{31}, \ldots, \beta_{3n_3})$, де

$$\beta_{lj} > \frac{l-1}{q'-1} + \frac{q'}{2b_j\,(q'-1)}, \quad j \in \{1; \ldots; n_l\}, \quad l \in \{1; 2; 3\},$$

$$q' = \min_{j \in \{1;\ldots;n_1\}} \frac{2b_j}{2b_j - 1},$$

збігається в області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то для довільного компакта $\mathbb{K} \subset Q$ збіжність $u\,(t;x) \xrightarrow[t \to +0]{} g(x)$ є рівномірною щодо $x \in \mathbb{K}$.

У цій статті зазначене твердження поширено на всі ті простори $\left(S^{\beta}_{\alpha_*}\right)' \subset \subset \left(S^{\mathbf{1}-\alpha_*}_{\alpha_*}\right)'$ початкових даних, для яких серед елементів відповідних просторів $S^{\beta}_{\alpha_*}$ основних функцій є фінітні нескінченно диференційовні функції (тобто при $\beta_{lj} > 1$, $j \in \{1; \ldots; n_l\}$, $l \in \{1; 2; 3\}$); крім цього, тут з'ясовано питання збіжності не лише $u\,(t;\cdot)$ при $t \to +0$, але й $\partial_x^q u\,(t;\cdot)$ в залежності від ступеня локальної гладкості узагальненої початкової функції. Наведено приклад.

1. Допоміжні відомості. Крім уведених вище натуральних чисел n, n_1, n_2 і n_3, а також точок x, x_1, x_2 і x_3 та вектора $\mathbf{1}$ використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots; m\}$; $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{Z}^m_+$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}^1_+$; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}$, якщо $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$; запис $x\mho y$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат точок $\{x,y\} \subset \mathbb{C}^m$, при цьому якщо $z := (z_1; \ldots; z_m) \in \mathbb{C}^m$, $l := (l_1; \ldots; l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$, то $l^{zl} := l_1^{z_1 l_1} \ldots l_m^{z_m l_m}$, $z^l := := z_1^{l_1} \ldots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1} \ldots |z_m|^{l_m}$, $|z|^l_* := |z_1|^{l_1} + \ldots + |z_m|^{l_m}$, $|z|_* := |z|^{\mathbf{1}}_*$ — скалярні величини, а $|z| := (|z_1|; \ldots; |z_m|)$ — векторна величина. Мультиіндекс $k \in \in \mathbb{Z}^n_+$ будемо записувати також у вигляді $k := (k_1; k_2; k_3)$, де $k_j := (k_{j1}; \ldots; k_{jn_j}) \in \in \mathbb{Z}^{n_j}_+$, $j \in \mathbb{N}_3$. Крім цього, позначимо $\Pi^m_X := \{(t;\xi) |\ t \in X, \xi \in \mathbb{R}^m\}$; якщо $x := (x_1; x_2; x_3)$ і $x_j := (x_{j1}; \ldots; x_{jn_j})$ — точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то $x'_j := (x_{j1}; \ldots; x_{jn_3})$, $x''_j := (x_{j(n_3+1)}; \ldots; x_{jn_2})$, $x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}; \ldots; x_{1n_1})$, $\widehat{x}_1 := (x_{11}; \ldots; x_{1n_2})$, $\widetilde{x} := (x'''_1; x''_2; x_3)$; ці позначення будемо використовувати й для інших аналогічних точок та векторів.

Нехай $\overrightarrow{b}$ — фіксований вектор розмірності n_1 з натуральними координатами b_j, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, а $T \in (0; +\infty)$. Розглянемо рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right) u\,(t;x) =$$
$$= \sum_{r_{\overrightarrow{b}}(k_1) \leq 1} a_{k_1}(t) i^{|k_1|_*} \partial^{k_1}_{x_1} u\,(t;x), \quad (t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \tag{1}$$

де $r_{\overrightarrow{b}}(k_1) := \sum_{j=1}^{n_1} \dfrac{k_{1j}}{2b_j}$, $a_{k_1}(\cdot)$ — неперервні на відрізку $[0;T]$ комплекснозначні функції такі, що диференціальний вираз

$$\partial_t - \sum_{r_{\overrightarrow{b}}(k_1) \leq 1} a_{k_1}(t) i^{|k_1|_*} \partial^{k_1}_{x_1}$$

за змінними t і x_1 є $\overrightarrow{2b}$-параболічним на множині $\Pi^{n_1}_{(0;T]}$ [2].

З одержаних у [3] результатів випливає, що фундаментальним розв'язком задачі Коші для (1) є функція

$$G(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,\eta)} \mu_\tau^t(\eta;x)\, d\eta, \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x,y\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут

$$\mu_\tau^t(\eta;x) := e^{-i(x,\rho_0(t;s_{\tau,\eta};\tilde\eta))} \theta_\tau^t(s_{\tau,\eta};\tilde\eta),$$

$$\theta_\tau^t(s_{\tau,\eta};\tilde\eta) := \exp\left\{ \sum_{r_{\overrightarrow{b}}(k_1)\le 1} \int\limits_\tau^t a_{k_1}(\beta)\left(\rho(\beta;s_{\tau,\eta};\tilde\eta)\right)^{k_1} d\beta \right\},$$

$$\rho_0(t;s;\tilde\eta) := \left(s_2' + ts_3 + 2^{-1}t^2\eta_3,\ s_2'' + t\eta_2'',\ \eta_1''';\ s_3 + t\eta_3,\ \eta_2'';\ \eta_3\right) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\rho(t;s;\tilde\eta) := \left(s_2' + ts_3 + 2^{-1}t^2\eta_3,\ s_2'' + t\eta_2'',\ \eta_1'''\right) \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$s := (s_2', s_2''; s_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \quad s_{t,\eta} := \left(\eta_1' - t\eta_2' + 2^{-1}t^2\eta_3,\ \eta_1'' - t\eta_2'';\ \eta_2' - t\eta_3\right),$$

$$\tilde\eta := (\eta_1'''; \eta_2''; \eta_3).$$

Зазначимо, що

$$e^{-i(x,\rho_0(t;s_{\tau,\eta};\tilde\eta))} =$$

$$= \exp\left[-i\left\{\left(x_1', \eta_1' + (t-\tau)\eta_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\eta_3\right) + (x_1'', \eta_1'' + (t-\tau)\eta_2'') + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (x_1''', \eta_1''') + (x_2', \eta_2' + (t-\tau)\eta_3) + (x_2'', \eta_2'') + (x_3, \eta_3)\right\}\right].$$

Фактично з [3] одержуємо, що щодо просторової змінної функція θ_τ^t при кожних фіксованих t і τ, $0 \le \tau < t \le T$, допускає аналітичне продовження до цілої функції на $\mathbb{C}^n$, до того ж

$$\exists\, \{c,\delta\} \subset (0;+\infty) \quad \exists \overrightarrow{B} \in \mathbb{R}^n, \quad B_j > 0, \quad j \in \mathbb{N}_n, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall t \in (\tau;T] \quad \forall \tau \in [0;T)\colon \left|\partial_z^k \tilde\theta_\tau^t(z)\right| \le c\overrightarrow{B}^k k^{\alpha_* k} e^{-\delta|z|_*^{\mathbf{1}/(\mathbf{1}-\alpha_*)}}, \tag{3}$$

де

$$\tilde\theta_\tau^t(z) := \theta_\tau^t(s_{\tau,\eta};\tilde\eta)\Big|_{\eta=\left((t-\tau)^{-\frac{\mathbf{1}}{2b}} z_1;\ (t-\tau)^{-\left(\widehat{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{2b}}\right)} z_2;\ (t-\tau)^{-\left(\mathbf{2}+\frac{\mathbf{1}}{2b}\right)'} z_3\right)},$$

$$\mathbf{2} := (2;\ldots;2) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отже, функція $\tilde\theta_\tau^t$ щодо просторової змінної належить простору $S^{\overrightarrow{B},\alpha_*}_{\overrightarrow{A}_\delta,\mathbf{1}-\alpha_*} \subset S$, де $\overrightarrow{A}_\delta = \left(\overrightarrow{A}_{1\delta}; \overrightarrow{A}_{2\delta}; \overrightarrow{A}_{3\delta}\right)$, $\overrightarrow{A}_{l\delta} \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, а $\overrightarrow{A}_{1\delta} := \left(\left(2b_1e\delta\right)^{-\frac{1}{2b_1}}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \left(2b_{n_1}e\delta\right)^{-\frac{1}{2b_{n_1}}}\right)$, $\overrightarrow{A}_{2\delta} := \widehat{\overrightarrow{A}_{1\delta}}$, $\overrightarrow{A}_{3\delta} := \overrightarrow{A}'_{1\delta}$ (тобто відповідному простору типу S І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова [4]).

Нагадаємо, що $S^{\overrightarrow{B},\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{\alpha}}$ — зліченно-нормований простір, елементами якого є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}^n$ функції φ, які при довільних $\overrightarrow{\rho} > 0$ і $\overrightarrow{\mu} > 0$ задовольняють нерівності

$$\left|\partial_x^k \varphi(x)\right| \le c_{\overrightarrow{\rho}\,\overrightarrow{\mu}} \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\mu}\right)^k k^{\overrightarrow{\beta} k} e^{-\left|(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{\rho})x\right|_*^{\mathbf{1}/\overrightarrow{\alpha}}},$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{\alpha}}{e\overrightarrow{A}^{\mathbf{1}/\overrightarrow{\alpha}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Зазначимо також [4, с. 244], що оператор перетворення Фур'є F неперервно відображає кожен простір $S_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{B},\overrightarrow{\beta}}$ у відповідний $S_{\overrightarrow{B_1},\overrightarrow{\beta}}^{\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{\alpha}}$ при $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A} e^{\left(\overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B}\right)^{-1}}$ та $\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{B} e^{\left(\overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B}\right)^{-1}}$.

З огляду на цей факт безпосередньо з (3) одержуємо таке твердження.

Лема 1. *Для кожного $T > 0$ існують додатні сталі c, B і δ такі, що для всіх $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність*

$$\left|\partial_x^k F\left[\tilde{\theta}_\tau^t(z)\right](t, \tau; x)\right| \le c B^{|k|_*} k^{(\mathbf{1} - \alpha_*)k} e^{-\delta|x|_*^{\mathbf{1}/\alpha_*}}.$$

Правильним є наступне твердження.

Лема 2. *Існують додатні сталі c, A, B і δ такі, що для всіх $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ виконується оцінка*

$$\left|\partial_y^k \partial_x^l G(t, x; \tau, y)\right| \le c A^{|k|_*} B^{|l|_*} k^{(\mathbf{1} - \alpha_*)k} l^{(\mathbf{1} - \alpha_*)l} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left\{\sum\limits_{j=1}^{n_1} (k_{1j} + l_{1j} + 1)(2b_j)^{-1} + \sum\limits_{j=1}^{n_2} (k_{2j} + l_{2j} + 1)\left(1 + (2b_j)^{-1}\right) + \sum\limits_{j=1}^{n_3} (k_{3j} + l_{3j} + 1)\left(2 + (2b_j)^{-1}\right)\right\}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\delta\left(\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left|y_{1j} - x_{1j}\right|(t-\tau)^{-1/(2b_j)}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} + \right.\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2}\left(\left|y_{2j} - x_{2j} - (t-\tau)x_{1j}\right|(t-\tau)^{-(1 + 1/(2b_j))}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} +$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n_3}\left(\left|y_{3j} - x_{3j} - (t-\tau)x_{2j} - 2^{-1}(t-\tau)^2 x_{1j}\right|(t-\tau)^{-(2 + 1/(2b_j))}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}}\right)\right\}.$$

Доведення. В інтегралі

$$\partial_y^k \partial_x^l G(t, x; \tau, y) = \frac{(-1)^{|l|_*} i^{|k+l|_*}}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\eta}_1^{\widehat{k}_1} (\eta_1''')^{k_1''' + l_1'''} (\eta_2')^{k_2'} (\eta_2'')^{k_2'' + l_2''} \eta_3^{k_3 + l_3} \times$$

$$\times \left(\eta_1' + (t-\tau)\eta_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\eta_3\right)^{l_1'} \left(\eta_1'' + (t-\tau)\eta_2''\right)^{l_1''} \times$$

$$\times \left(\eta_2' + (t-\tau)\eta_3\right)^{l_2'} e^{i(y, \eta)} \mu_\tau^t(\eta; x) d\eta$$

виконаємо заміну змінних інтегрування за формулами

$$z_1 = \left((t-\tau)^{\frac{1}{2b_1}} \eta_{11}, \ldots, (t-\tau)^{\frac{1}{2b_{n_1}}} \eta_{1n_1}\right),$$

$$z_2 = \left((t-\tau)^{1 + \frac{1}{2b_1}} \eta_{21}, \ldots, (t-\tau)^{1 + \frac{1}{2b_{n_2}}} \eta_{2n_2}\right),$$

$$z_3 = \left((t-\tau)^{2 + \frac{1}{2b_1}} \eta_{31}, \ldots, (t-\tau)^{2 + \frac{1}{2b_{n_3}}} \eta_{3n_3}\right).$$

Відтак поклавши

$$\beta_* := -\sum_{j=1}^{n_1} (k_{1j} + l_{1j} + 1)\,(2b_j)^{-1} - \sum_{j=1}^{n_2} (k_{2j} + l_{2j} + 1)\left(1 + (2b_j)^{-1}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_3} (k_{3j} + l_{3j} + 1)\left(2 + (2b_j)^{-1}\right),$$

$$\begin{aligned} \xi_{1j} &= (t-\tau)^{-1/(2b_j)}\, x_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1}, \\ \xi_{2j} &= (t-\tau)^{-(1+1/(2b_j))}\, x_{2j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}, \\ \xi_{3j} &= (t-\tau)^{-(2+1/(2b_j))}\, x_{3j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}, \\ \zeta_{1j} &= (t-\tau)^{-1/(2b_j)}\, y_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1}, \\ \zeta_{2j} &= (t-\tau)^{-(1+1/(2b_j))}\, y_{2j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}, \\ \zeta_{3j} &= (t-\tau)^{-(2+1/(2b_j))}\, y_{3j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}, \end{aligned} \tag{4}$$

одержимо

$$\partial_y^k \partial_x^l G\,(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-n}\,(-1)^{|l|_*} i^{|k+l|_*} (t-\tau)^{\beta_*} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{z}_1^{\widehat{k}_1}\,(z_1''')^{k_1'''+l_1'''}\,(z_2')^{k_2'}\,(z_2'')^{k_2''+l_2''}\,z_3^{k_3+l_3} \times$$

$$\times \left(z_1' + z_2' + 2^{-1} z_3\right)^{l_1'} (z_1'' + z_2'')^{l_1''}\,(z_2' + z_3)^{l_2'}\, e^{i(\zeta,z)} e^{-i(\xi,\rho_0(1;s_{0,z};\tilde{z}))} \tilde{\theta}_\tau^t(z) dz \equiv$$

$$\equiv (2\pi)^{-n}\,(-1)^{|l|_*} i^{|k+l|_*}\,(t-\tau)^{\beta_*}\,\Psi_{t,\tau}\,(\zeta,\xi)\,. \tag{5}$$

Таким чином, оцінювання $\partial_y^k \partial_x^l G$ звелось до оцінювання інтеграла $\Psi_{t,\tau}$.

Оскільки

$$\widehat{z}_1^{\widehat{k}_1}\,(z_1''')^{k_1'''+l_1'''}(z_2')^{k_2'}\,(z_2'')^{k_2''+l_2''}\,z_3^{k_3+l_3}\left(z_1' + z_2' + 2^{-1} z_3\right)^{l_1'}(z_1'' + z_2'')^{l_1''}(z_2' + z_3)^{l_2'} =$$

$$= \sum_{q_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{q_2'} \sum_{q_1''=0}^{l_1''} C_{l_1''}^{q_1''} \sum_{q_1'=0}^{l_1'} C_{l_1'}^{q_1'} \sum_{p_1'=0}^{q_1'} C_{q_1'}^{p_1'}\, 2^{-\left|l_1'-q_1'\right|_*}\,(z_1')^{q_1'+k_1'-p_1'}\,(z_1'')^{q_1''+k_1''} \times$$

$$\times (z_1''')^{k_1'''+l_1'''}\,(z_2')^{q_2'+k_2'+p_2'}\,(z_2'')^{l_1''+l_2''+k_2''-q_1''}\,z_3^{k_3+l_3+l_1'+l_2'-q_1'-q_2'},$$

то, поклавши

$$\nu_1 = \zeta_1 - \xi_1, \quad \nu_2 = \zeta_2 - \widehat{\xi}_1 - \xi_2, \quad \nu_3 = \zeta_3 - 2^{-1}\xi_1' - \xi_2' - \xi_3,$$

згідно з рівністю

$$e^{i(\zeta,z)} e^{-i(\xi,\rho_0(1;s_{0,z};\tilde{z}))} = e^{i(z,\nu)}$$

та лемою 1 будемо мати

$$|\Psi_{t,\tau}\,(\zeta,\xi)| \le \sum_{q_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{q_2'} \sum_{q_1''=0}^{l_1''} C_{l_1''}^{q_1''} \sum_{q_1'=0}^{l_1'} C_{l_1'}^{q_1'} \sum_{p_1'=0}^{q_1'} C_{q_1'}^{p_1'} \times$$

$$\times \left|\partial_{\nu_1'}^{q_1'+k_1'-p_1'} \partial_{\nu_1''}^{q_1''+k_1''} \partial_{\nu_1'''}^{k_1'''+l_1'''} \partial_{\nu_2'}^{q_2'+k_2'+p_1'} \partial_{\nu_2''}^{l_1''+l_2''+k_2''-q_1''} \times\right.$$

$$\left.\times\ \partial_{\nu_3}^{k_3+l_3+l_2'+l_1'-q_1'-q_2'} F\left[\tilde{\theta}_\tau^t(z)\right](t,\tau;\nu)\right| \leq$$

$$\leq cB^{|k+l|_*}(k+l)^{(\mathbf{1}-\alpha_*)(k+l)} e^{-\delta|\nu|_*^{\mathbf{1}/\alpha_*}} \left(\sum_{q_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{q_2'} \sum_{q_1''=0}^{l_1''} C_{l_1''}^{q_1''} \sum_{q_1'=0}^{l_1'} C_{l_1'}^{q_1'} \sum_{p_1'=0}^{q_1'} C_{q_1'}^{p_1'}\right) =$$

$$= c3^{\left|l_1'\right|_*} 2^{\left|l_1''\right|_* + \left|l_2'\right|_*} B^{|k+l|_*}(k+l)^{(\mathbf{1}-\alpha_*)(k+l)} e^{-\delta|\nu|_*^{\mathbf{1}/\alpha_*}}.$$

Враховуючи тепер одержану оцінку інтеграла $\Psi_{t,\tau}$, а також підстановку (4) та нерівність

$$(k+l)^{(\mathbf{1}-\alpha_*)(k+l)} \leq 2^{|(\mathbf{1}-\alpha_*)(k+l)|_*} k^{(\mathbf{1}-\alpha_*)k} l^{(\mathbf{1}-\alpha_*)l},$$

безпосередньо з (5) одержуємо твердження леми 2.

Лему доведено.

У роботах [3, 5] також встановлено, що

$$G(t,x;\tau,\cdot) \xrightarrow[t\to\tau+0]{} \delta(\cdot - x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

у розумінні слабкої збіжності у просторі $\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$ (тут $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака).

Цей факт дозволяє для рівняння (1) розглядати задачу Коші з початковою умовою

$$u(t;\cdot)_{|t=0} = f, \quad f \in \left(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)', \tag{6}$$

при цьому розв'язком цієї задачі називається диференційовна за змінною t, нескінченно диференційовна за змінною x на множині $\Pi_{(0;T]}^n$ функція $u(t;x)$, яка задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (6) у сенсі збіжності у просторі $\left(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$.

У статті [3] (див. також [5]) одержано такий результат: нехай початкова функція f є елементом простору $(S_{\alpha_*}^{\overrightarrow{\alpha}})'$, $\overrightarrow{\alpha} \geq \mathbf{1} - \alpha_*$, тоді для задачі Коші (1), (6) існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який є диференційовним по t, нескінченно диференційовним по x і зображується формулою

$$u(t;x) = \langle f_\xi, G(t,x;0,\xi)\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n,$$

до того ж

$$\partial_x^k u(t;x) = \left\langle f_\xi, \partial_x^k G(t,x;0,\xi)\right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n$$

(тут виразом $\langle f_\xi, \cdot\rangle$ позначено дію щодо змінної ξ узагальненої функції f на основну).

2. Принцип локалізації. Передусім доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 3. *Існують додатні сталі c_0, A_0, B_0 і δ_0 такі, що для всіх $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_{lj} \neq \xi_{lj}$, $j \in \mathbb{N}_{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, і $t \in (0;1)$ виконується оцінка*

$$\left|\partial_x^q \partial_\xi^k G(t,x;0,\xi)\right| \leq c_0 t^n A_0^{|q|_*} B_0^{|k|_*} q^q k^k \left(\prod_{j=1}^{n_1} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(k,q)}{2b_j - 1}}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_2} |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(k,q)}{2b_j - 1}} \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_3} \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + 2^{-1} t^2 x_{1j} \right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(k,q)}{2b_j - 1}} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\delta_0 \left(\sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n_3} \left(\frac{\left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + 2^{-1} t^2 x_{1j} \right|}{t^{2+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} \right) \right\}$$

при $m(k,q) = (m_1(k,q), m_2(k,q), m_3(k,q)) \in \mathbb{Z}_+^n$ *такому, що*

$$m_1(k,q) = 2b_j + \left[\left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{1j} + q_{1j} + 1) \right], \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$m_2(k,q) = 1 + \left[\frac{2b_j - 1}{2b_j + 1} + \left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{2j} + q_{2j} + 1) \right], \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}, \qquad (7)$$

$$m_3(k,q) = 1 + \left[\frac{2b_j - 1}{4b_j + 1} + \left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{3j} + q_{3j} + 1) \right], \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}$$

(*тут* $[\cdot]$ — *ціла частина числа*).

Доведення. Оскільки

$$e^{-p} \le \frac{m!}{p^m}, \quad p > 0 \quad (\forall m \in \mathbb{Z}_+),$$

то

$$t^{-\frac{1}{2b_j}(k_{1j}+q_{1j}+1)} k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}} q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}} \exp \left\{ -\delta \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} \right\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\delta} \right)^{m_{1j}} t^{\frac{m_{1j}}{2b_j - 1} - \frac{k_{1j} + q_{1j} + 1}{2b_j}} k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}} q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}} m_{1j}! \, |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}}{2b_j - 1}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} \right\}, \quad m_{1j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$t^{-\left(1+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{2j}+q_{2j}+1)} k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}} q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}} \exp \left\{ -\delta \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} \right\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\delta} \right)^{m_{2j}} t^{\frac{2b_j+1}{2b_j-1} m_{2j} - \frac{2b_j+1}{2b_j}(k_{2j}+q_{2j}+1)} k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}} q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}} m_{2j}! \, |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}}{2b_j - 1}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}} \right\}, \quad m_{2j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$t^{-\left(2+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{3j}+q_{3j}+1)} k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}} q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\delta\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_{3j}} t^{\frac{4b_j+1}{2b_j-1}m_{3j}-\frac{4b_j+1}{2b_j}(k_{3j}+q_{3j}+1)} k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}} q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}} \times$$

$$\times m_{3j}! \left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|^{-\frac{2b_j m_{3j}}{2b_j-1}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\}, \quad m_{3j}\in\mathbb{Z}_+, \quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Розглянемо тепер нерівності

$$\begin{gathered}
\frac{m_{1j}}{2b_j+1}-\frac{k_{1j}+q_{1j}+1}{2b_j}\ge 1, \quad j\in\mathbb{N}_{n_1}, \\
\frac{2b_j+1}{2b_j-1}m_{2j}-\frac{2b_j+1}{2b_j}\left(k_{2j}+q_{2j}+1\right)\ge 1, \quad j\in\mathbb{N}_{n_2}, \\
\frac{4b_j+1}{2b_j-1}m_{3j}-\frac{4b_j+1}{2b_j}\left(k_{3j}+q_{3j}+1\right)\ge 1, \quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Очевидно, що компоненти вектора $m\,(k,q)$ із $\mathbb{Z}_+^n$, які визначаються рівностями (7), є натуральними розв'язками нерівностей (8).

Зазначимо далі, що для всіх $\{\alpha,a,b,c\}\subset(0;+\infty)$

$$([a+\alpha b+\alpha c]+1)!\le(([a]+4)+[\alpha b]+[\alpha c])!=\frac{(([a]+4)+[\alpha b]+[\alpha c])!}{([a]+4)!\,([\alpha b]+[\alpha c])!}\times$$

$$\times\frac{([\alpha b]+[\alpha c])!}{[\alpha b]!\,[\alpha c]!}\,([a]+4)!\,[\alpha b]!\,[\alpha c]!\le([a]+4)!2^{(a+4+2(\alpha b+\alpha c))}\,(\alpha b)^{\alpha b}\,(\alpha c)^{\alpha c}.$$

Враховуючи все це, безпосередньо з леми 2 при $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ і відповідному $m\in\mathbb{Z}_+^n$ із компонентами (7) одержуємо твердження леми 3.

Лему доведено.

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай узагальнена функція* $f\in\left(S_{\alpha_*}^{\beta_*}\right)'\subset\left(S_{\alpha_*}^{\mathbf{1}-\alpha_*}\right)'$ *при* $\beta_*>\mathbf{1}$ *на множині* $Q\subset\mathbb{R}^n$ *дорівнює нулеві, а* $u\,(t;x)=\langle f_\xi, G\,(t,x;0,\xi)\rangle$ — *відповідний розв'язок задачі Коші* (1), (6). *Тоді* $\partial_x^q u\,(t;x)$, $q\in\mathbb{Z}_+^n$, *збігається до нуля при* $t\to+0$ *рівномірно щодо змінної* x *на кожній компактній множині* $\mathbb{K}\subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}_1\subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ — деяка компактна множина з $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\forall x\in\mathbb{K}\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1\colon\ |x_{lj}-\xi_{lj}|\ge a_{lj}>0, \quad j\in\mathbb{N}_{n_l}, \quad l\in\mathbb{N}_3. \tag{9}$$

Побудуємо фінітну функцію $\eta_0\in S_{\alpha_*}^{\beta_*}$ з носієм в Q так, щоб $\eta_0=1$ на $\mathbb{K}_1$ (зазначимо, що у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ при $\overrightarrow{\beta}>\mathbf{1}$ існують фінітні функції [4]). Оскільки у просторах типу S визначено операції множення та звичайного зсуву аргумента, а

$$\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot) \in S_{\alpha_*}^{\beta_*}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0;T],$$

то

$$\Big\{\eta_0(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)\,;\,(1-\eta_0(\cdot))\,\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)\Big\} \subset S_{\alpha_*}^{\beta_*}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0;T].$$

Отже,

$$\partial_x^q u\,(t;x) = \langle f_\xi, \eta_0(\xi)\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\rangle + \langle f_\xi, \eta_1(\xi)\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\rangle\,, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n,$$

де $\eta_1(\cdot) := 1-\eta_0(\cdot)$. Враховуючи, що узагальнена функція f дорівнює нулю на Q, а $\operatorname{supp}\,(\eta_0(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)) \subset Q$, з попередньої рівності одержуємо

$$\partial_x^q u\,(t;x) = t^n \left\langle f_\xi, t^{-n}\eta_1(\xi)\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n.$$

Для доведення теореми досить встановити рівномірну обмеженість щодо змінних t, $0<t<1$, $x \in \mathbb{K}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ сукупності функцій $\omega_{t,x}(\xi) := t^{-n}\eta_1(\xi)\partial_x^q G\big(t,x;0,\xi\big)$ у просторі $S_{\alpha_*}^{\beta_*}$, тобто встановити оцінку

$$\left|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)\right| \le cA^{|k|_*}k^{\beta_* k}e^{-\delta|\xi|_*^{1/\alpha_*}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \tag{10}$$

(тут величини c, A і δ не залежать від t, x, ξ і k). Але, оскільки $\omega_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, оцінку (10) досить встановити лише для $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{K}_1$.

Згідно з формулою Лейбніца диференціювання добутку функцій маємо

$$\left|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)\right| \le t^{-n}\sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} C_k^l \left|\partial_\xi^l \eta_1(\xi)\right| \left|\partial_\xi^{k-l}\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right| =$$

$$= t^{-n}\left\{\left|\partial_\xi^k\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right| + \sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} C_k^l \left|\partial_\xi^{k-l}\eta_0(\xi)\right| \left|\partial_\xi^l\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right|\right\}.$$

З огляду на лему 3 та належність η_0 до $S_{\alpha_*}^{\beta_*}$ для $t \in (0;1)\,,\ \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{K}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{K}_1$ одержуємо

$$\left|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)\right| \le c_0 A_0^{|q|_*}q^q \left\{B_0^{|k|_*}k^k \left(\prod_{j=1}^{n_1}|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(k,q)}{2b_j-1}}\right) \times\right.$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_2}|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(k,q)}{2b_j-1}}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_3}\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(k,q)}{2b_j-1}}\right) +$$

$$+c_1\sum_{|l|_*=0}^{|k|_*} 2^{|k|_*}B_1^{|k-l|_*}\,(k-l)^{\beta_*(k-l)}\,e^{-\delta_1|\xi|_*^{1/\alpha_*}}\,B_0^{|l|_*}l^l \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_1}|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(l,q)}{2b_j-1}}\right)\left(\prod_{j=1}^{n_2}|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(l,q)}{2b_j-1}}\right) \times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_3}\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|^{-\frac{2b_jm_{3j}(l,q)}{2b_j-1}}\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta_0\left(\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{|x_{1j}-\xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+\sum_{j=1}^{n_3}\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right)\right\}. \tag{11}$$

Далі, оскільки $x\in\mathbb{K}$, то існує такий вектор $r=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^n$ з додатними компонентами, що для всіх $x\in\mathbb{K}$ виконуються нерівності

$$|x_{lj}|\le r_{lj},\quad j\in\mathbb{N}_{n_l},\quad l\in\mathbb{N}_3.$$

Тоді для $x\in\mathbb{K}$, $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1$ і $t\in(0;r_0)$, $r_0:=\min\left\{\min\limits_{j\in\mathbb{N}_{n_2}}\left\{\dfrac{a_{2j}}{2r_{2j}}\right\},\right.$ $\left.\min\limits_{j\in\mathbb{N}_{n_3}}\left\{\dfrac{a_{3j}}{2\left(r_{2j}+r_{3j}\right)}\right\},1\right\}$,

$$|x_{1j}-\xi_{1j}|\ge a_{1j}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|\ge|x_{2j}-\xi_{2j}|-t\,|x_{1j}|\ge|x_{2j}-\xi_{2j}|-tr_{2j}\ge\frac{a_{2j}}{2}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|\ge|x_{3j}-\xi_{3j}|-t\left(|x_{2j}|+2^{-1}t\,|x_{1j}|\right)\ge$$

$$\ge|x_{3j}-\xi_{3j}|-t\left(r_{2j}+r_{3j}\right)\ge\frac{a_{3j}}{2}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Крім цього, для зазначених x, ξ і t

$$|x_{1j}-\xi_{1j}|\ge|\xi_{1j}|-r_{1j},\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|\ge|\xi_{2j}|-\left(r_{1j}+r_{2j}\right),\quad j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|\ge|\xi_{3j}|-\left(r_{1j}+r_{2j}+r_{3j}\right),\quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Звідси та з нерівності (11), враховуючи структуру (7) компонент вектора $m(k,q)$, одержуємо оцінку (10).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція* $f\in\left(S_{\alpha_*}^{\beta_*}\right)'$, $\beta_*>\mathbf{1}$, *збігається на множині* $Q\subset\mathbb{R}^n$ *з неперервно диференційовною функцією* $g(\cdot)$ *до порядку* $q_0\in\mathbb{Z}_+^n$ *включно, то для всіх* $q\in\mathbb{Z}_+^n$, $q\le q_0$, *похідна* $\partial_x^q u\,(t;x)$ *відповідного розв'язку задачі Коші* (1), (6) *прямує до* $\partial_x^q g(x)$ *при* $t\to+0$ *рівномірно щодо змінної* x *на кожній компактній множині* $\mathbb{K}\subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K}$ і $\mathbb{K}_1$ — компактні множини такі, що $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}_1\subset Q$, для яких виконується умова (9), а η_0 і η_1 — побудовані при доведенні теореми 1 фінітні функції.

Оскільки

$$\partial_x^q u(t;x) = \langle \eta_0 (f-g), \partial_x^q G(t,x;0,\xi)\rangle +$$
$$+ \langle \eta_1 f, \partial_x^q G(t,x;0,\xi)\rangle + \langle \eta_0 g, \partial_x^q G(t,x;0,\xi)\rangle,$$

то, беручи до уваги теорему 1, а також те, що $f-g=0$ на Q і $\eta_1 f = 0$ на $\mathbb{K}_1$, та враховуючи при цьому регулярність функціонала $\eta_0 g$, приходимо до висновку, що доведення теореми зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\mathrm{I}_t(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,x;0,\xi)(\eta_0 g)(\xi)d\xi \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \partial_x^q(\eta_0 g)(x). \tag{12}$$

Використовуючи очевидну рівність

$$e^{i\{(\xi,\eta)-(x,\rho_0(t;s_{0,\eta};\tilde{\eta}))\}} = e^{-i\left\{(\eta_1,x_1-\xi_1)+(\eta_2,x_2-\xi_2+t\hat{x}_1)+\left(\eta_3,x_3-\xi_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\right)\right\}}, \tag{13}$$

із (2) одержуємо

$$G(t,x;0,\xi) = F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z), \tag{14}$$

де

$$z_1 := x_1 - \xi_1, \quad z_2 := x_2 - \xi_2 + t\widehat{x}_1,$$
$$z_3 := x_3 - \xi_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1', \quad z := (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\eta_0 g)(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)(\eta_0 g)(\xi)d\xi.$$

Виконуючи тепер в інтегралі з правої частини цієї рівності заміну змінної інтегрування за формулами (15) та враховуючи рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,x;0,\xi)(\eta_0 g)(\xi)d\xi = \partial_x^q \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\eta_0 g)(\xi)d\xi \right),$$

маємо

$$\mathrm{I}_t(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)\partial_x^q(\eta_0 g)\times$$
$$\times(x_1 - z_1;\, x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1;\, x_3 - z_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1')dz.$$

Із зображення (2) фундаментального розв'язку G та з властивості оборотності перетворення Фур'є на елементах просторів типу S випливає

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_{\eta\to\xi}[\mu_0^t(\eta;x)](t;x;\xi)d\xi =$$

$$= F^{-1}_{\xi\to 0}[F_{\eta\to\xi}[\mu_0^t(\eta;x)]](t;x;0) = \mu_0^t(0;x) = \exp\left\{ \int\limits_0^t a_0(\beta)d\beta \right\},$$

$$t\in(0;T], \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

З іншого боку, зважаючи на (14) та на підстановку (15), одержуємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G\,(t,x;0,\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)dz.$$

А відтак дістаємо

$$|\mathrm{I}_t(x)-\partial_x^q(\eta_0 g)(x)| = \Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)\Bigg(\partial_x^q(\eta_0 g)\Bigg(x_1-z_1;x_2-z_2+t\widehat{x}_1;$$

$$x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\Big)-\partial_x^q(\eta_0 g)(x)\Bigg)dz - O(t)\partial_x^q(\eta_0 g)(x)\Bigg| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)\right|\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1-z_1;x_2-z_2+t\hat{x}_1;\right.$$

$$\left.x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\right)-\partial_x^q(\eta_0 g)(x)\big|\,dz + |O(t)\partial_x^q(\eta_0 g)(x)| \equiv I_t^0(x)+$$

$$+|O(t)|\,|\partial_x^q(\eta_0 g)(x)| \le \mathrm{I}_t^0(x)+|O(t)|\sup_{x\in\mathbb{K}}|\partial_x^q(\eta_0 g)(x)|\,, \quad t\in(0;T], \quad x\in\mathbb{K},$$

де $O(t) := 1-\exp\left\{\int_0^t a_0(\beta)d\beta\right\} \xrightarrow[t\to+0]{} 0.$

Таким чином, доведення граничного співвідношення (12) звелось до встановлення рівності

$$\mathrm{I}_t^0(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z)\right|\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1-z_1;x_2-z_2+\right.$$

$$\left.+t\widehat{x}_1;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\right)-\partial_x^q(\eta_0 g)(x)\big|\,dz \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0. \qquad (16)$$

Оскільки

$$\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1-z_1;x_2-z_2+t\widehat{x}_1;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1')-\partial_x^q(\eta_0 g)(x)\right| \le$$

$$\le \Bigg\{\sum_{j=1}^{n_1}\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11},\ldots,x_{1(j-1)},x_{1j}-z_{1j},\ldots,x_{1n_1}-z_{1n_1};\,x_2-z_2+t\widehat{x}_1;\right.$$

$$x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1')-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11},\ldots,x_{1j},x_{1(j+1)}-z_{1(j+1)},\ldots$$

$$\left.\ldots,x_{1n_1}-z_{1n_1};\,x_2-z_2+t\widehat{x}_1;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1')\right|\Bigg\}+$$

$$+\Bigg\{\sum_{j=1}^{n_2}|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_{21},\ldots,x_{2(j-1)},x_{2j}-z_{2j}+tx_{1j},\ldots,x_{2n_2}-z_{2n_2}+tx_{1n_2};$$

$$x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1')-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_{21},\ldots,x_{2j},x_{2(j+1)}-z_{2(j+1)}+$$

$$+tx_{1(j+1)},\ldots,x_{2n_2}-z_{2n_2}+tx_{1n_2};x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1')|\Bigg\}+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{n_3}|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_2;x_{31},\ldots,x_{3(j-1)},x_{3j}-z_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j},\ldots,x_{3n_3}-\right.$$

$$-z_{3n_3}+tx_{2n_3}+2^{-1}t^2x_{1n_3})-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_2;x_{31},\ldots,x_{3j},x_{3(j+1)}-z_{3(j+1)}+$$

$$\left.+tx_{2(j+1)}+2^{-1}t^2x_{1(j+1)},\ldots,x_{3n_3}-z_{3n_3}+tx_{2n_3}+2^{-1}t^2x_{1n_3})|\right\},$$

то співвідношення (16) виконуватиметься, якщо

$$\mathrm{I}_{t,j}^{0,1}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde\eta)](t;z)\right|\,\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11},\ldots,x_{1(j-1)},x_{1j}-z_{1j},\ldots\right.$$

$$\ldots,x_{1n_1}-z_{1n_1};x_2-z_2+t\hat{x}_1;\;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\big)-$$

$$-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11},\ldots,x_{1j},x_{1(j+1)}-z_{1(j+1)},\ldots,x_{1n_1}-z_{1n_1};$$

$$x_2-z_2+t\hat{x}_1;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\big)\big|\,dz\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},\tag{17}$$

$$\mathrm{I}_{t,j}^{0,2}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde\eta)](t;z)\right|\,\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_{21},\ldots,x_{2(j-1)},\right.$$

$$x_{2j}-z_{2j}+tx_{1j},\ldots,x_{2n_2}-z_{2n_2}+tx_{1n_2};\;x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\big)-$$

$$-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_{21},\ldots,x_{2j},x_{2(j+1)}-z_{2(j+1)}+tx_{1(j+1)},\ldots,x_{2n_2}-z_{2n_2}+tx_{1n_2};$$

$$x_3-z_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'\big)\big|\,dz\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_2},\tag{18}$$

$$\mathrm{I}_{t,j}^{0,3}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde\eta)](t;z)\right|\,\left|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_2;x_{31},\ldots,x_{3(j-1)},\right.$$

$$x_{3j}-z_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j},\ldots,x_{3n_3}-z_{3n_3}+tx_{2n_3}+2^{-1}t^2x_{1n_3}\big)-$$

$$-\partial_x^q(\eta_0 g)(x_1;x_2;x_{31},\ldots,x_{3j},x_{3(j+1)}-z_{3(j+1)}+tx_{2(j+1)}+2^{-1}t^2x_{1(j+1)},\ldots$$

$$\ldots,x_{3n_3}-z_{3n_3}+tx_{2n_3}+2^{-1}t^2x_{1n_3}\big)\big|\,dz\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.\tag{19}$$

Переконаємось спочатку у виконанні співвідношень (17).

З (14) і (15) одержуємо

$$F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde\eta)](t;z)=G\,(t,\nu_{z,\xi};0,\xi)$$

при $\nu_{z,\xi}:=\big(z_1+\xi_1;z_2+\xi_2-t\big(\hat z_1+\widehat{\xi_1}\big);z_3+\xi_3-t\big(z_2'+\xi_2'\big)+2^{-1}t^2\big(z_1'+\xi_1'\big)\big)\in\mathbb{R}^n$. Врахувавши цю рівність, з огляду на лему 2 дістанемо таку оцінку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta};\tilde\eta)](t;z)\right|dz\le c\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta|\eta|_*^{1/\alpha_*}}d\eta\equiv c_0<+\infty,\quad t\in(0;T],\tag{20}$$

причому c_0 не залежить від t.

Оскільки фінітна функція η_0 є елементом простору $S_{\alpha_*}^{\beta_*}$, а g має неперервні частинні похідні до порядку $q_0\in\mathbb{Z}_+^n$ включно, то при $q\le q_0$ функція $\partial_x^q\,(\eta_0 g)$ є неперервною, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке, що $t_0 < \varepsilon$ і

$$|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11}, \ldots, x_{1(j-1)}, x_{1j} - z_{1j}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};\, x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 +$$
$$+ tx_2' + 2^{-1}t^2x_1') - \partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11}, \ldots, x_{1j}, x_{1(j+1)} - z_{1(j+1)}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};$$
$$x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1')| < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

якщо тільки

$$\big\|\big(x_{11}, \ldots, x_{1(j-1)}, x_{1j} - z_{1j}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};\, x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 + tx_2' +$$
$$+ 2^{-1}t^2x_1'\big) - \big(x_{11}, \ldots, x_{1j}, x_{1(j+1)} - z_{1(j+1)}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};$$
$$x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1'\big)\big\| =$$
$$= |z_{1j}| < t_0^{\gamma_{1j}}, \quad \gamma_{1j} := \frac{2b_j - 1}{4b_j m_{1j}(0;0)}.$$

Тоді, врахувавши, що

$$c_1 := \sup_{x \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{R}^n, t \in [0;T]} \big|\partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11}, \ldots, x_{1(j-1)}, x_{1j} - z_{1j}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};$$
$$x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1') - \partial_x^q(\eta_0 g)(x_{11}, \ldots, x_{1j}, x_{1(j+1)} -$$
$$- z_{1(j+1)}, \ldots, x_{1n_1} - z_{1n_1};\, x_2 - z_2 + t\widehat{x}_1; x_3 - z_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1')\big| < +\infty,$$

бо $\eta_0 g$ — фінітна функція, та взявши до уваги леми 2, 3, згідно з якими

$$\big|F^{-1}_{\eta \to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta}; \tilde{\eta})](t; z)\big| =$$
$$= |G\,(t, \nu_{z,\xi}; 0, \xi)| \le ct^{1 - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{2b_l} - \sum_{l=j+1}^{n_1} \frac{1}{2b_l} - \sum_{l=1}^{n_2} \left(1 + \frac{1}{2b_l}\right) - \sum_{l=1}^{n_3} \left(2 + \frac{1}{2b_l}\right)} \times$$
$$\times |z_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(0;0)}{2b_j - 1}}\, e^{-\delta |z_{1j}|^{\frac{2b_j}{2b_j - 1}}} \exp\left\{-\delta\left(\sum_{l=1}^{j-1}\left(\frac{|z_{1l}|}{t^{1/(2b_l)}}\right)^{\frac{2b_l}{2b_l - 1}} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{l=j+1}^{n_1}\left(\frac{|z_{1l}|}{t^{1/(2b_l)}}\right)^{\frac{2b_l}{2b_l - 1}} + \sum_{l=1}^{n_2}\left(\frac{|z_{2l}|}{t^{1+1/(2b_l)}}\right)^{\frac{2b_l}{2b_l - 1}} + \sum_{l=1}^{n_3}\left(\frac{|z_{3l}|}{t^{2+1/(2b_l)}}\right)^{\frac{2b_l}{2b_l - 1}}\right)\right\},$$
$$0 < t < 1, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

й оцінку (20), одержимо

$$\mathrm{I}_{t,j}^{0,1}(x) < \varepsilon \int\limits_{|z_{1j}| < t_0^{\gamma_{1j}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|F^{-1}_{\eta \to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta}; \tilde{\eta})](t; z)\big|\, dz +$$
$$+ c_1 \int\limits_{|z_{1j}| \ge t_0^{\gamma_{1j}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|F^{-1}_{\eta \to z}[\theta_0^t\,(s_{0,\eta}; \tilde{\eta})](t; z)\big|\, dz \le c_0\varepsilon + c_1 ctt_0^{-\gamma_{1j}\frac{2b_j m_{1j}(0;0)}{2b_j - 1}} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta |\eta|_*^{1/\alpha_*}}\, d\eta \le c_0\varepsilon + c_2 t_0^{\frac{1}{2}} \le c_0\varepsilon + c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t \le t_0 < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{K},$$

де константи c_0 і c_2 не залежать від t, x, t_0 і ε.

Отже,

$$\exists\{c_0, c_2\} \subset (0; +\infty) \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists t_0 \in (0; \varepsilon) \quad \forall t \in (0; t_0]$$
$$\forall x \in \mathbb{K}\colon I^{0,1}_{t,j}(x) \leq c_0\varepsilon + c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

Це й означає виконання співвідношень (17).

Перейдемо тепер до встановлення співвідношень (18). Виходячи безпосередньо із формули диференціювання складеної функції кількох незалежних змінних, одержуємо

$$\partial^k_x(\eta_0 g)(x_1; x_{21}, \ldots, x_{2(j-1)}, x_{2j} - z_{2j} + tx_{1j}, \ldots, x_{2n_2} - z_{2n_2} + tx_{1n_2};$$
$$x_3 - z_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1\big) = \partial^k_x(\eta_0 g)(x_1; x_{21}, \ldots, x^0_{2j}, x_{2(j+1)} - z_{2(j+1)} +$$
$$+ tx_{1(j+1)}, \ldots, x_{2n_2} - z_{2n_2} + tx_{1n_2}; x_3 - z_3 + tx'_2 +$$
$$+ 2^{-1}t^2x'_1\big)\Big|_{x^0_{2j} = x_{2j} - z_{2j} + tx_{1j}} + tg^{t,z}_{j,q}(x) \tag{21}$$

(тут верхнім індексом 0 позначено ту компоненту x_{2j}, замість якої здійснюється підстановка $x_{2j} - z_{2j} + tx_{1j}$ після дії операції диференціювання ∂^k_x на $\eta_0 g$), де $g^{t,z}_{j,q}(\cdot)$ — неперервна фінітна функція така, що

$$\sup_{x \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{R}^n, t \in [0;T]} \left|g^{t,z}_{j,q}(x)\right| < +\infty.$$

З урахуванням рівності (21) і оцінки (20) співвідношення (18) виконуватимуться, якщо

$$\Upsilon^{0,2}_{t,j}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|F^{-1}_{\eta\to z}[\theta^t_0\,(s_{0,\eta}; \tilde{\eta})](t; z)\right| \eta^{t,z}_{j,q}(x)dz \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}, \tag{22}$$

де

$$\eta^{t,z}_{j,q}(x) := \big|\partial^k_x(\eta_0 g)(x_1; x_{21}, \ldots, x^0_{2j}, x_{2(j+1)} - z_{2(j+1)} + tx_{1(j+1)}, \ldots, x_{2n_2} - z_{2n_2} +$$
$$+ tx_{1n_2}; x_3 - z_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1\big)\big|_{x^0_{2j} = x_{2j} - z_{2j} + tx_{1j}} - \partial^k_x(\eta_0 g)(x_1; x_{21}, \ldots, x_{2j},$$
$$x_{2(j+1)} - z_{2(j+1)} + tx_{1(j+1)}, \ldots, x_{2n_2} - z_{2n_2} + tx_{1n_2};\ x_3 - z_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1\big)\big|.$$

При доведенні співвідношення (22) міркуватимемо так, як і у випадку встановлення (17). Згідно з неперервністю функції $\partial^q_x\,(\eta_0 g)$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $t_0 \in (0; \varepsilon)$, що для всіх $x \in \mathbb{K}$, $z \in \mathbb{R}^n$ і $t \in (0; T]$ таких, що

$$\big\|\big(x_1; x_{21}, \ldots, x_{2(j-1)}, x_{2j} - z_{2j} + tx_{1j}, \ldots, x_{2n_2} - z_{2n_2} + tx_{1n_2};\ x_3 -$$
$$- z_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1\big) - \big(x_1; x_{21}, \ldots, x_{2j}, x_{2(j+1)} - z_{2(j+1)} + tx_{1(j+1)}, \ldots, x_{2n_2} -$$
$$- z_{2n_2} + tx_{1n_2};\ x_3 - z_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1\big)\big\| = |z_{2j} - tx_{1j}| < t_0^{\gamma_{2j}},$$
$$\gamma_{2j} := \frac{2b_j - 1}{4b_j m_{2j}(0; 0)},$$

виконується нерівність

$$\eta_{j,q}^{t,z}(x) < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}.$$

З огляду на це, леми 2, 3 та оцінку (20) одержимо

$$\Upsilon_{t,j}^{0,2}(x) < c_0\varepsilon + \left(\sup_{x\in\mathbb{K}, z\in\mathbb{R}^n, t\in[0;T]} \eta_{j,q}^{t,z}(x) \right) \times$$

$$\times \int\limits_{|z_{2j}-tx_{1j}|\geq t_0^{\gamma_{2j}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| F_{\eta\to z}^{-1}[\theta_0^t(s_{0,\eta};\tilde{\eta})](t;z) \right| dz \leq c_0\varepsilon +$$

$$+ct \int\limits_{|z_{2j}-tx_{1j}|\geq t_0^{\gamma_{2j}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |z_{2j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(0;0)}{2b_j-1}} e^{-\delta|z|_*^{\mathbf{1}/\alpha_*}} dz, \quad t\in(0;T], \quad x\in\mathbb{K}, \quad j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

де $c_0 > 0$, $c > 0$ і $\delta > 0$ — константи, не залежні від t, x і z.

Враховуючи тепер існування вектора $r_0 \in \mathbb{R}^n$ із додатними компонентами такого, що для всіх $x \in \mathbb{K}$ виконуються нерівності

$$|x_{lj}| \leq r_{lj}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_l}, \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

для всіх $t \in \left(0; \dfrac{t_0^{\gamma_{2j}}}{2r_{1j}}\right]$ і $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ таких, що $|z_{2j} - tx_{1j}| \geq t_0^{\gamma_{2j}}$, маємо

$$|z_{2j}| = |(z_{2j} - tx_{1j}) + tx_{1j}| \geq |z_{2j} - tx_{1j}| - t\,|x_{1j}| \geq$$

$$\geq t_0^{\gamma_{2j}} - \frac{t_0^{\gamma_{2j}}}{2r_{1j}} r_{1j} = \frac{t_0^{\gamma_{2j}}}{2}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}.$$

Тоді

$$\Upsilon_{t,j}^{0,2}(x) < c_0\varepsilon + ct\Big(\frac{2}{t_0^{\gamma_{2j}}}\Big)^{\frac{2b_j m_{2j}(0;0)}{2b_j-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta|z|_*^{\mathbf{1}/\alpha_*}} dz \leq c_0\varepsilon + c_1 t t_0^{-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq c_0\varepsilon + c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t \leq \min\left\{ t_0; \frac{t_0^{\gamma_{2j}}}{2r_{1j}} \right\}, \quad t_0 < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{K}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}$$

(тут додатні сталі c_0 і c_1 не залежать від t, x, t_0 і ε). Звідси, зважаючи на довільність вибору $\varepsilon > 0$, приходимо до співвідношення (22).

Отже, доведено виконання і граничних співвідношень (18).

На завершення зазначимо, що оскільки інтеграл $I_{t,j}^{0,3}(\cdot)$ є інтегралом типу $I_{t,j}^{0,2}(\cdot)$, то встановлення співвідношень (19) аналогічне випадку (18).

Теорему доведено.

Як приклад, розглянемо із простору $\left(S_{\alpha_*}^{\beta_*}\right)'$, $\beta_* > \mathbf{1}$, узагальнену функцію

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{d}{dx_{11}} \left(\dfrac{1}{2} \left(\operatorname{sign}(2x_{11}-1)\right)(2x_{11}-1)^2 + 2\,|x_{11}|^{-\frac{1}{2}} \right), & |x_{11}| < 1, \\ e^{|\mathbf{1}+x\cdot x|_*^{\overrightarrow{\gamma}/\mathbf{2}}}, & |x_{11}| \geq 1, \end{cases}$$

дія якої на основну функцію φ із $S_{\alpha_*}^{\beta_*}$ відбувається за таким правилом:

$$\langle f_x, \varphi(x)\rangle = \frac{5}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\varphi(x)\big|_{x_{11}=1} + \varphi(x)\big|_{x_{11}=-1}\right)\frac{dx}{dx_{11}} -$$

$$-\int\limits_{|x_{11}|<1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{sign}(2x_{11}-1)\right)(2x_{11}-1)^2 + 2\,|x_{11}|^{-\frac{1}{2}}\right)\partial_{x_{11}}\varphi(x)dx+$$

$$+\int\limits_{|x_{11}|\geq 1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{|\mathbf{1}+x\cdot x|_*^{\vec{\gamma}/\mathbf{2}}}\varphi(x)dx$$

(тут вектор $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ такий, що $\vec{\gamma}\alpha_* < \mathbf{1}$).

Очевидно, що зазначена функція f_x на множині $Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x_{11}| \geq 1\}$ збігається із нескінченно диференційовною на цій множині функцією $e^{|\mathbf{1}+x\cdot x|_*^{\vec{\gamma}/\mathbf{2}}}$, а на множині $Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_{11}| < 1\}$ — із неперервною на Q_2 функцією $g(x) = 2\,|2x_{11}-1| - |x_{11}|^{-\frac{3}{2}}$. Тоді згідно з теоремою 2 розв'язок $u\,(t;x)$, $(t;x) \in \in \Pi^n_{(0;T]}$, задачі Коші (1), (6), побудований за початковою узагальненою функцією f_x, разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку щодо змінної x збігається при $t \to +0$ до функції $e^{|\mathbf{1}+x\cdot x|_*^{\vec{\gamma}/\mathbf{2}}}$ та її похідних відповідних порядків рівномірно щодо x на кожній компактній множині $\mathbb{K} \subset Q_1$, крім цього

$$u\,(t;x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} g(x) \quad (\forall\mathbb{K} \subset Q_2).$$

1. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – S. 116 – 117.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
3. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 27 – 39.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
5. *Івасишен С. Д., Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 8. – С. 1066 –1087.

Одержано 13.04.10