УДК 517.5

В. П. Моторный, А. Н. Пасько (Днепропетр. нац. ун-т)

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Asymptotically sharp estimates are obtained for the best (α, β) -approximations of the classes $W^r_{1;\gamma,\delta}$ with natural r by algebraic polynomials in the mean.

Отримано асимптотично точні оцінки найкращих (α, β) -наближень класів $W^r_{1;\gamma,\delta}$ для натуральних r алгебраїчними поліномами в середньому.

Введение. Рассмотрим пространство $L_p[-1,1]$, $1 \le p < \infty$, измеримых на $[-1,1]$ функций f, для которых $\int_{-1}^1 |f(x)|^p\,dx < \infty$, снабженное нормой

$$\|f\|_{p;[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

Под $L_\infty[-1,1]$ понимается пространство всех существенно ограниченных на $[-1,1]$ функций f, снабженное нормой $\|f\|_{\infty;[-1,1]} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Пусть $f \in L_1[-1,1]$, π_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Величины $E_n(f)_1 = \inf_{p\in\pi_n} \|f - p\|_{1;[-1,1]}$ называются наилучшими приближениями функции f алгебраическими многочленами в среднем. Наилучшие приближения в среднем алгебраическими полиномами класса функций $W \subset L_1[-1,1]$ определяются равенством $E_n(W)_1 = \sup_{f\in W} E_n(f)_1$.

Пусть W_1^r — класс заданных на отрезке $[-1,1]$ функций f таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на этом отрезке, а $\left\| f^{(r)} \right\|_{1;[-1,1]} \le 1$. С. М. Никольский [1] установил асимптотически точную оценку наилучших приближений класса W_1^r алгебраическими многочленами в среднем

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{1}$$

где $K_r = \dfrac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ — постоянная Фавара.

В. А. Кофанов [2] нашел точные значения наилучших приближений в среднем класса W_1^r

$$E_n(W_1^r)_1 = \|S_{n,r}\|_{\infty;[-1,1]}$$

для $n \geq r-1$, где $S_{n,r}$ — идеальный сплайн, определенный равенством

$$S_{n,r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{1}(x-u)_+^{r-1}\operatorname{sign}\sin(n+2)\arccos u\,du,$$

а усеченная степенная функция $(x-u)_+^{r-1}$ определяется так:

$$(x-u)_+^{r-1} := \begin{cases}(x-u)^{r-1}, & x>u,\\ 0, & x\leq u.\end{cases}$$

Однако точные значения норм сплайнов $S_{n,r}$ неизвестны, поэтому асимптотически точная оценка (1) не теряет актуальности.

Пусть f — суммируемая на $[-1,1]$ функция. Рассмотрим величины

$$E_n^+(f)_1 = \inf\left\{\|f-p\|_{1;[-1,1]} : p\in\pi_n,\ \ p(x)\geq f(x)\quad \forall x\in[-1,1]\right\},$$

$$E_n^-(f)_1 = \inf\left\{\|f-p\|_{1;[-1,1]} : p\in\pi_n,\ \ p(x)\leq f(x)\quad \forall x\in[-1,1]\right\}.$$

Величина $E_n^+(f)_1$ (соответственно $E_n^-(f)_1$) называется наилучшим односторонним приближением сверху (соответственно снизу) функции f алгебраическими многочленами в среднем. В случае, если f не ограничена сверху, считаем, что $E_n^+(f)_1 = \infty$, если же f не ограничена снизу, то полагаем, что $E_n^-(f)_1 = \infty$. Наилучшие односторонние приближения класса W определяются стандартным образом:

$$E_n^{\pm}(W)_1 = \sup_{f\in W} E_n^{\pm}(f)_1.$$

Точные значения наилучших односторонних приближений классов W_1^r при целых $r\geq 2$ найдены В. Ф. Бабенко и В. А. Кофановым [3]:

$$E_n^{\pm}(W_1^r)_1 = \max\left\{\left\|S_{n,r}^+\right\|_{\infty;[-1,1]}, \left\|S_{n,r}^-\right\|_{\infty;[-1,1]}\right\},$$

где $S_{n,r}^+(x)$, $S_{n,r}^-(x)$, $n\geq r-1$, — некоторые сплайны. Однако точные значения норм этих сплайнов неизвестны, поэтому в работе В. П. Моторного и А. Н. Пасько [4] была получена асимптотически точная оценка величин $E_n^{\pm}(W_1^r)_1$: при всех целых $r\geq 1$

$$E_n^{\pm}(W_1^r)_1 = \frac{2}{n^r}\sup_x|B_r(x)| + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \tag{2}$$

где $B_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{\pi r}{2}\right)}{k^r}$ — ядро Бернулли, а константа, определяющая остаточный член, зависит только от r.

Пусть ρ — весовая функция, т. е. функция, неотрицательная и суммируемая на отрезке $[-1,1]$. Определим наилучшие односторонние приближения с весом ρ следующим образом:

$$E_n^{+}(f)_{1,\rho} = \inf\left\{ \int_{-1}^{1} \left(p(x) - f(x) \right) \rho(x) dx : p \in \pi_n, \quad p(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [-1,1] \right\},$$

$$E_n^{-}(f)_{1,\rho} = \inf\left\{ \int_{-1}^{1} \left(f(x) - p(x) \right) \rho(x) dx : p \in \pi_n, \quad p(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [-1,1] \right\},$$

$$E_n^{\pm}(W)_{1,\rho} = \sup_{f \in W} E_n^{\pm}(f)_{1,\rho}.$$

В работе В. П. Моторного и А. Н. Пасько [5] оценка (2) была обобщена на случай наилучших односторонних приближений с весом: для любой весовой функции ρ, удовлетворяющей неравенствам

$$\sqrt{1-x^2} \leq \rho(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1],$$

и любого целого $r \geq 1$ имеет место равенство

$$E_n^{\pm}(W_1^r)_{1,\rho} = \frac{2}{n^r} \sup_x |B_r(x)| + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

где константа, определяющая остаточный член, зависит только от r.

Пусть заданы положительные числа α, β. Рассмотрим определенный на пространстве $L_p[-1,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, функционал

$$\| f \|_{p;[-1,1];(\alpha,\beta)} = \| \alpha f_+ + \beta f_- \|_{p;[-1,1]}, \quad \text{где} \quad f_{\pm}(x) = \max\left\{ \pm f(x), 0 \right\},$$

называемый (α,β)-нормой. Этот функционал является несимметричной нормой в том смысле, что для него выполняются все аксиомы нормы, за исключением равенства $\| \lambda f \| = |\lambda| \| f \|$, которое выполняется лишь для положительных λ.

Символом L_p, $1 \leq p < \infty$, обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций f, для которых $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty$, снабженное нормой

$$\| f \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Под L_∞ будем понимать пространство всех существенно ограниченных 2π-периодических функций f, снабженное нормой $\| f \|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_t |f(t)|$.

Для положительных чисел α, β на пространстве L_p, $1 \le p \le \infty$, также вводится называемый (α,β)-нормой функционал $\| f \|_{p;(\alpha,\beta)} = \| \alpha f_+ + \beta f_- \|_p$.

Для любой суммируемой на отрезке $[-1,1]$ функции f определим наилучшее (α,β)-приближение в среднем алгебраическими полиномами как

$$E_n^{\alpha,\beta}(f)_1 = \inf_{p\in\pi_n} \| f - p \|_{1;[-1,1];(\alpha,\beta)} .$$

Наилучшее (α,β)-приближение в среднем класса W определяется равенством

$$E_n^{\alpha,\beta}(W)_1 = \sup_{f\in W} E_n^{\alpha,\beta}(f)_1 .$$

Для любых $\gamma > 0$, $\delta > 0$ рассмотрим класс $W^r_{1;\gamma,\delta}$ заданных на отрезке $[-1,1]$ функций f таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на этом отрезке, а r-я производная удовлетворяет условию $\left\| f^{(r)} \right\|_{1;[-1,1];(\gamma,\delta)} \le 1$.

В. Ф. Бабенко и В. А. Кофанов [3] доказали, что при всех целых $r \ge 2$ и $n \ge r-1$ имеет место равенство

$$E_n^{\alpha,\beta}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_1 = \max\left\{ \frac{1}{\gamma} \max\left\{ \left\| \left(S_{n,r}^{(\alpha,\beta)}\right)_+ \right\|_{\infty;[-1,1]}, \left\| \left(S_{n,r}^{(\beta,\alpha)}\right)_- \right\|_{\infty;[-1,1]} \right\}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\delta} \max\left\{ \left\| \left(S_{n,r}^{(\beta,\alpha)}\right)_+ \right\|_{\infty;[-1,1]}, \left\| \left(S_{n,r}^{(\alpha,\beta)}\right)_- \right\|_{\infty;[-1,1]} \right\} \right\}. \tag{3}$$

Сплайны $S_{n,r}^{(\alpha,\beta)}$ в равенстве (3) определяются соотношением

$$S_{n,r}^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{(x-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} s_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt ,$$

где

$$s_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha\left(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right)_+ - \beta\left(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right)_- ,$$

а $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^{n+1}x^{n+1} - p(x)$, где $p(x)$ — полином из π_n-наилучшего (α,β)-приближения функции $(-1)^{n+1}x^{n+1}$. Однако и в этом случае аналитические выражения для норм сплайнов $S_{n,r}^{(\alpha,\beta)}$ неизвестны, что приводит к необходимости получения асимптотически точной оценки величин $E_n^{\alpha,\beta}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_1$.

Рассмотрим весовую функцию ρ и определим наилучшие (α,β)-приближения в среднем с весом функции f и класса W как

$$E_n^{\alpha,\beta}(f)_{1,\rho} = \inf_{p\in\pi_n} \int_{-1}^{1} \Big(\alpha\big(f(x)-p(x)\big)_+ + \beta\big(f(x)-p(x)\big)_- \Big)\rho(x)dx ,$$

$$E_n^{\alpha,\beta}(W)_{1,\rho} = \sup_{f\in W} E_n^{\alpha,\beta}(f)_{1,\rho}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* α, β, γ, δ *— положительные числа,* $\sigma \geq 1$. *Тогда для любой весовой функции* ρ, *удовлетворяющей неравенствам*

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\sigma} \leq \rho(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x\in[-1,1], \tag{4}$$

и любого целого $r \geq 1$ *имеет место оценка*

$$E_n^{\alpha,\beta}\left(W_{1;\gamma,\delta}^r\right)_{1,\rho} = \left\|\varphi_{n,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;\left(\gamma^{-1},\delta^{-1}\right)} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \tag{5}$$

где сплайн $\varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}$ *определяется как* r*-й периодический интеграл, равный в среднем нулю на периоде, от* $\dfrac{2\pi}{n}$*-периодической четной функции* $\varphi_{n,0;(\alpha,\beta)}$, *заданной на отрезке* $\left[0;\dfrac{\pi}{n}\right]$ *равенством*

$$\varphi_{n,0;(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases} \alpha, & 0\leq t\leq \dfrac{\beta\pi}{(\alpha+\beta)n}, \\ -\beta, & \dfrac{\beta\pi}{(\alpha+\beta)n} < t \leq \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Константа, определяющая остаточный член в (5), *зависит только от* r, α, β, γ, δ *и* σ.

Отметим, что в случае постоянной весовой функции $\rho(x)\equiv 1$ оценка (5) представляет собой оценку наилучших (α,β)-приближений в среднем класса $W_{1;\gamma,\delta}^r$:

$$E_n^{\alpha,\beta}\left(W_{1;\gamma,\delta}^r\right)_{1} = \left\|\varphi_{n,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;\left(\gamma^{-1},\delta^{-1}\right)} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Сведение доказательства теоремы к оценке наилучших несимметричных приближений некоторых периодических функций. Обозначим через F_{2n+1} пространство всех тригонометрических многочленов порядка не выше n. Для суммируемой на периоде 2π-периодической функции g обозначим через $\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(g)_1$ ее наилучшее (α,β)-приближение в среднем тригонометрическими многочленами порядка не выше n, т. е.

$$\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(g)_1 = \inf_{T\in F_{2n+1}} \int_0^{2\pi} \Big(\alpha\big(g(t)-T(t)\big)_+ + \beta\big(g(t)-T(t)\big)_-\Big)\,dt.$$

При $\alpha=\beta=1$ получаем обычное наилучшее приближение $\tilde{E}_n(g_1)$ функции g тригонометрическими полиномами в среднем.

Пусть $\tilde{W}^r KV$ — класс 2π-периодических функций f, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $V_{-\pi}^{\pi}\left(f^{(r)}\right) \le K$, K – постоянная. Тогда из неравенства

$$\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(f)_1 \;\le\; \max\left\{\alpha, \beta\right\} \tilde{E}_n(f)_1$$

следует, что для любой $f \in \tilde{W}^r KV$

$$\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(f)_1 \le \frac{CK}{n^{r+1}} . \tag{6}$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать постоянную, значение которой может зависеть только от α, β, γ, δ и σ, указанных в теореме. Константу, которая, кроме вышеперечисленных параметров, зависит и от r, будем обозначать через C_r. Конкретные же значения этих констант в разных местах могут быть различными.

Рассмотрим равенство

$$E_n^{\alpha,\beta}\left(W_{1;\gamma,\delta}^r\right)_{1,\rho} \;=\; \max\left\{\frac{1}{\gamma}\max_{-1\le a\le 1} E_n^{\alpha,\beta}\left(\frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_{1,\rho},\right.$$

$$\left.\frac{1}{\delta}\max_{-1\le a\le 1} E_n^{\beta,\alpha}\left(\frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_{1,\rho}\right\}. \tag{7}$$

В случае постоянного веса $\rho(x) \equiv 1$ равенство (7) доказано в [3], в общем случае его доказательство проводится аналогично. Будем изучать наилучшие несимметричные приближения усеченных степенных функций $g_{r,a}(x) = \dfrac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}$. По определению

$$E_n^{\alpha,\beta}\left(g_{r,a}\right)_{1,\rho} \;=\; \inf_{p\in\pi_n}\int_{-1}^{1}\Big(\alpha\left(g_{r,a}(x) - p(x)\right)_+ + \beta\left(g_{r,a}(x) - p(x)\right)_-\Big)\rho(x)dx .$$

Выполним в последнем интеграле замену $x = \cos t$:

$$E_n^{\alpha,\beta}(g_{r,a})_{1,\rho} \;=\; \inf_{p\in\pi_n}\int_{0}^{\pi}\Big(\alpha\left(g_{r,a}(\cos t) - p(\cos t)\right)_+ +$$

$$+\;\beta\left(g_{r,a}(\cos t) - p(\cos t)\right)_-\Big)\rho(\cos t)\sin t\, dt \;=$$

$$=\;\frac{1}{2}\inf_{p\in\pi_n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\alpha\left(g_{r,a}(\cos t) - p(\cos t)\right)_+ \;+$$

$$+\;\beta\left(g_{r,a}(\cos t) - p(\cos t)\right)_-\Big)\rho(\cos t)\left|\sin t\right| dt . \tag{8}$$

Подберем целое j, удовлетворяющее неравенству $2j-1 \geq \sigma$. Тогда из (4) будет следовать неравенство $\sin^{2j} t \leq \rho(\cos t)|\sin t| \leq 1$, и из (8) получим

$$\frac{1}{2}\tilde{E}_{n+2j}^{\alpha,\beta}\left(g_{r,a}(\cos t)\sin^{2j} t\right)_1 \leq E_n^{\alpha,\beta}(g_{r,a})_{1,\rho} \leq \frac{1}{2}\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}\left(g_{r,a}(\cos t)\right)_1 . \qquad (9)$$

Известно [6], что функция $g_{r,a}(\cos t)$ при $r \geq 2$ может быть представлена в виде

$$g_{r,a}(\cos t) = f_{r,0}(t) + f_{r,1}(t),$$

где $f_{r,1}(t)$ имеет абсолютно непрерывную на $[-\pi, \pi]$ $(r-1)$-ю производную, а

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(f_{r,1}^{(r)}\right) \leq C_r \sin^{r-2}\theta$$

для $\theta = \arccos a$ и не зависящей от a константы C_r.

Функция $f_{r,0}(t)$ имеет на $[-\pi, \pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-2$, а ее $(r-1)$-я производная

$$f_{r,0}^{(r-1)}(t) = \begin{cases} \left(-\sin t\right)^{r-1} - \alpha_r, & t \in (-\theta, \theta), \\ -\alpha_r, & t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\theta, \theta). \end{cases}$$

Здесь α_r — константа, подобранная из условия равенства $f_{r,0}^{(r-1)}$ нулю в среднем на периоде.

В случае $r = 1$ положим $g_{1,a}(\cos t) = f_{1,0}(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\eta_{\theta,r}(t) = \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}\left(B_r(t+\theta) + (-1)^r B_r(t-\theta)\right).$$

Для всех натуральных r разность $f_{r,0}(t) - \eta_{\theta,r}(t)$ имеет абсолютно непрерывную на $[-\pi, \pi]$ производную порядка $r-1$, а

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{d^r}{dt^r}\left(f_{r,0}(t) - \eta_{\theta,r}(t)\right)\right) \leq 4r \sin^{(r-2)_+}\theta$$

(здесь $(r-2)_+ = \max\{r-2, 0\}$).

Записав неравенство (6) для функции $f_{r,1}(t)$ и для разности $f_{r,0}(t) - \eta_{\theta,r}(t)$, получим, что $\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(f_{r,1})_1 \leq C_r / n^{r+1}$, $\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(f_{r,0} - \eta_{\theta,r})_1 \leq C_r / n^{r+1}$. Тогда из неравенства (9) и полуаддитивности наилучшего (α, β)-приближения следуют неравенства

$$E_n^{\alpha,\beta}(g_{r,a})_{1,\rho} \leq \frac{1}{2}\tilde{E}_n^{\alpha,\beta}(\eta_{\theta,r})_1 + \frac{C_r}{n^{r+1}}, \qquad (10)$$

$$E_n^{\alpha,\beta}(g_{r,a})_{1,\rho} \geq \frac{1}{2}\tilde{E}_{n+2j}^{\alpha,\beta}\left(\eta_{\theta,r}\sin^{2j} t\right)_1 - \frac{C_r}{n^{r+1}}. \qquad (11)$$

Наилучшие несимметричные приближения функций $\eta_{\theta,r}(t)$. Из неравенств (10), (11) следует, что для оценки наилучших (α,β)-приближений усеченных степенных функций необходимо исследовать наилучшие (α,β)-приближения тригонометрическими многочленами функций $\eta_{\theta,r}(t)$. Поскольку $\eta_{\theta,r}(t)$ — линейная комбинация сдвигов ядер Бернулли, нам понадобятся найденные в [7, с. 70] точные значения наилучших (α,β)-приближений ядер Бернулли:

$$\frac{1}{\pi}\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(B_r)_1 = \max_t \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t) = \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(\theta_0), \tag{12}$$

где θ_0 — лежащая на $\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$ точка максимума сплайна $\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t)$.

Лемма 1. *Для любого натурального* r

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta,r})_1 \le 2\sin^{r-1}\theta\cdot\max_t \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t).$$

Доказательство. Пусть r — четное. Тогда, применив полуаддитивность функционала наилучшего (α,β)-приближения и соотношение (12), получим

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta,r})_1 \le \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}\left(\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(\cdot+\theta)\right)_1 + \tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(\cdot-\theta)\right)_1\right) =$$

$$= \frac{2\sin^{r-1}\theta}{\pi}\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(B_r)_1 = 2\sin^{r-1}\theta\cdot\max_t \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t).$$

Аналогичным образом, применяя полуаддитивность функционала наилучшего (α,β)-приближения и соотношение (12) в случае нечетного r, получаем

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta,r})_1 \le \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}\left(\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(\cdot+\theta)\right)_1 + \tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(-B_r(\cdot-\theta)\right)_1\right) =$$

$$= \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}\left(\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(\cdot+\theta)\right)_1 + \tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(\theta-\cdot)\right)_1\right) =$$

$$= \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}\left(\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(B_r(\cdot))_1 + \tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}\left(B_r(-\cdot)\right)_1\right) =$$

$$= \frac{2\sin^{r-1}\theta}{\pi}\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(B_r)_1 = 2\sin^{r-1}\theta\cdot\max_t \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого натурального* r *выполняется неравенство*

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta_k,r})_1 \ge 2\sin^{r-1}\theta_k\cdot\max_t \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t),$$

где $\theta_k = \theta_{k,n,r} = \theta_0 + \dfrac{2\pi k}{n+1}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$.

Доказательство. В работе [8] доказано, что для любой суммируемой на периоде 2π-периодической функции g

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(g)_1 = \sup\left\{ \int_0^{2\pi} g(t)\varphi(t)\,dt : \varphi \perp F_{2n+1},\ \|\varphi\|_{\infty;\left(\alpha^{-1},\beta^{-1}\right)} \le 1 \right\}.$$

Функция $\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}$ имеет период $\dfrac{2\pi}{n+1}$ и равна нулю в среднем на $[0,2\pi]$. Следовательно, она ортогональна всем тригонометрическим полиномам порядка не выше n. Кроме того, $\|\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}\|_{\infty;\left(\alpha^{-1},\beta^{-1}\right)} = 1$, поэтому

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta_k,r})_1 \ \ge\ \int_0^{2\pi} \eta_{\theta_k,r}(t)\,\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sin^{r-1}\theta_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(B_r(t+\theta_k) + (-1)^r B_r(t-\theta_k) \Big) \varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sin^{r-1}\theta_k}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} B_r(\theta_k + t)\,\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}(t)\,dt + \int_0^{2\pi} (-1)^r B_r(t-\theta_k)\,\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}(t)dt \right).$$

Выполним в первом интеграле замену переменной t на $-t$ и воспользуемся четностью функции $\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}$. Ко второму интегралу применим справедливое для всех r равенство $(-1)^r B_r(t-\theta_k) = B_r(\theta_k - t)$. Получим

$$\tilde{E}_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_{\theta_k,r})_1 \ \ge\ \frac{2\sin^{r-1}\theta_k}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(\theta_k - t)\,\varphi_{n+1,0;\alpha,\beta}(t)\,dt =$$

$$= 2\sin^{r-1}\theta_k \cdot \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(\theta_k). \tag{13}$$

Поскольку функция $\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}$ $\dfrac{2\pi}{n+1}$-периодична, $\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(\theta_k) = \varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(\theta_0)$. Тогда неравенство (13) с учетом второго из соотношений (12) влечет справедливость леммы 2.

Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы. В силу неравенства (11) для оценки снизу наилучших несимметричных приближений усеченных степенных функций надо оценить снизу наилучшие несимметричные приближения тригонометрическими полиномами функций $\eta_{\theta,r}(t)\sin^{2j}t$.

Лемма 3. *Для любого натурального* r

$$\tilde{E}_{n+2j}^{\alpha,\beta}\left(\eta_{\theta,r}(t)\sin^{2j}t\right)_1 \ \ge\ \sin^{2j}\theta \cdot \tilde{E}_{n+2j}^{\alpha,\beta}\left(\eta_{\theta,r}(t)\right)_1 - \frac{C_r}{n^{r+1}}. \tag{14}$$

Доказательство. Применив к равенству

$$\eta_{\theta,r}(t)\sin^{2j}t + \eta_{\theta,r}(t)\left(\sin^{2j}\theta - \sin^{2j}t\right) = \eta_{\theta,r}(t)\sin^{2j}\theta$$

полуаддитивность функционала наилучшего (α,β)-приближения, получим

$$\tilde{E}^{\alpha,\beta}_{n+2j}\left(\eta_{\theta,r}(t)\sin^{2j}t\right)_1 \;\geq\; \sin^{2j}\theta\cdot\tilde{E}^{\alpha,\beta}_{n+2j}\left(\eta_{\theta,r}(t)\right)_1 \;-$$

$$-\tilde{E}^{\alpha,\beta}_{n+2j}\left(\eta_{\theta,r}(t)\left(\sin^{2j}\theta-\sin^{2j}t\right)\right)_1. \tag{15}$$

Функция $\eta_{\theta,r}(t)\left(\sin^{2j}\theta-\sin^{2j}t\right)$ принадлежит $\tilde{W}^r KV$ с некоторой константой K, зависящей от j и r. Тогда в силу (6)

$$\tilde{E}^{\alpha,\beta}_{n+2j}\left(\eta_{\theta,r}(t)(\sin^{2j}\theta-\sin^{2j}t)\right)_1 \;\leq\; \frac{C_r}{n^{r+1}}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (15) следует неравенство (14).

Лемма доказана.

Отметим, что в силу равенства $\left\|\varphi_{n,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})} = n^{-r}\left\|\varphi_{1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})}$, справедливого для всех натуральных n, оценка (5) эквивалентна оценке

$$E^{\alpha,\beta}_{n}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho} \;=\; \left\|\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})} \;+\; O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \tag{16}$$

получаемой заменой n на $n+1$ в правой части (5). Для доказательства (16) необходимо получить две оценки: оценку сверху

$$E^{\alpha,\beta}_{n}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho} \;\leq\; \left\|\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})} \;+\; \frac{C_r}{n^{r+1}} \tag{17}$$

и оценку снизу

$$E^{\alpha,\beta}_{n}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho} \;\geq\; \left\|\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})} \;-\; \frac{C_r}{n^{r+1}}. \tag{18}$$

Докажем неравенство (17). Применив последовательно равенство (7), неравенство (10) и лемму 1, будем иметь

$$E^{\alpha,\beta}_{n}\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho} \;\leq$$

$$\leq\; \max\left\{\gamma^{-1}\max_t\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t),\;\; \delta^{-1}\max_t\varphi_{n+1,r;\beta,\alpha}(t)\right\} \;+\; \frac{C_r}{n^{r+1}}. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_{n+1,r;\beta,\alpha}(t) = -\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}\left(t-\dfrac{\pi}{n+1}\right)$. Следовательно,

$$\max_t\varphi_{n+1,r;\beta,\alpha}(t) \;=\; -\min_t\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}(t).$$

Подставив последнее равенство в (19), получим оценку (17).

Перейдем к доказательству неравенства (18). Из лемм 2 и 3 следует, что для любого k

$$\tilde{E}^{\alpha,\beta}_{n+2j}\left(\eta_{\theta_k,r}(t)\sin^{2j}t\right)_1 \;\geq\; 2\sin^{r+2j-1}\theta_k\cdot\max_t\varphi_{n+2j+1,r;\alpha,\beta}(t)-\frac{C_r}{n^{r+1}} \tag{20}$$

(считаем, что $\theta_k=\theta_{k,n+2j,r}$). Применив последовательно соотношение (7), неравенство (11) и неравенство (20), получим

$$E^{\alpha,\beta}_n\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho} \;\geq\; \sin^{r+2j-1}\theta_k\left\|\varphi_{n+2j+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})}-\frac{C_r}{n^{r+1}}. \tag{21}$$

Неравенство имеет место для любого узла θ_k. Выберем теперь k_0 так, чтобы узел θ_{k_0} был ближайшим к точке $\frac{\pi}{2}$ из всех θ_k. Тогда $\left|\theta_{k_0}-\frac{\pi}{2}\right|\leq\frac{\pi}{n+2j}$,

$$\sin\theta_{k_0}\;\geq\;\cos\frac{\pi}{n+2j}\;>\;1-\frac{\pi^2}{2(n+2j)^2},\quad \sin^{r+2j-1}\theta_{k_0}\;>\;1-\frac{(r+2j-1)\pi^2}{2(n+2j)^2}.$$

С учетом последнего неравенства из (21) следует

$$E^{\alpha,\beta}_n\left(W^r_{1;\gamma,\delta}\right)_{1,\rho}\;\geq\;\left\|\varphi_{n+2j+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})}-\frac{C_r}{n^{r+1}}.$$

Для получения оценки (18) осталось заметить, что

$$\left|\left\|\varphi_{n+2j+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})}-\left\|\varphi_{n+1,r;\alpha,\beta}\right\|_{\infty;(\gamma^{-1},\delta^{-1})}\right| \;=\; O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Теорема доказана.

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a-x|^s$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**, № 3. – С. 139 – 180.
2. *Кофанов В. А.* Приближение классов дифференцируемых функций в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 5. – С. 1078 – 1090.
3. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А.* Несимметричные приближения классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Anal. Math. – 1988. – **14**. – P. 193 – 217.
4. *Motornyi V. P., Pasko A. N.* On the best one-sided approximation of some classes of differentiable functions in L_1 // E. J. Approxim. – 2004. – **10**, № 2. – P. 159 – 169.
5. *Моторный В. П., Пасько А. Н.* Наилучшее одностороннее приближение усеченных степеней и оценки погрешностей квадратурных формул на некоторых классах функций // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2003. – Вип. 8. – С. 74 – 80.
6. *Моторная О. В.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1. – Киев, 1993. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 93.20).
7. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1987.
8. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409 – 416.

Получено 28.03.11