УДК 517.518.4

П. В. Задерей, О. В. Иващук (Киев. нац. ун-т технологий и дизайна)

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ*

We obtain necessary conditions for the convergence of multiple Fourier series of integrable functions in the mean.

Одержано необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є інтегровних функцій.

Обозначим через $L_1(T^m)$ пространство 2π-периодических интегрируемых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{T^m} |f(x_1, \ldots, x_m)|\, dx_1 \ldots dx_m = \int_{T^m} |f(x)|\, dx < \infty,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $T^m = [0, 2\pi)^m$.

Пусть $f \in L_1(T^m)$ и

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l|_1 = k} c_l e^{i(l,x)} \tag{1}$$

— ее ряд Фурье, а

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|l|_1 = k} c_l e^{i(l,x)}$$

— n-я частичная сумма ряда (1). Здесь $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, m}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(l, x) = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_mx_m$, а $|l|_1 = |l_1| + |l_2| + \ldots + |l_m|$.

Говорят, что ряд (1) сходится в среднем к функции $f(x)$, если при $n \to \infty$

$$\|f - S_n(f)\|_1 \to 0. \tag{2}$$

Поскольку соотношение (2) выполняется не для всех функций $f(\cdot) \in L_1$ (см. [1], гл. VIII, § 22), то возникает задача об установлении условий на коэффициенты ряда (1), при выполнении которых этот ряд будет сходиться в среднем.

В данной работе для $f \in L_1(T^m)$ найдены условия, необходимые для выполнения соотношения (2).

В работе Г. А. Фомина [2] доказано, что если ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{3}$$

сходится в среднем, то для каждой последовательности натуральных чисел $\{m_n\}$ такой, что $m_n \le n$, $n = 1, 2, \ldots$, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \frac{a_{n+k}}{k} = 0.$$

---

*Выполнена за результатами государственной бюджетной темы 16.02.22ДБ.

П. В. Задерей, Б. А. Смаль [3] исследовали ряды вида (3) и вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{4}$$

и установили, что условие

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} = 0$$

необходимо для сходимости рядов (3) и (4) в метрике пространства L_1.

Для рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+\ldots+l_m=k} e^{i(l,x)}, \quad l_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

в работе [4] установлено, что необходимым условием сходимости в среднем этих рядов является соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \ln^{m-1} n \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} = 0.$$

В работе [5] для рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_1+\cdots+l_m=k} a_l e^{i(l,x)}, \quad l_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

установлено, что необходимым условием сходимости в среднем этих рядов является соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left\| \sum_{l_1+\ldots+l_m=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть f принадлежит $L_1(T^m)$. Тогда для выполнения соотношения* (2) *необходимо, чтобы имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{s} \|A_s(k,n,x)\|_1 = 0,$$

где $A_s(k,n,x) = \sum_{\sum_{j=1}^{m}(-1)^{s_j} l_j = n+k} c_l e^{i(l,x)}$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, $s_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad l_j \geq 0, \\ 1, & \text{если} \quad l_j < 0, \end{cases} \quad j = \overline{1,m}.$

Доказательство этой теоремы базируется на известных утверждениях, которые сформулируем здесь.

Для тригонометрических полиномов вида

$$t_n(x) = t_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|l|_1=k} c_l e^{i(l,x)}$$

выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial t_n(x)}{\partial x_i} \right\|_1 \leq n \left\| t_n\left(x_1, \ldots, x_m\right) \right\|_1. \tag{5}$$

Неравенство (5) — это неравенство типа С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $B \subset M$,

$$\widetilde{t_n}^{(B)}(x) = (-i)^{|B|} \sum_{k=0}^{n} \sum_{|l|_1 = k} \prod_{j \in B} \operatorname{sign} l_j c_l e^{i(l,x)}$$

— сопряженная к $t_n(x)$ функция по переменным x_j, $j \in B$, $|B|$ — количество элементов множества B.

Неравенство типа неравенства (5) выполняется и для сопряженных функций (см. [6, с. 21])

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{t_n}^{(B)}(x)}{\partial x_i} \right\|_1 \leq n \left\| t_n(x) \right\|_1. \tag{6}$$

Теорема Харди – Литтлвуда [7 с. 454]. *Пусть*

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots \in H,$$

тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left| F\left(e^{ix}\right) \right| dx, \tag{7}$$

где H — *пространство Харди* $\Big($*пространство аналитических при* $|z| < 1$ *функций* $F(z)$, *для которых* $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \left| F\left(re^{ix}\right) \right| dx < \infty \Big)$.

Через $V_{2n}^n(f; x)$ обозначим сумму Валле Пуссена функции $f(x)$:

$$V_{2n}^n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} S_k(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} \sum_{|l|_1 = k} c_l e^{i(l,x)},$$

где

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n+1}, \\ \dfrac{2n-k+1}{n}, & k = \overline{n+1, 2n}. \end{cases}$$

Пусть $t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|l|_1 = k} c_l e^{i(l,x)}$ ($c_l = c_{l_1, l_2, \ldots, l_m}$ — некоторые комплексные числа) — тригонометрический полином. Множество таких полиномов обозначим через T_n.

Пусть также $E_n(f)_1 = \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_1$ — наилучшее приближение функции $f(\cdot)$ в метрике L_1. Обозначим через t_n^* многочлен из T_n, дающий наилучшее приближение функции $f(\cdot)$, тогда

$$\|f - V_{2n}^n(f)\|_1 \leq \|f - t_n^*\|_1 + \|t_n^* - V_{2n}^n(f)\|_1 =$$

$$= E_n(f)_1 + \|V_{2n}^n(f - t_n^*)\|_1 \leq E_n(f)_1 + E_n(f)_1 \|V_{2n}^n\|_{L_1 \to L_1} =$$

$$= (\|V_{2n}^n\|_{L_1 \to L_1} + 1) E_n(f)_1.$$

Здесь $\|V_{2n}^n\|_{L_1 \to L_1}$ — норма оператора Валле Пуссена.

Согласно теореме Стоуна – Вейерштрасса, наилучшее приближение $E_n(f)_1 \to \to 0$ при $n \to \infty$ для любой функции $f \in L_1(T^m)$ (см. [8, с. 42]).

Пусть теперь

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x)$$

— средние Фейера. А. Н. Подкорытовым [9, 10] доказано, что $\|\sigma_n\|_{L_1 \to L_1} \leq C$. Поскольку $V_{2n}^n(f;x) = \dfrac{2n+1}{n}\sigma_{2n}(f;x) - \dfrac{n+1}{n}\sigma_n(f;x)$, то

$$\|V_{2n}^n\|_{L_1 \to L_1} \leq C.$$

Согласно неравенству Лебега имеем

$$\|f - V_{2n}^n(f)\|_1 \leq (\|V_{2n}^n\|_{L_1 \to L_1} + 1) E_n(f)_1 \to 0.$$

Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_1 \geq \|V_{2n}^n(f) - S_n(f)\|_1 - \|f - V_{2n}^n(f)\|_1 \geq$$

$$\geq \|V_{2n}^n(f) - S_n(f)\|_1 + o(1). \tag{8}$$

Частичные суммы рядов Фурье функций, сопряженных к $f(x)$ по первой, второй и обеим переменным, обозначим соответственно через $\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x)$, $\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x)$ и $\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)$, а сопряженные суммы Валле Пуссена по первой, второй и обеим переменным — соответственно через $\widetilde{V_{2n}^n}^{(1)}(f;x)$, $\widetilde{V_{2n}^n}^{(2)}(f;x)$ и $\widetilde{V_{2n}^n}^{(1,2)}(f;x)$:

$$\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x) = -i \sum_{k=1}^{n} \sum_{|l_1|+|l_2|=k} \operatorname{sign} l_1 c_l e^{i(l,x)},$$

$$\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x) = -i \sum_{k=1}^{n} \sum_{|l_1|+|l_2|=k} \operatorname{sign} l_2 c_l e^{i(l,x)},$$

$$\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x) = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{|l_1|+|l_2|=k} \operatorname{sign} l_1 \operatorname{sign} l_2 c_l e^{i(l,)x},$$

$$\widetilde{V_{2n}^n}^{(1)}(f;x) = -i \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(n)} \sum_{|l_1|+|l_2|=k} \operatorname{sign} l_1 c_l e^{i(l,x)},$$

$$\widetilde{V_{2n}^n}^{(2)}(f;x) = -i \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(n)} \sum_{|l_1|+|l_2|=k} \operatorname{sign} l_2 c_l e^{i(l,x)},$$

$$\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}(f;x)=-\sum_{k=1}^{2n}\lambda_k^{(n)}\sum_{|l_1|+|l_2|=k}\operatorname{sign}l_1\operatorname{sign}l_2c_le^{i(l,x)}.$$

Использовав свойства функции $\operatorname{sign} l$, вычислим величину

$$(V_{2n}^{n}(f;x)-S_n(f;x))+i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x)\right)+$$

$$+i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x)\right)-\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{lll} 4\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}, & l_1>0, & l_2>0,\\ 2\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}c_{k,0}e^{ikx_1}, & l_1>0, & l_2=0,\\ 2\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}c_{0,k}e^{ikx_2}, & l_1=0, & l_2>0,\\ 0 & \text{в остальных случаях} & \end{array}\right.=$$

$$=\frac{4}{2^{\gamma_l}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)},$$

где γ_l — число координат вектора $l=(l_1,l_2)$, равных нулю.

Для случая $l_1\geq 0$ и $l_2\geq 0$ имеем

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{(l,x)}=$$

$$=\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(V_{2n}^{n}\left(f;x\right)-S_n\left(f;x\right)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1)}\left(f;x\right)-\widetilde{S_n}^{(1)}\left(f;x\right)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(2)}\left(f;x\right)-\widetilde{S_n}^{(2)}\left(f;x\right)\right)-$$

$$-\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}\left(f;x\right)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}\left(f;x\right)\right). \qquad (9)$$

Аналогичные равенства получаем для остальных случаев.

Для $l_1>0$ и $l_2<0$ имеем

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{l_1-l_2=k}c_le^{(l,x)}=$$

$$=\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(V_{2n}^{n}\left(f;x\right)-S_n\left(f;x\right)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x)\right)-$$

$$-\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)\right). \qquad (10)$$

При $l_1 < 0$ и $l_2 > 0$ находим

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{-l_1+l_2=k}c_l e^{(l,x)}=$$

$$=\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(V_{2n}^{n}(f;x)-S_n(f;x)\right)-$$

$$-\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)\right). \qquad (11)$$

Если же $l_1 \leq 0$ и $l_2 \leq 0$, то получаем

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{-l_1-l_2=k}c_l e^{(l,x)}=$$

$$=\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(V_{2n}^{n}(f;x)-S_n(f;x)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x)\right)+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}i\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x)\right)-$$

$$-\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left(\widetilde{V_{2n}^{n}}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)\right). \qquad (12)$$

Дифференцируя (9) сначала по x_1, а потом по x_2 и складывая полученные равенства, имеем

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}k\sum_{l_1+l_2=k}c_l e^{i(l,x)}\right\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|\left(V_{2n}^{n}(f;x)-S_n(f;x)\right)'_{x_1}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(V_{2n}^n(f;x)-S_n(f;x))'_{x_2}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(\widetilde{V_{2n}^n}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x))'_{x_1}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(\widetilde{V_{2n}^n}^{(1)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1)}(f;x))'_{x_2}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(\widetilde{V_{2n}^n}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x))'_{x_1}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(\widetilde{V_{2n}^n}^{(2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(2)}(f;x))'_{x_2}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|(\widetilde{V_{2n}^n}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x))'_{x_1}\right\|_1+$$

$$+\frac{2^{\gamma_l}}{4}\left\|\left(\widetilde{V_{2n}^n}^{(1,2)}(f;x)-\widetilde{S_n}^{(1,2)}(f;x)\right)'_{x_2}\right\|_1. \tag{13}$$

Применяя к каждому слагаемому правой части (13) неравенство Бернштейна (5) или (6), получаем

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}k\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1\leq$$

$$\leq\frac{2^{\gamma_l}8n}{4}\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}\sum_{|l_1|+|l_2|=k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (8), находим

$$\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\left\|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}k\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+o(1)=$$

$$=\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\int_{T^2}\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}k\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}\right|dx+o(1). \tag{15}$$

Учитывая 2π-периодичность подынтегральной функции в (15) и независимость интеграла от интервала интегрирования длины 2π, имеем

$$\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\frac{1}{2\pi}\int_{T^2}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n}k\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}e^{ikt}\right|dt\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\frac{1}{2\pi}\int_{T^2}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n}(n+k)\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}e^{ikt}\right|dt\right)dx. \tag{16}$$

Подынтегральная функция в (16) относительно переменной t принадлежит пространству Харди. Применим к ней неравенство Харди – Литтлвуда (7):

$$\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T^2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n}(n+k)\sum_{l_1+l_2=k}c_le^{i(l,x)}e^{ikt}\right|dtdx\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T^2}2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\left|\frac{n-k+1}{n}(n+k)\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right|dx\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}n}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n}\frac{n+k}{k+1}\int\limits_{T^2}\left|\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right|dx\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1-\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1.$$

В силу соотношения (2) имеем $\left\|\sum_{|l|_1=k}a_le^{i(l,x)}\right\|_1\to 0$ при $n\to\infty,$ а значит,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{|l|_1=n+k}a_le^{i(l,x)}\right\|_1\to 0.$$

При этом получим

$$\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+o(1).\tag{17}$$

Аналогичным образом действуем с выражениями (10), (11) и (12).

Дифференцируя выражение (10) сначала по x_1, а затем по x_2 и вычитая полученные равенства одно из другого, находим

$$\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|\sum_{l_1-l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+o(1).\tag{18}$$

Действуя подобным образом с (11) и (12), получаем

$$\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|\sum_{-l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+o(1),\tag{19}$$

$$\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\|\sum_{-l_1-l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+o(1).\tag{20}$$

Складывая соотношения (17) – (20), имеем

$$4\|f-S_n(f)\|_1\geq\frac{1}{2^{\gamma_l}2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\left\|\sum_{l_1+l_2=n+k}c_le^{i(l,x)}\right\|_1+\right.$$

$$+\left\|\sum_{l_1-l_2=n+k} c_l e^{i(l,x)}\right\|_1+\left\|\sum_{-l_1+l_2=n+k} c_l e^{i(l,x)}\right\|_1+$$

$$\left.+\left\|\sum_{-l_1-l_2=n+k} c_l e^{i(l,x)}\right\|_1\right)+o(1),$$

что и завершает доказательство теоремы.

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Фомин Г. А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 2. – С. 251 – 265.
3. *Задерей П. В., Смаль Б. О.* О сходимости в пространстве L_1 рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 639 – 646.
4. *Задерей П. В., Капітоненко О. М.* Необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є і Тейлора // Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 117 – 124.
5. *Задерей П. В, Іващук О. В., Пелагенко О. М.* Про необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є // Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 128 – 133.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряди: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряди: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
9. *Подкорытов А. Н.* Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1980. – № 1.
10. *Подкорытов А. Н.* Средние Фейера в двумерном случае // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1978. – № 13. – С. 32 – 39.

Получено 03.04.09,
после доработки — 03.06.11