УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Asymptotic equalities are obtained for upper bounds of deviations of biharmonic Poisson integrals on the classes of (ψ,β)-differentiable periodic functions in the uniform metric.

Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений бигармонических интегралов Пуассона на классах (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций в равномерной метрике.

1. Постановка задачі та допоміжні твердження. Нехай L_1 — простір сумовних на $(0,2\pi)$ 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_1}=\|f\|_1=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$; L_∞ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_t|f(t)|$; C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_C=\max_t|f(t)|$.

Для кожної функції $f\in L_1$ розглянемо функцію

$$B(\rho;f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k\cos kt\right)dt,\quad 0\le\rho<1,$$

що є розв'язком (див., наприклад, [1, с. 248]) бігармонічного рівняння

$$\Delta^2B=0,$$

$$\Delta^2B=\Delta(\Delta B),\quad \Delta=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right).$$

Бігармонічну функцію $B(\rho;f;x)$, поклавши $\rho=e^{-1/\delta}$, будемо позначати через $B_\delta=B_\delta(f;x)$, $\delta>0$, і називати бігармонічним інтегралом Пуассона. В роботі вивчаються апроксимативні властивості бігармонічного інтеграла Пуассона на класі (ψ,β)-диференційовних неперервних функцій.

Нехай $f\in C$, а a_k та b_k — її коефіцієнти Фур'є. Якщо послідовність дійсних чисел $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, і фіксоване дійсне число β є такими, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\pi\beta}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L_1$, то $\varphi(\cdot)$ називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ у розумінні О. І. Степанця [2–4] і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. При цьому кажуть, що функція $f(\cdot)$ належить множині C^{ψ}_{β}. Якщо $f\in C^{\psi}_{\beta}$ і $f^{\psi}_{\beta}\in\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\subseteq L_1$, то кажуть, що $f\in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі, коли $\mathfrak{N}$ збігається з одиничною кулею простору L_∞, тобто $\mathfrak{N}=\{f^{\psi}_{\beta}\in L_\infty\colon \operatorname{ess\,sup}_t|f^{\psi}_{\beta}(t)|\le1\}$, класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. При $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ збігаються з класами $W^r_{\beta,\infty}$, які були введені в [5], і $f^{\psi}_{\beta}=f^{(r)}_{\beta}$ — (r,β)-похідна в розумінні Вейля – Надя. Якщо, крім цього, $\beta=r$, $r\in\mathbb{N}$, то f^{ψ}_{β} є похідною порядка r функції f і тоді класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ є відомими класами

© К. М. ЖИГАЛЛО, Ю. І. ХАРКЕВИЧ, 2011

Соболєва W^r_∞. У випадку $\beta = r+1$, $r \in \mathbb{N}$, класи $W^r_{\beta,\infty}$ збігаються з класами спряжених функцій $\overline{W}^r_\infty$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $C^\psi_{\beta,\infty}$, зручно вважати звуженням на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, що належать множині $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} := \big\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1+t_2)/2\right) + \psi(t_2) \geq 0$$
$$\forall t_1,\, t_2 \in [1,\infty),\ \ \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\big\}.$$

Услід за О. І. Степанцем (див., наприклад, [3, с. 93] або [4, с. 160]) кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\psi(t)/2\right), \qquad \mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t}, \tag{1}$$

де ψ^{-1} – функція, обернена до ψ. Із множини $\mathfrak{M}$, використовуючи функцію $\mu(\psi;t)$, будемо виділяти підмножини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$ і $\mathfrak{M}_\infty$ вигляду

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu\left(\psi;t\right) \leq K \ \ \forall t \geq 1\right\},$$
$$\mathfrak{M}_C = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_1 \leq \mu\left(\psi;t\right) \leq K_2 < \infty \ \ \forall t \geq 1\right\},$$
$$\mathfrak{M}_\infty = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K \leq \mu\left(\psi;t\right) < \infty \ \ \forall t \geq 1\right\},$$

де константи K, K_1, K_2, взагалі кажучи, в різних співвідношеннях різні й можуть залежати від ψ.

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей при $\delta \to \infty$ для величини

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - B_\delta(f;\cdot)\|_C \tag{2}$$

услід за О. І. Степанцем [4, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова – Нікольського для класу $C^\psi_{\beta,\infty}$ та бігармонічного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Зазначимо, що розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського на класі W^r_∞ знайдено С. Канієвим [6] та П. Пих [7]. Крім того, С. Канієв показав [8], що величини $\mathcal{E}\left(W^r_\infty; B_\delta\right)_C$ та $\mathcal{E}\left(W^r_1; B_\delta\right)_1$ (W^r_1 — множина 2π-періодичних функцій, для яких $\|f^{(r)}\left(t\right)\|_1 \leq 1$) рівні, тобто оцінки, отримані для рівномірної метрики, є справедливими і для інтегральної. Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій досліджувались також Л. П. Фалалєєвим [9], авторами [10,11], В. П. Заставним [12] та іншими математиками.

Метою даної роботи є вивчення питання про апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона з точки зору задачі Колмогорова – Нікольського на класах $C^\psi_{\beta,\infty}$ 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ у випадках, коли ці класи охоплюють гладкі та нескінченно диференційовні функції, тобто у випадках $\psi \in \mathfrak{M}_C$ та $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Для бігармонічного інтеграла Пуассона покладемо

$$\tau(u) = \tau_\delta(u;\psi) = \begin{cases} \left(1 - \left[1+\gamma u\right]e^{-u}\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \leq u \leq \dfrac{1}{\delta}, \\[2ex] \left(1 - \left[1+\gamma u\right]e^{-u}\right)\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \geq \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{3}$$

де $\gamma = \gamma(\delta) = \dfrac{\delta}{2}(1 - e^{-2/\delta})$, $\psi(\cdot)$ — визначена та неперервна при $u \geq 1$ функція. Повторивши міркування, наведені в роботі О. І. Степанця [4, с. 183], можна показати, що коли перетворення Фур'є

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_{\delta}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{4}$$

функції $\tau(\cdot)$, що задана за допомогою співвідношення (3), є сумовним на всій числовій осі, тобто є збіжним інтеграл

$$A(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{\delta}(t)|\,dt, \tag{5}$$

то для будь-якого $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x) - B_{\delta}(f;x) = \psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}_{\delta}(t)dt, \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Тоді, врахувавши інтегральне зображення (6), величину (2) запишемо у вигляді

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_{\delta}\right)_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}(t)dt\right\|_C. \tag{7}$$

2. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень бігармонічних інтегралів Пуассона від функцій із класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай ψ належить $\mathfrak{M}_C$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла донизу на $\big[b,\infty\big)$, $b \geq 1$, і*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{g(u)}{u}du < \infty. \tag{8}$$

Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_{\delta}\right)_C = \frac{1}{\delta^2}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\frac{f^{(2)}_0(x)}{2} + f^{(1)}_0(x)\right\|_C +$$
$$+O\left(\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{1}^{\delta} t^2\psi(t)dt + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_{\delta}^{\infty} t\psi(t)dt\right), \tag{9}$$

де $f^{(1)}_0(\cdot)$, $f^{(2)}_0(\cdot)$ — (ψ,β)-похідні функції $f(\cdot)$ при $\beta = 0$ та, відповідно, $\psi(t) = \dfrac{1}{t}$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (3), як суму таких функцій $\varphi(u)$ та $\nu(u)$:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u < \dfrac{1}{\delta}, \\ \left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}\right) \dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\nu(u) = \begin{cases} \left(1 - [1+\gamma u]\, e^{-u} - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u}{\delta}\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ \left(1 - [1+\gamma u]\, e^{-u} - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u}{\delta}\right) \dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}. \end{cases} \tag{11}$$

Через $\hat{\varphi}(\cdot)$ та $\hat{\nu}(\cdot)$ позначимо перетворення Фур'є функцій φ та ν відповідно:

$$\hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \tag{12}$$

$$\hat{\nu}(t) = \hat{\nu}_\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \nu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{13}$$

Далі, використавши теорему 1 з роботи Л. І. Баусова [13], покажемо, що перетворення Фур'є $\hat{\varphi}(\cdot)$ та $\hat{\nu}(\cdot)$ є сумовними на всій числовій осі.

Щоб переконатися у сумовності перетворення Фур'є $\hat{\varphi}(\cdot)$ на всій числовій осі, потрібно показати збіжність інтеграла

$$A(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_\delta(t)|\, dt, \tag{14}$$

а для цього, в свою чергу, згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [13, с. 24], досить показати збіжність інтегралів

$$\int_0^{1/2} u|d\varphi'(u)|, \quad \int_{1/2}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)|,$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u} du.$$

Із (10) випливає, що $d\varphi'(u) = \dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)} du$, $u \in \left[0, \dfrac{1}{\delta}\right)$. Тому

$$\int_0^{1/\delta} u|d\varphi'(u)| = \frac{\psi(1)}{2\delta^2 \psi(\delta)}. \tag{15}$$

Врахувавши, що $\int_{1/\delta}^{1/2} u|d\varphi'(u)| \le \int_{1/\delta}^{\infty} u|d\varphi'(u)|$ і $\int_{1/2}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)| \le$ $\le \int_{1/\delta}^{\infty} u|d\varphi'(u)|$, знайдемо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty} u|d\varphi'(u)| \tag{16}$$

на кожному із проміжків $\left[\dfrac{1}{\delta}, \dfrac{b}{\delta}\right)$ та $\left[\dfrac{b}{\delta}, \infty\right)$ (при $\delta > 2b$).

Із співвідношення (10) при $u \geq \dfrac{1}{\delta}$ маємо

$$d\varphi'(u) = \left(\psi(\delta u) + 2\left(u + \frac{1}{\delta}\right)\delta\psi'(\delta u) + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right)\delta^2\psi''(\delta u)\right)\frac{du}{\psi(\delta)}. \tag{17}$$

Беручи до уваги (17) і враховуючи, що функція $\psi(u)$ є опуклою донизу та спадною при $u \geq 1$, отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|d\varphi'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{\delta}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(u^2 + \frac{u}{\delta}\right)\delta|\psi'(\delta u)|du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi(\delta u)du. \tag{18}$$

Оскільки $\psi(\delta u) \leq \psi(1)$ при $u \in \left[\dfrac{1}{\delta}, \dfrac{b}{\delta}\right)$, то

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi(\delta u)du \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} udu = \frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}.$$

Тоді, виконавши інтегрування частинами у першому та другому інтегралах з правої частини нерівності (18), знайдемо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|d\varphi'(u)| \leq \frac{K_1}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{19}$$

Для оцінки інтеграла (16) на проміжку $\left[\dfrac{b}{\delta}, \infty\right)$ використаємо співвідношення

$$\lim_{u\to\infty} u^2\psi(u) = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{u\to\infty} u^3\psi'(u) = 0. \tag{21}$$

Покажемо їх справедливість. Дійсно, оскільки функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла донизу при $u \geq b \geq 1$, то можливі такі випадки: або $\lim_{u\to\infty} g(u) = 0$, або $\lim_{u\to\infty} g(u) = K > 0$, або $\lim_{u\to\infty} g(u) = \infty$.

Нехай $\lim_{u\to\infty} g(u) = K > 0$, тоді знайдеться таке $0 < K_1 < K$, що для всіх $u \geq 1$ буде $g(u) > K_1$, а отже, $\psi(u) > \dfrac{K_1}{u^2}$. А це суперечить тому, що функція $u\psi(u)$, згідно з умовою (8), є сумовною на $[1, \infty)$.

Нехай тепер $\lim_{u\to\infty} g(u)=\infty$, тобто для довільного $M>0$ існує таке $N>0$, що для всіх $u>N$ буде виконуватись $g(u)>M$. Тоді

$$\int\limits_1^x u\psi(u)du=\int\limits_1^N u\psi(u)du+\int\limits_N^x \frac{g(u)}{u}du>K_2+\int\limits_N^x \frac{M}{u}du=K_2+M(\ln x-\ln N).$$

І знову прийшли до суперечності з умовою сумовності функції $u\psi(u)$ на проміжку $[1,\infty)$. З огляду на вищесказане, робимо висновок про істинність співвідношення (20).

Доведемо тепер (21). Функція $g'(u)$ є сумовною на $[1,\infty)$, тоді $\lim_{u\to\infty}\int_{u/2}^{u} g'(x)dx=0$. Оскільки при $u\ge b\ge 1$ функція $g(u)$ опукла донизу, то функція $(-g'(u))$ при $u\ge b$ не зростає і тому

$$-\int\limits_{u/2}^{u} g'(x)dx>-\left(u-\frac{u}{2}\right)\left(2u\psi(u)+u^2\psi'(u)\right)=-\frac{1}{2}\left(2u^2\psi(u)+u^3\psi'(u)\right).$$

Звідси і з (20) випливає справедливість (21).

Враховуючи (17), для довільної функції $\psi(\cdot)\in\mathfrak{M}$ отримуємо

$$\int\limits_{b/\delta}^{\infty} u|d\varphi'(u)|\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{b/\delta}^{\infty}\left(\frac{u^3}{2}+\frac{u^2}{\delta}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{b/\delta}^{\infty}\left(u^2+\frac{u}{\delta}\right)\delta|\psi'(\delta u)|du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{b/\delta}^{\infty}u\psi(\delta u)du. \tag{22}$$

Зінтегрувавши частинами перший та другий інтеграли із правої частини нерівності (22) та взявши до уваги (20), (21) і (8), знайдемо

$$\int\limits_{b/\delta}^{\infty} u|d\varphi'(u)|\le\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{23}$$

Отже, з співвідношень (15), (19) та (23) випливає, що при $\delta\to\infty$

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\varphi'(u)|=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right),\quad \int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1||d\varphi'(u)|=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{24}$$

Враховуючи (10) та (8), отримуємо

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u}du=\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{\delta}\right)du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{\delta}\right)\psi(\delta u)du\le\frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}.$$

І, нарешті, переходимо до оцінки інтеграла

$$\int\limits_0^1\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du+$$

$$+\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du. \tag{25}$$

Подамо формулу (10) у вигляді

$$\varphi(u)=\begin{cases}(1-\lambda_{\delta,1}(u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le\dfrac{1}{\delta},\\[2mm] (1-\lambda_{\delta,1}(u))\,\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{26}$$

де $\lambda_{\delta,1}(u)=1-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u}{\delta}$. Із співвідношення (26) знайдемо

$$\varphi(1-u)=\begin{cases}(1-\lambda_{\delta,1}(1-u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 1-\dfrac{1}{\delta}\le u\le 1,\\[2mm] (1-\lambda_{\delta,1}(1-u))\,\dfrac{\psi(\delta(1-u))}{\psi(\delta)}, & u\le 1-\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{27}$$

$$\varphi(1+u)=\begin{cases}(1-\lambda_{\delta,1}(1+u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & -1\le u\le\dfrac{1}{\delta}-1,\\[2mm] (1-\lambda_{\delta,1}(1+u))\,\dfrac{\psi(\delta(1+u))}{\psi(\delta)}, & u\ge\dfrac{1}{\delta}-1.\end{cases} \tag{28}$$

Оцінимо спочатку перший доданок із правої частини (25), додаючи та віднімаючи під знаком модуля в підінтегральній функції величину $\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u)$. Отримаємо

$$\int\limits_{0}^{1-1/\delta}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du\le\int\limits_{0}^{1-1/\delta}\frac{|\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u)|}{u}du+$$

$$+\int\limits_{0}^{1-1/\delta}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)+\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u)|}{u}du. \tag{29}$$

Для першого інтеграла з правої частини нерівності (29), як неважко переконатися, є справедливою оцінка

$$\int\limits_{0}^{1-1/\delta}\frac{|\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u)|}{u}du=O(1). \tag{30}$$

Оскільки мають місце співвідношення (27) і (28), то при $u\in\left[0,1-\dfrac{1}{\delta}\right]$

$$\lambda_{\delta,1}(1-u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\varphi(1-u),\quad \lambda_{\delta,1}(1+u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\varphi(1+u).$$

Тоді

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)+(\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u))|}{u} du \le$$

$$\le \int\limits_0^{1-1/\delta} |\varphi(1-u)| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right| \frac{du}{u} + \int\limits_0^{1-1/\delta} |\varphi(1+u)| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right| \frac{du}{u}. \tag{31}$$

Функція $\varphi(\cdot)$ задовольняє умови леми 2 з роботи [13], а тому

$$|\varphi(u)| \le |\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int\limits_0^{1/2} u\,|d\varphi'(u)| + \int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1|\,|d\varphi'(u)| := H(\varphi).$$

З огляду на це маємо

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)+(\lambda_{\delta,1}(1-u)-\lambda_{\delta,1}(1+u))|}{u} du =$$

$$= H(\varphi) O\left(\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\psi(\delta(1-u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))} du + \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))} du \right). \tag{32}$$

Беручи до уваги формулу (10) та оцінки (24), отримуємо

$$H(\varphi) = O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{33}$$

Для інтегралів з правої частини (32) у випадку $\psi\in\mathfrak{M}_C$, як неважко переконатися, при $\delta\to\infty$ мають місце такі оцінки:

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\psi(\delta(1-u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))} du = O(1), \qquad \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))} du = O(1).$$

Звідси, поєднуючи співвідношення (29) – (33) та враховуючи (20), отримуємо

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u} du = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right).$$

Дотримуючись аналогічної схеми міркувань, неважко переконатися в тому, що для другого доданка з правої частини (25) має місце така сама оцінка, а тому

$$\int\limits_0^{1} |\varphi(1-u)-\varphi(1+u)| \frac{du}{u} = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty.$$

Отже, за теоремою 1 з роботи [13] інтеграл (14) є збіжним.

Сумовність на всій дійсній осі перетворення $\hat{\nu}(t)$ вигляду (13) випливає із збіжності інтеграла

$$A(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\nu}_\delta(t)|\, dt. \tag{34}$$

Для того щоб інтеграл $A(\nu)$ був збіжним, необхідно і достатньо (див. теорему 1 [13, с. 24]), щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\nu'(u)|, \quad \int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1||d\nu'(u)|, \tag{35}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\nu(u)|}{u} du, \quad \int\limits_0^{1} \frac{|\nu(1-u)-\nu(1+u)|}{u} du, \tag{36}$$

де $\nu(u)$ — визначена та неперервна при всіх $u \geq 0$ функція, задана співвідношенням (11).

Знайдемо оцінку першого інтеграла з (35) на кожному з проміжків: $\left[0, \frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2b$. Позначимо

$$\overline{\nu}(u) := 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}. \tag{37}$$

За допомогою (37) функцію $\nu(u)$ вигляду (11) на проміжку $\left[0, \frac{1}{\delta}\right]$ можна зобразити так: $\nu(u) = \overline{\nu}(u)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}$. Із співвідношення (37) маємо

$$\overline{\nu}'(u) = e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - u - \frac{1}{\delta},$$

$$\overline{\nu}''(u) = -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 1,$$

$$\overline{\nu}(0) = 0, \quad \overline{\nu}'(0) = 1 - \gamma - \frac{1}{\delta} < 0.$$

Звідси і з того, що

$$-1 + 2\gamma - \gamma u < e^u, \quad u \in [0, \infty),$$

випливають нерівності

$$\overline{\nu}(u) \leq 0, \quad \overline{\nu}'(u) < 0, \quad \overline{\nu}''(u) < 0, \quad u \geq 0. \tag{38}$$

Отже, для функції $\nu(\cdot)$, заданої формулою (11), беручи до уваги (37) та третю нерівність з (38), отримуємо

$$\nu''(u) = \overline{\nu}''(u)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} < 0, \quad u \in \left[0, \frac{1}{\delta}\right]. \tag{39}$$

Тому

$$\int\limits_0^{1/\delta} u\,|d\nu'(u)| = -\int\limits_0^{1/\delta} u d\nu'(u) = \overline{\nu}\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} - \frac{1}{\delta}\overline{\nu}'\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}.$$

Враховуючи співвідношення

$$|\overline{\nu}(u)| < \frac{2}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{u^3}{2}, \quad |\overline{\nu}'(u)| < \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta}u + \frac{3}{2}u^2, \quad u \geq 0, \tag{40}$$

знаходимо

$$\int\limits_0^{1/\delta} u\,|d\nu'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{41}$$

Оцінимо перший інтеграл із (35) на проміжку $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$, $\delta > 2b$. Беручи до уваги рівність

$$\nu''(u) = \overline{\nu}''(u)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2\delta\overline{\nu}'(u)\frac{\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \delta^2\overline{\nu}(u)\frac{\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{42}$$

маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\,|d\nu'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|\overline{\nu}''(u)|\psi(\delta u)du + \frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|\overline{\nu}'(u)||\psi'(\delta u)|du +$$

$$+\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|\overline{\nu}(u)|\psi''(\delta u)du.$$

Знову враховуючи нерівності (40) та оцінку $|\overline{\nu}''(u)| < \frac{2}{\delta} + 3u$, $u \geq 0$, а також інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\,|d\nu'(u)| \leq \frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{43}$$

Далі покажемо, що у випадку опуклості донизу функції $u^2\psi(u)$ при $u \geq b$, $b \geq 1$, виконується нерівність

$$d\nu'(u) \leq 0, \quad u \geq b/\delta. \tag{44}$$

Дослідимо функцію

$$\tilde{\nu}(u) = \frac{1}{u^2} - \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma\frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u\delta}.$$

Маємо

$$\tilde{\nu}(u) = \frac{\overline{\nu}(u)}{u^2}, \quad \gamma > 1 - \frac{1}{\delta},$$

$$\tilde{\nu}'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{2e^{-u}}{u^3} + \frac{e^{-u}}{u^2} + \gamma\frac{e^{-u}}{u^2} + \gamma\frac{e^{-u}}{u} + \frac{1}{u^2\delta} =$$

$$= \frac{1}{u^3}\left(-2 + 2e^{-u} + (1+\gamma)ue^{-u} + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta}\right),$$

$$\tilde{\nu}''(u) = \frac{6}{u^4} - \frac{6e^{-u}}{u^4} - \frac{4e^{-u}}{u^3} - \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma\frac{2e^{-u}}{u^3} - 2\gamma\frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma\frac{e^{-u}}{u} - \frac{2}{u^3\delta} =$$

$$= \frac{1}{u^4}\left(6 - 6e^{-u} - (4+2\gamma)ue^{-u} - (1+2\gamma)u^2e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta}\right).$$

Тоді, враховуючи нерівність $e^{-u} \geq 1 - u$, одержуємо

$$\tilde{\nu}(u) < 0,$$

$$\tilde{\nu}'(u) > \frac{1}{u^3}\left(-2 + 2 - 2u + \left(1 + 1 - \frac{1}{\delta}\right)(u - u^2) +\right.$$

$$\left. + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{u^2}{\delta} + \gamma u^2 e^{-u}\right) > 0,$$

$$\tilde{\nu}''(u) < \frac{1}{u^4}\left(6 - 6 + 6u - \left(4 + 2 - \frac{2}{\delta}\right)(u - u^2) -\right.$$

$$\left. -(1+2\gamma)u^2e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{u^4}\left(-\frac{2u^2}{\delta} - (1+2\gamma)u^2e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u}\right) < 0.$$

І оскільки при $u \geq b$, $b \geq 1$, виконується $g(u) > 0,\ g'(u) < 0,\ g''(u) > 0$, то при $u \geq \dfrac{b}{\delta}$

$$\nu''(u) = \left(\frac{1}{\delta^2}\tilde{\nu}(u)g(\delta u)\right)'' = \frac{1}{\delta^2}\tilde{\nu}''(u)g(\delta u) + \frac{2}{\delta}\tilde{\nu}'(u)g'(\delta u) + \tilde{\nu}(u)g''(\delta u) < 0.$$

Далі скористаємося такими твердженнями.

Твердження 1 [4, с. 161]. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить $\mathfrak{M}_C$ тоді і лише тоді, коли величина $\alpha(t) = \dfrac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) = \psi'(t{+}0)$, задовольняє умову $0 < K_1 \leq \alpha(t) \leq$ $\leq K_2 \ \ \forall t \geq 1$.*

Твердження 2 [4, с. 175]. *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала $\mathfrak{M}_0$, необхідно і достатньо, щоб для довільного фіксованого числа $c > 1$ існувала стала K така, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалась нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K.$$

Беручи до уваги (44), (40), а також твердження 1 та 2, для функцій $\psi(\cdot)$ з класу $\mathfrak{M}_C$ одержуємо

$$\int\limits_{b/\delta}^{1/2} u\,|d\nu'(u)| = -\int\limits_{b/\delta}^{1/2} u d\nu'(u) = -\frac{1}{2}\nu'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{b}{\delta}\nu'\left(\frac{b}{\delta}\right) + \nu\left(\frac{1}{2}\right) - \nu\left(\frac{b}{\delta}\right) \leq$$

$$\leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}. \qquad (45)$$

Об'єднання формул (41), (43) та (45) дозволяє записати оцінку

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\nu'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{46}$$

Враховуючи співвідношення (20), (21), твердження 1 та 2, неважко переконатися в тому, що для другого інтеграла з (35) при $\delta\to\infty$ має місце оцінка

$$\int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1||d\nu'(u)| = O(1). \tag{47}$$

Перший інтеграл із (36) оцінимо на кожному з проміжків: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta},1\right]$ і $\left[\frac{1}{\delta},\infty\right)$. Звертаючи увагу на першу нерівність з (38), робимо висновок, що $\nu(u)\le 0$ при $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$. Тому, використовуючи нерівність

$$e^{-u}\le 1-u+\frac{u^2}{2},\quad u\ge 0, \tag{48}$$

знаходимо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\frac{|\nu(u)|}{u}du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(-1+e^{-u}+\gamma ue^{-u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\frac{du}{u}\le$$

$$\le\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(\left(-1+\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+(1-\gamma)u+\frac{\gamma}{2}u^2\right)du.$$

З останнього співвідношення внаслідок нерівностей

$$\gamma<1,\quad 1-\gamma<\frac{1}{\delta}, \tag{49}$$

$$-1+\gamma+\frac{1}{\delta}<\frac{2}{3\delta^2} \tag{50}$$

маємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\frac{|\nu(u)|}{u}du = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right),\quad \delta\to\infty. \tag{51}$$

Знову беручи до уваги нерівності (48) – (50), отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{|\nu(u)|}{u}du\le\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\left(\frac{1}{\delta}+\gamma-1+(1-\gamma)u+\frac{\gamma}{2}u^2\right)du\le$$

$$\le\frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}\psi(u)du+\frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u\psi(u)du+\frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du=$$

$$= O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du\right), \quad \delta\to\infty, \tag{52}$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{|\nu(u)|}{u}du = \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_1^{\infty}\psi(\delta u)\left(\frac{e^{-u}-1}{u}+\gamma e^{-u}+\frac{u}{2}+\frac{1}{\delta}\right)du \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_1^{\infty}\psi(\delta u)\left(-1+\frac{u}{2}+\gamma+\frac{u}{2}+\frac{1}{\delta}\right)du = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}u\psi(u)du\right). \tag{53}$$

Об'єднуючи (51) – (53) і враховуючи, що $\int_1^{\delta} u^2\psi(u)du \ge K$, для першого інтеграла з (36) запишемо оцінку

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\nu(u)|}{u}du = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}u\psi(u)du\right). \tag{54}$$

Оцінимо другий інтеграл з (36), розглядаючи його на проміжках $[0, 1-1/\delta]$, $[1-1/\delta, 1]$. Введемо позначення

$$\lambda_{\delta,2}(u) = [1+\gamma u]\, e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta},$$

з допомогою якого функцію $\nu(\cdot)$ вигляду (11) подамо у формі типу (26). Далі для функції $\nu(\cdot)$ проведемо аналогічні до кроків (27) – (32) міркування і переконаємося в тому, що

$$\int\limits_0^{1}|\nu(1-u)-\nu(1+u)|\,\frac{du}{u} = \int\limits_0^{1}|\lambda_{\delta,2}(1-u)-\lambda_{\delta,2}(1+u)|\,\frac{du}{u} + O\left(H(\nu)\right), \tag{55}$$

де

$$H(\nu) := |\nu(0)| + |\nu(1)| + \int\limits_0^{1/2}u|d\nu'(u)| + \int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1||d\nu'(u)|.$$

Для величини $H(\nu)$, згідно з (11), (46) та (47), має місце оцінка

$$H(\nu) = O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{56}$$

Крім того,

$$\int\limits_0^{1}\frac{|\lambda_{\delta,2}(1-u)-\lambda_{\delta,2}(1+u)|}{u}du =$$

$$= \int\limits_0^{1}\left|\frac{\gamma+1}{e}\frac{e^{u}-e^{-u}}{u} - \frac{\gamma}{e}(e^{u}+e^{-u}) + 2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right|du = O(1), \quad \delta\to\infty. \tag{57}$$

Співставляючи (55) – (57), отримуємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu(1-u)-\nu(1+u)|}{u}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right) \quad \text{при} \quad \delta\to\infty. \tag{58}$$

Отже, за теоремою 1 з роботи [13] інтеграл (34) також є збіжним.

Таким чином, показано, що при виконанні умов теореми 1 інтеграл $A(\tau)$ вигляду (5) є збіжним, а отже, перетворення Фур'є $\hat{\tau}(t)$ функції $\tau(u) = \varphi(u) + \nu(u)$ є сумовним на всій числовій осі. І тому для будь-якого $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність (6). Зважаючи на (34), величину (7) записуємо у вигляді

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)(\hat{\varphi}(t)+\hat{\nu}(t))\,dt\right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\varphi}(t)dt\right\|_C + O\left(\psi(\delta)A(\nu)\right). \tag{59}$$

Повторивши міркування, наведені у роботі [2, с. 12], неважко переконатися, що ряд Фур'є функції $f_{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\varphi}(t)dt$ має вигляд

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2\delta^2}+\frac{k}{\delta^2}\right)\frac{1}{\psi(\delta)}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\varphi}(t)dt = \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\left(\frac{f_0^{(2)}(x)}{2}+f_0^{(1)}(x)\right), \tag{60}$$

де $f_0^{(1)}(\cdot)$, $f_0^{(2)}(\cdot)$ — (ψ,β)-похідні функції $f(\cdot)$ (у розумінні О.І. Степанця) при $\beta=0$ та, відповідно, $\psi(t)=\frac{1}{t}$, $\psi(t)=\frac{1}{t^2}$. Поєднуючи (59) та (60), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta^2}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\frac{f_0^{(2)}(x)}{2}+f_0^{(1)}(x)\right\|_C + O\left(\psi(\delta)A(\nu)\right), \quad \delta\to\infty. \tag{61}$$

Із нерівностей (2.14) і (2.15) роботи Л. І. Баусова [13] з урахуванням формул (46), (47), (54), (56) та (58) знаходимо оцінку інтеграла $A(\nu)$:

$$A(\nu) = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}u\psi(u)du\right), \quad \delta\to\infty.$$

Звідси та з (61) випливає (9).

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що теорему 1 задовольняють, зокрема, такі функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які при $t \geq 1$ мають вигляд $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2} \ln^{\alpha}(t+K)$, $K > 0$, $\alpha < -1$; $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r} \ln^{\alpha}(t+K)$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r} \operatorname{arctg} t$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r}(K + e^{-t})$, $r > 2$, $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Далі знайдемо розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для бігармонічних інтегралів Пуассона та класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ неперервних функцій у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}$, зокрема, коли ці класи охоплюють нескінченно диференційовні функції.

Теорема 2. *Якщо ψ належить $\mathfrak{M}$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ при $u \in [b, \infty)$, $b \geq 1$, опукла донизу і*

$$\int\limits_1^{\infty} ug(u)du < \infty, \tag{62}$$

то при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right), \tag{63}$$

де $f_0^{(1)}(\cdot)$, $f_0^{(2)}(\cdot)$ — (ψ, β)-похідні функції $f(\cdot)$ при $\beta = 0$ та, відповідно, $\psi(t) = \dfrac{1}{t}$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

Доведення. Нехай $\tau(u) = \varphi(u) + \nu(u)$, де $\varphi(u)$, $\nu(u)$ — функції, що визначені формулами (10) та (11). Доведемо сумовність на всій дійсній осі перетворень $\hat{\varphi}_\delta(t)$ і $\hat{\mu}_\delta(t)$ вигляду (12), (13). Спочатку покажемо збіжність інтеграла $A(\varphi)$ вигляду (14). Для цього розіб'ємо множину $(-\infty, \infty)$ на дві підмножини: $(-\infty, \delta) \cup (\delta, +\infty)$ і $[-\delta, \delta]$.

Знайдемо оцінку інтеграла $A(\varphi)$ при $|t| > \delta$. Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du$ на кожному із проміжків $[0; 1/\delta)$ та $[1/\delta; \infty)$:

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \left(\int\limits_0^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right) \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{64}$$

Як випливає з (10), при $u \in \left[0, \dfrac{1}{\delta}\right)$ $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{1}{\delta}\right) = \dfrac{3\psi(1)}{2\delta^2\psi(\delta)}$, $\varphi'(0) = \dfrac{\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}$, $\varphi'\left(\dfrac{1}{\delta} - 0\right) = \dfrac{2\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}$. Тоді двічі інтегруючи частинами перший інтеграл із правої частини рівності (64), отримуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{3\psi(1)}{2t\delta^2\psi(\delta)} \sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2\psi(1)}{t^2\delta\psi(\delta)} \cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int\limits_0^{1/\delta} \varphi''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{65}$$

Зазначимо, що внаслідок опуклості функції $g(u)$ та умови (62) мають місце співвідношення (20) та (21). Тому, враховуючи, що $\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=0$ та $\lim_{u\to\infty}\varphi'(u)=0$, знаходимо

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{3\psi(1)}{2t\delta^2\psi(\delta)}\sin\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\frac{4\psi(1)+3\psi'(1)}{2\delta\psi(\delta)}\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\varphi''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{66}$$

Поєднання формул (64) – (66) дозволяє записати

$$\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{3\psi'(1)}{2t^2\delta\psi(\delta)}\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{0}^{1/\delta}\varphi''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\varphi''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Отже,

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{K_1}{t^2\delta\psi(\delta)}+\frac{1}{t^2}\int\limits_{0}^{1/\delta}|\varphi''(u)|du+\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}|\varphi''(u)|du. \tag{67}$$

Для функції $\varphi(\cdot)$ вигляду (10) на проміжку $[0,1/\delta]$ очевидною є оцінка

$$\int\limits_{0}^{1/\delta}|\varphi''(u)|du=\frac{\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}. \tag{68}$$

Далі, використовуючи співвідношення (17) та враховуючи спадання й опуклість донизу функції $\psi(\delta u)$, $u\in\left[\frac{1}{\delta},\infty\right)$, маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}|\varphi''(u)|du\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\psi(\delta u)du+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(u+\frac{1}{\delta}\right)|\psi'(\delta u)|\,du+$$

$$+\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\psi''(\delta u)du. \tag{69}$$

Неважко переконатися, що

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\psi''(\delta u)du=\frac{K_2}{\delta\psi(\delta)}-\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(u+\frac{1}{\delta}\right)\psi'(\delta u)du.$$

Поєднавши останнє співвідношення з нерівністю (69) та врахувавши, що $\dfrac{1}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^{b/\delta}\psi(\delta u)du \le \dfrac{(b-1)\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}$, знайдемо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}|\varphi''(u)|du \le \frac{K_2}{\delta\psi(\delta)}+\frac{3\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\left(u+\frac{1}{\delta}\right)|\psi'(\delta u)|\,du \le \frac{K_3}{\delta\psi(\delta)}. \tag{70}$$

Знову застосувавши формулу (17) та взявши до уваги те, що $\psi(u)$ є спадною на $[1,\infty)$ і $\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0$, а також використавши (20), (21), отримаємо оцінку

$$\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}|\varphi''(u)|du \le \frac{K_4}{t^2\delta\psi(\delta)}.$$

Звідси та з співвідношень (67) – (70) знаходимо

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K}{t^2\delta\psi(\delta)},$$

а отже,

$$\int\limits_{|t|\ge\delta}\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \le \frac{2K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{71}$$

Знайдемо оцінку інтеграла $A(\varphi)$ на проміжку $[-\delta,\delta]$. Оскільки має місце умова (62), то

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \le 2\delta\int\limits_0^{\infty}|\varphi(u)|du =$$

$$=\frac{2\delta\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)du+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\psi(\delta u)du \le \frac{K_1}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{72}$$

Із співвідношень (71) і (72) при $\delta\to\infty$ випливає оцінка

$$A(\varphi)=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right).$$

Отже, перетворення $\hat{\varphi}(t)$ вигляду (12) є сумовним на всій числовій осі.

Далі покажемо збіжність інтеграла $A(\nu)$ вигляду (34), де $\hat{\nu}(t)$ — перетворення Фур'є функції $\nu(\cdot)$, заданої формулою (11). З цією метою розіб'ємо множину $(-\infty,\infty)$ на дві частини: $[-\delta,\delta]$ і $|t|>\delta$ так, що

$$A(\nu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_0^{\infty}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\delta}\left|\int\limits_0^\infty \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt := I_1 + I_2. \tag{73}$$

Оцінимо інтеграл $I_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\left|\int_0^\infty \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt$. Маємо

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_0^{1/\delta} \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_{1/\delta}^{\infty} \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt. \tag{74}$$

Як зазначалося, згідно з (11) та (37), $\nu(u) = \overline{\nu}\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}$ при $u \in [0, 1/\delta]$. Тому, застосовуючи першу нерівність з (40), отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_0^{1/\delta} \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_0^{1/\delta}|\nu(u)|\,dudt =$$

$$= \frac{\psi(1)}{\pi\psi(\delta)}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_0^{1/\delta}|\overline{\nu}(u)|\,dudt \leq \frac{2\delta\psi(1)}{\pi\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(\frac{2u}{3\delta^2}+\frac{u^2}{\delta}+\frac{u^3}{2}\right)du = \frac{K}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{75}$$

Використовуючи умову (62) та нерівність (40), знаходимо оцінку другого інтеграла із правої частини (74):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\int\limits_{1/\delta}^{\infty} \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}|\nu(u)|dudt = \frac{4}{3\pi\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\infty u\psi(u)du+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\infty u^2\psi(u)du + \frac{1}{\pi\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\infty u^3\psi(u)du = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{76}$$

Із співвідношень (74) – (76) випливає, що

$$I_1 = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{77}$$

Оцінимо інтеграл $I_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|t|>\delta}\left|\int_0^\infty \nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt$. Двічі інтегруючи частинами і враховуючи, що $\nu(0)=0$, $\nu'(0)=0$, знаходимо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du = \frac{1}{t}\nu\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{t^2}\nu'\left(\frac{1}{\delta}-0\right)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\nu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{78}$$

Внасідок (20) та (21) маємо $\lim_{u\to\infty}\nu(u)=0$ і $\lim_{u\to\infty}\nu'(u)=0$. Тоді

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t}\nu\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\nu'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\nu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{79}$$

Поєднуючи (78) із (79), знаходимо

$$\int\limits_0^{\infty}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{t^2}\left(\nu'\left(\frac{1}{\delta}-0\right)-\nu'\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\nu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\nu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Згідно з (11) та (37) маємо

$$\nu'\left(\frac{1}{\delta}-0\right)=\overline{\nu}'\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, \tag{80}$$

$$\nu'\left(\frac{1}{\delta}\right)=\overline{\nu}'\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}+\overline{\nu}\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\delta\psi'(1)}{\psi(\delta)}. \tag{81}$$

Тому

$$\int\limits_0^{\infty}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t^2}\overline{\nu}\left(\frac{1}{\delta}\right)\frac{\delta\psi'(1)}{\psi(\delta)}\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\left[\int\limits_0^{1/\delta}+\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right]\nu''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Звідси, враховуючи першу нерівність з (40), отримуємо

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\nu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{1}{t^2}\left(\frac{K_1}{\delta^2\psi(\delta)}+\int\limits_0^{1/\delta}|\nu''(u)|du+\int\limits_{1/\delta}^{\infty}|\nu''(u)|du\right). \tag{82}$$

Далі, використовуючи (39), (80) і те, що $\mu'(0)=0$, а також враховуючи першу нерівність з (40), маємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}|\nu''(u)|du=-\nu'\left(\frac{1}{\delta}-0\right)=\left|\overline{\nu}'\left(\frac{1}{\delta}\right)\right|\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\le\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{83}$$

Розглянемо другий інтеграл із правої частини нерівності (82) на кожному із проміжків $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta}, \infty\right)$. Врахувавши (42) та провівши міркування, аналогічні використаним при доведенні співвідношення (43), одержимо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} |\nu''(u)|du \leq \frac{K_3}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{84}$$

На підставі (44), враховуючи (81) і те, що $\lim_{u\to\infty} \nu'(u) = 0$, а також беручи до уваги нерівності (40), знаходимо

$$\int\limits_{b/\delta}^{\infty} |\nu''(u)|du = -\int\limits_{b/\delta}^{\infty} d\nu'(u) = \overline{\nu}'\left(\frac{b}{\delta}\right)\frac{\psi(b)}{\psi(\delta)} + \left|\overline{\nu}\left(\frac{b}{\delta}\right)\right|\frac{\delta|\psi'(b)|}{\psi(\delta)} \leq \frac{K_4}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{85}$$

Із (82) – (85) випливає, що

$$\left|\int\limits_0^{\infty} \nu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \leq \frac{K}{t^2\delta^2\psi(\delta)}.$$

Тоді при $\delta \to \infty$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\delta}\left|\int\limits_0^{\infty} \nu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{86}$$

Отже, внаслідок поєднання співвідношень (73), (77) та (86) для інтеграла (34) отримуємо оцінку

$$A(\nu) = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{87}$$

Оскільки перетворення Фур'є $\hat{\varphi}(t)$ та $\hat{\nu}_\delta(t)$ є сумовними на всій числовій осі, то в умовах теореми 2 має місце (61). На підставі (61), беручи до уваги (87), отримуємо (63).

Теорему 2 доведено.

Зазначимо, що умови теореми 2 задовольняють функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які при $t \geq 1$ мають вигляд $\psi(t) = \frac{\ln^\alpha(t+K)}{t^r}$, $\psi(t) = \frac{1}{t^r}(K + e^{-t})$, де $r > 4$, $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\psi(t) = t^r e^{-Kt^\alpha}$, $\psi(t) = \ln^r(t+e)e^{-Kt^\alpha}$, $K > 0$, $\alpha > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

Нехай функція $\mu(\cdot) = \mu(\psi;\cdot)$ пов'язана з функцією $\psi \in \mathfrak{M}$ співвідношеннями (1). З теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Якщо ψ належить $\mathfrak{M}_\infty$, функція $g(u)$ опукла донизу при $u \in [b,\infty)$, $b \geq 1$, і*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = \infty, \tag{88}$$

то при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність (63).

Доведення. Переконаємося, що виконання умови (88) гарантує збіжність інтеграла $\int_1^{\infty} ug(u)du$, тобто виконання (62). Як випливає з роботи [4, с. 164] (див. формулу (12.24)), для будь-якого $\psi \in \mathfrak{M}$ виконується нерівність

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 2\left(\eta(t) - t\right) \quad \forall t \geq 1. \tag{89}$$

З урахуванням (89) для довільного $r \geq 0$ мають місце співвідношення

$$(t^r\psi(t))' = rt^{r-1}\psi(t) - t^r|\psi'(t)| \leq t^r|\psi'(t)| \left(2r\frac{\eta(t)-t}{t} - 1\right). \tag{90}$$

Внаслідок (88) величина $(\eta(t)-t)/t$ прямує до нуля при $t \to \infty$. Тому на основі (90) приходимо до висновку, що для довільного $r \geq 0$ знайдеться число $t_0 = t_0(r, \psi)$ таке, що при $t > t_0$ функція $t^r\psi(t)$ не зростає. Тоді

$$\int\limits_1^{\infty} ug(u)du = \int\limits_1^{\infty} \frac{u^5\psi(u)}{u^2}du \leq K\int\limits_1^{\infty} \frac{du}{u^2} < \infty.$$

Зазначимо, що при виконанні умов теорем 1 та 2 рівності (9) та (63) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та бігармонічних інтегралів Пуассона в рівномірній метриці у випадку, коли функції $\psi(t)$ спадають до нуля при $t \to \infty$ швидше за функцію $\frac{1}{t^2}$, яка визначає порядок насичення лінійного методу наближення, породженого оператором B_δ.

1. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теориии приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
5. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Ber. Acad. Wiss. – Leipzig, 1938. – **90**. – S. 103 – 134.
6. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
7. *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
8. *Канієв С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 451 – 454.
9. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения (Мат. Всесоюз. симп.). – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1213 – 1219.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333 – 345.
12. *Заставный В. П.* Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409 – 433.
13. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.

Одержано 25.01.11