УДК 517.54

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБОБЩЕННЫЕ (n,d)-ЛУЧЕВЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

We solve the extremal problem of finding the maximum of the functional

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p}),$$

where

$$m_k\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=1}^{n} m_k=m,\quad n,m\in\mathbb{N},\quad 0<|a_{k,1}|<\ldots<|a_{k,m_k}|<\infty,$$

$$\arg a_{k,1}=\arg a_{k,2}=\ldots=\arg a_{k,m_k}=:\theta_k,\quad k=\overline{1,n},$$

$$0=\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\theta_{n+1}:=2\pi,$$

and $r(B,a)$ is the inner radius of a domain B with respect to a point $a\in B$. The points $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m_k}$, are not fixed. Some generalizations of these results are also considered.

Розв'язано екстремальну задачу про знаходження максимуму функціонала

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p}),$$

де

$$m_k\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=1}^{n} m_k=m,\quad n,m\in\mathbb{N},\quad 0<|a_{k,1}|<\ldots<|a_{k,m_k}|<\infty,$$

$$\arg a_{k,1}=\arg a_{k,2}=\ldots=\arg a_{k,m_k}=:\theta_k,\quad k=\overline{1,n},$$

$$0=\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\theta_{n+1}:=2\pi,$$

$r(B,a)$ — внутрішній радіус області B відносно точки $a\in B$. Точки $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m_k}$, не фіксовані. Також розглянуто деякі узагальнення цих результатів.

Целью данной работы является получение точных оценок произведений внутренних радиусов наборов взаимно неналегающих областей. Задачи такого типа впервые возникли в работе [1], в которой, в частности, поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. Этот результат привлек внимание специалистов по геометрической теории функций комплексной переменной и вызвал поток исследований, посвященных его обобщению и усилению (см., например, [2 – 15]).

На современном этапе большое внимание уделяется изучению экстремальных задач о неналегающих областях со свободными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов (см., например, [3 – 7]). Совокупность свободных полюсов образует систему точек комплексной плоскости, от геометрических свойств которой зависит возможность полного решения конкретной экстремальной задачи.

Замечено, что в случае расположения свободных полюсов на некоторой фиксированной окружности удается полностью решить некоторые экстремальные задачи для неналегающих областей и их обобщений. В работах [7, 8, 10] были введены более общие системы точек, названные n-лучевыми. В данной работе удалось обобщить понятие n-лучевой системы точек.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация или сфера Римана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$. Рассмотрим все возможные наборы натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = m. \tag{1}$$

Систему точек

$$A_{n,d} = \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C}\colon\ k = \overline{1,n},\ \ p = \overline{1,m_k}\right\},$$

где $\{m_k\}_{k=1}^n$ — произвольный набор вида (1), назовем обобщенной (n, d)-лучевой системой точек, если при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} 0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m_k}| < \infty, \\ \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m_k} =: \theta_k, \\ 0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi. \end{gathered} \tag{2}$$

Для таких систем точек рассмотрим следующие величины:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right], \quad k = \overline{1,n}, \qquad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_n, \qquad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2.$$

Если $m_k = d$, $k = \overline{1,n}$, то обобщенная система точек совпадает с обычной (n, d)-лучевой системой. При $n = m$ $(d = 1, m_k = 1, k = \overline{1,n})$ получаем n-лучевую систему точек (см. [7–11]).

При выполнении условий $\alpha_k = \dfrac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, систему точек $A_{n,d}$ будем называть равноугольной.

Рассмотрим систему угловых областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C}\colon \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Умножение обобщенной (n, d)-лучевой системы $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ на число $t \in \mathbb{R}_+$ определим следующим образом: $tA_{n,d} = \{ta_{k,p}\}$.

Для произвольной обобщенной (n, d)-лучевой системы рассмотрим „управляющий” функционал

$$\mu := \mu\left(A_{n,d}\right) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[\chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\right)\chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_{k-1}}\right)\right]^{1/2}|a_{k,p}|,$$

где $\chi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $w = a \in D$. Тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной обобщенной (n,d)-лучевой системы $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ и открытого множества D, $A_{n,d} \subset D$, обозначим через $D_k(a_{p,s})$ связную компоненту множества $D(a_{p,s}) \bigcap \overline{P_k}$, содержащую точку $a_{p,s}$, $k = \overline{1,n}$, $p = k,\, k+1$, $s = \overline{1,m_k}$, $a_{n+1,s} := a_{1,s}$.

На множестве пар целочисленных индексов (k,p) определим равенство следующим образом: $(k,p) = (q,s) \Leftrightarrow k = q$ и $p = s$.

Будем говорить, что открытое множество D, $A_{n,d} \subset D$, удовлетворяет условию неналегания относительно заданной обобщенной (n,d)-лучевой системы $A_{n,d}$, если

$$D_k(a_{p,l}) \bigcap D_k(a_{q,s}) = \varnothing$$

при каждом фиксированном $k = \overline{1,n}$ и для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k$.

Обозначим через $r(B,a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [4–6, 14]).

Пусть для произвольных $n, d \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A^{(1)}_{n,d}$ обозначает (n,d)-лучевую равноугольную систему точек, образованную полюсами квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, где

$$Q(w) = -\frac{w^{n-2}(1+w^n)^{2d-2}}{\left[\left(1 - iw^{n/2}\right)^{2d} + \left(1 + iw^{n/2}\right)^{2d}\right]^2}. \tag{3}$$

Для системы $A^{(1)}_{n,d}$ в соотношениях (2) выполняется условие $m_k = d$, $k = \overline{1,n}$. Более того, система точек $A^{(1)}_{n,d}$ обладает симметрией относительно окружности $|w| = 1$. Эти свойства нетрудно получить из общей теории квадратичных дифференциалов [15].

В настоящей работе изучаются следующие задачи.

***Задача* 1.** Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Определить максимум величины

$$J = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}), \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m_k},$$

где $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ — любая обобщенная (n,d)-лучевая система точек вида (2), а $\{B_{k,p}\}$ — произвольный набор попарно непересекающихся областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали.

***Задача* 2.** Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Определить максимум величины

$$I = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(D, a_{k,p}), \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m_k},$$

где $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ — любая обобщенная (n,d)-лучевая система точек вида (2), а D — произвольное открытое множество, удовлетворяющее условию неналегания относительно заданной обобщенной (n,d)-лучевой системы $A_{n,d}$, $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали.

Ясно, что эти задачи обобщают соответствующие постановки задач, рассмотренных в [7–11].

Теорема 1. *Пусть* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. *Тогда для любой обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$ *и произвольного набора взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4}{nd}\right)^{nd} \mu\left(A_{n,d}^{(1)}\right). \tag{4}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ *и области* $B_{k,p}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (3).

Неравенство (4) дает оценку функционала J на всем классе систем точек, рассмотренных в задаче 1. Для обобщенных (n, d)-лучевых систем с учетом конкретики условия (1) получено несколько более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$, *имеющей конкретную совокупность чисел* $\{m_k\}_{k=1}^{n}$ *вида* (1), *и произвольного набора попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, *выполняется неравенство*

$$J \leq \left(\frac{2}{d}\right)^{nd} \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu\left(A_{n,d}^{(1)}\right), \tag{5}$$

где $m_{n+1} := m_1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается при тех же условиях, что и в теореме* 1.

При обобщении предыдущих теорем на открытые множества удается получить следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$, *и любого открытого множества* D, $A_{n,d} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего условию неналегания относительно системы* $A_{n,d}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(D;\, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4}{nd}\right)^{nd} \mu\left(A_{n,d}^{(1)}\right),$$

где $m_{n+1} := m_1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда открытое множество* $D = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{m_k} B_{k,s}$, *где* $B_{k,s}$ — *система круговых областей квадратичного дифференциала* (3).

Теорема 4. *Пусть* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (n, d)*-лучевой системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, $\mu(A_{n,d}) = \mu(A_{n,d}^{(1)})$, *имеющей конкретную совокупность чисел* $\{m_k\}_{k=1}^{n}$ *вида* (1), *и любого открытого множества* D, $A_{n,d} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего условию неналегания относительно системы* $A_{n,d}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(D,\, a_{k,p}) \leq \left(\frac{2}{d}\right)^{nd} \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu\left(A_{n,d}^{(1)}\right),$$

где $m_{n+1} := m_1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда открытое множество* $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{s=1}^{m_k} B_{k,s}$, *где* $B_{k,s}$ — *система круговых областей квадратичного дифференциала* (3).

Из теоремы 1 при $m = n$ $(d = 1)$ получаем такое утверждение для n-лучевых систем точек [7–10].

***Следствие* 1.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Для произвольной* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что*

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(|a_k|^{1/\alpha_k}\right)\chi\left(|a_k|^{1/\alpha_{k-1}}\right)\right]^{1/2}|a_k| = 1,$$

и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

знак равенства в котором достигается, когда a_k *и* B_k *являются полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Из теоремы 2 при $m = n$, $d = 1, m_k = 1, k = \overline{1,n}$, получаем следующий результат.

***Следствие* 2.** *При выполнении условий следствия* 1 *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

знак равенства в котором достигается при тех же условиях, что и в следствии 1.

Для случая n-лучевых систем точек, расположенных на окружности $|w| = 1$, следствия 1 и 2 представляют известные результаты В. Н. Дубинина [4, 6, 9].

***Доказательство теоремы* 2** опирается на метод кусочно-разделяющего преобразования (см. [4–6]).

Рассмотрим однозначную ветвь многозначной аналитической функции

$$z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{1/\alpha_k}, \tag{6}$$

которая при каждом $k = \overline{1,n}$ реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, при этом луч $\arg w = \frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})$ преобразуется в положительную действительную полуось.

Тогда функция

$$\zeta_k(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)} \tag{7}$$

однолистно и конформно отображает область P_k на единичный круг $U = \{z\colon |z| < 1\}$, $k = \overline{1,n}$.

Обозначим $\omega_{k,p}^{(1)} := \zeta_k\left(a_{k,p}\right)$, $\omega_{k-1,p}^{(2)} := \zeta_{k-1}\left(a_{k,p}\right)$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)} := \omega_{n,p}^{(2)}$, $\zeta_0 := \zeta_n$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$.

Семейство функций $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^n$, заданных равенством (7), является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования (см., например, [4–6]) областей $\left\{B_{k,p}\colon k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m_k}\right\}$ относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^n$. Для любого множества $\Delta \in \mathbb{C}$ обозначим $(\Delta)^* := \left\{w \in \overline{\mathbb{C}}\colon \dfrac{1}{w} \in \Delta\right\}$. Пусть $\Omega_{k,p}^{(1)}$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right) \bigcup \bigcup \left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $\overline{P}_0 := := \overline{P}_n$, $\Omega_{0,p}^{(2)} := \Omega_{n,p}^{(2)}$. Ясно, что $\Omega_{k,p}^{(s)}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $s = 1,2$, являются, вообще говоря, многосвязными областями. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}$ является результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно семейств $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$.

Из формулы (7) получаем следующие асимптотические выражения:

$$\begin{gathered}
\Big|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{k,p})\Big| \sim \left[\alpha_k \chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w - a_{k,p}|, \\
w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_k, \\
\Big|\zeta_{k-1}(w) - \zeta_{k-1}(a_{k,p})\Big| \sim \left[\alpha_{k-1} \chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_{k-1}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w - a_{k,p}|, \\
w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m_k}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Из теоремы 1.9 [6] (см. также [4, 5]) и формул (8) следуют неравенства

$$\begin{gathered}
r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \\
\leqslant \left\{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right)\left[\alpha_k \chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\right)|a_{k,p}|\right] \times \right. \\
\left. \times \left[\alpha_{k-1} \chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_{k-1}}\right)|a_{k,p}|\right]\right\}^{1/2}, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m_k}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Тогда из (9) находим

$$\begin{gathered}
\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq \\
\leq \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[\alpha_{k-1}\alpha_k \chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\right)\chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_{k-1}}\right)|a_{k,p}|^2\right]^{1/2} \times \\
\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right)\right]^{1/2}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Отметим, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{p=1}^{m_k} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) \prod_{p=1}^{m_k} r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right) \right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{p=1}^{m_k} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) \prod_{t=1}^{m_{k+1}} r\left(\Omega_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)}\right) \right\}^{1/2}, \qquad (11)$$

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} (\alpha_{k-1}\alpha_k)^{1/2} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2}, \qquad (12)$$

где $m_{n+1} := m_1$, $k = \overline{1,n}$, и $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Из (10), учитывая (11), (12), получаем соотношение

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu(A_{n,d}^{(1)}) \prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{p=1}^{m_k} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) \prod_{t=1}^{m_{k+1}} r\left(\Omega_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)}\right) \right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Из теоремы 3 [4] (см. также [5, 6]) следует неравенство

$$\prod_{p=1}^{m_k} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) \prod_{t=1}^{m_{k+1}} r\left(\Omega_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)}\right) \leq \prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}} r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}}(s-1)}\right), \qquad (14)$$

где $G_s^{(k)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q\left(\zeta_k\right) d\zeta_k^2 = -\frac{\zeta_k^{m_k+m_{k+1}-2}}{\left(\zeta_k^{m_k+m_{k+1}} - 1\right)^2} d\zeta_k^2.$$

Другими словами,

$$G_s^{(k)} = \left\{ \zeta_k \colon \frac{\pi}{m_k+m_{k+1}}(2s-3) < \right.$$

$$\left. < \arg \zeta_k < \frac{\pi}{m_k+m_{k+1}}(2s-1) \,\middle|\, s = \overline{1, m_k+m_{k+1}} \right\}$$

при каждом $k = \overline{1,n}$.

Используя неравенства (14), из (13) получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu(A_{n,d}^{(1)}) \prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}} r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}}(s-1)}\right) \right\}^{1/2}. \qquad (15)$$

Далее, рассмотрим семейство функций

$$\xi_k = \sqrt[n]{\zeta_k} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}, \quad k = \overline{1,n},$$

отображающих комплексную плоскость с разрезом от 0 до ∞ на угол раствора $\dfrac{2\pi}{n}$. При этом области $G_s^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1, m_k + m_{k+1}}$, преобразуются в области $\Sigma_s^{(k)}$, где

$$\Sigma_s^{(k)} = \left\{ \xi_k \colon \frac{2\pi}{n} \left(\frac{2s-3}{2\,(m_k + m_{k+1})} + k - 1 \right) < \right.$$
$$\left. < \arg \xi_k < \frac{2\pi}{n} \left(\frac{2s-1}{2\,(m_k + m_{k+1})} + k - 1 \right) \right\},$$

при каждом $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1, m_k + m_{k+1}}$, а точки $e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}}(s-1)}$ перейдут в точки $e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}}+k-1\right)}$. При объединении этих n углов получим область $\overline{\mathbb{C}}$, содержащую $2m$ попарно непересекающихся областей $\Sigma_s^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1, m_k + m_{k+1}}$. Тогда

$$r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}}(s-1)} \right) \le nr\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}}+k-1\right)} \right). \tag{16}$$

Из соотношений (15) с учетом неравенства (16) получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r\,(B_{k,p}, a_{k,p}) \le n^m \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu(A_{n,d}^{(1)}) \times$$
$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}} r\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}}+k-1\right)} \right) \right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Используя теорему 3 [4] (см. также [5, 6]), можно сделать вывод о выполнении неравенства

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}} r\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}}+k-1\right)} \right) \le \prod_{t=1}^{2m} r\,(B_t, b_t) = \left(\frac{2}{m} \right)^{2m}, \tag{18}$$

причем знак равенства в (18) достигается тогда и только тогда, когда области B_t и точки b_t являются, соответственно, круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q\,(\xi)\,d\xi^2 = \frac{\xi^{2m-2}}{(\xi^{2m}+1)^2} d\xi^2.$$

Другими словами,

$$B_t = \left\{ \xi \colon \frac{\pi}{m}(t-1) < \arg \xi < \frac{\pi}{m} t \right\}, \qquad b_t = \exp\left\{ i \frac{\pi}{2m}(2t-1) \right\}, \quad t = \overline{1, 2m}.$$

Применяя неравенство (18), из выражения (17) окончательно получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r\,(B_{k,p}, a_{k,p}) \le \left(\frac{2n}{m} \right)^m \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \mu(A_{n,d}^{(1)}). \tag{19}$$

Используя неравенство (19) и условия, при которых в нем достигается знак равенства, а также непосредственно преобразовывая систему $A^{(1)}_{n,d}$ изложенным выше методом, завершаем доказательство теоремы.

***Доказательство теоремы* 1.** Если при доказательстве теоремы 2 использовать то, что для системы $A^{(1)}_{n,d}$

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} = \left(\frac{2}{n}\right)^{nd},$$

то непосредственно из (5) получим теорему 1.

***Доказательство теоремы* 4.** Отметим, что из условия неналегания следует, что множество D имеет обобщенную функцию Грина $g_D(z,a)$, где

$$g_D(z,a) = \begin{cases} g_{D(a)}(z,a), & z \in D(a), \\ 0, & z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{D(a)}(\zeta,a), & \zeta \in D(a), \quad z \in \partial D(a), \end{cases}$$

— обобщенная функция Грина открытого множества D относительно точки $a \in D$, а $g_{D(a)}(z,a)$ — функция Грина области $D(a)$ относительно точки $a \in D(a)$.

В дальнейшем будем использовать методы из работ [6, 8, 9]. Рассмотрим множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D$; $E(a_{k,p},t) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - a_{k,p}| \leqslant t\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $n \geqslant 2$, $n, m_k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Для достаточно малых $t > 0$ введем в рассмотрение конденсатор

$$C\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right) = \left\{E_0,\, E_1\right\},$$

где $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{p=1}^{m_k} E(a_{k,p},t)$. Емкостью конденсатора $C\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right)$ называется величина (см. [5])

$$\operatorname{cap} C\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right) = \inf \int\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\, dxdy,$$

где нижняя грань берется по всем вещественным, непрерывным и липшицевым в $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G = G(z)$ таким, что $G\Big|_{E_0} = 0$, $G\Big|_{E_1} = 1$.

Величина, обратная емкости конденсатора C, называется модулем этого конденсатора:

$$|C| = \left[\operatorname{cap} C\right]^{-1}.$$

Из теоремы 1 [6] получаем

$$\left|C\left(t, D, A_{n,d}\right)\right| = \frac{1}{2\pi m} \log\frac{1}{t} + M(D, A_{n,d}) + o(1), \quad t \to 0, \tag{20}$$

где

$$M(D, A_{n,d}) = \frac{1}{2\pi m^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k} \log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right].$$

Используем функции (6), (7) и обозначения $\omega_{k,p}^{(1)}$, $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $a_{n+1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введенные при доказательстве теоремы 2. Пусть также $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\mathbf{\Omega}_{k-1,p}^{(2)}$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m_k}$, $\overline{P}_0:=\overline{P}_n$, $\mathbf{\Omega}_{0,p}^{(2)}:=\mathbf{\Omega}_{n,p}^{(2)}$. Ясно, что $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(s)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m_k}$, $s=1,2$, являются, вообще говоря, многосвязными областями. Пара областей $\mathbf{\Omega}_{k-1,p}^{(2)}$ и $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}$ является результатом разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m_k}$.

Рассмотрим конденсаторы

$$C_k\left(t,\,D,\,A_{n,d}\right)=\left(E_0^{(k)},\,E_1^{(k)}\right),$$

где

$$E_s^{(k)}=\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k(A_{n,d})\right)\bigcup\left[\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k(A_{n,d})\right)\right]^*,\quad k=\overline{1,n},\quad s=0,1,$$

$\{P_k\}_{k=1}^n$ — система углов, соответствующая системе точек $A_{n,d}$, операция $[A]^*$ сопоставляет любому множеству $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ множество, симметричное множеству A относительно окружности $|w|=1$. Отсюда следует, что конденсатору $C\left(t,\,D,\,A_{n,d}\right)$ при разделяющем преобразовании относительно $P(A_{n,d})$ и $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k\left(t,\,D,\,A_{n,d}\right)\}_{k=1}^n$, симметричных относительно $\partial U=\{z\colon|z|=1\}$. В соответствии с работами [6, 8, 9] получим

$$\operatorname{cap}C\left(t,D,A_{n,d}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}C_k\left(t,D,A_{n,d}\right).\tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$\left|C\left(t,D,A_{n,d}\right)\right|\leqslant2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)\right|^{-1}\right)^{-1}.\tag{22}$$

Формула (20) дает асимптотику модуля $C\left(t,\,D,\,A_{n,d}\right)$ при $t\to0$, а величина $M\left(D,A_{n,d}\right)$ является приведенным модулем множества D относительно $A_{n,d}$. Используя формулы (8) и тот факт, что D удовлетворяет условию неналегания относительно системы $A_{n,d}$, получаем аналогичные асимптотические представления для конденсаторов $C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)$, $k=\overline{1,n}$:

$$\left|C_k(t,D,A_{n,d})\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)}\log\frac{1}{t}+M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o(1),\quad t\to0,\quad m_{n+1}:=m_1,\tag{23}$$

где

$$M_k\left(D,A_{n,d}\right)=\frac{1}{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)^2}\left[\sum_{p=1}^{m_k}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_k\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_k}\right)\left|a_{k,p}\right|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\sum_{t=1}^{m_{k+1}}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)}\right)}{\left[\alpha_k\chi\left(\left|a_{k+1,t}\right|^{1/\alpha_k}\right)\left|a_{k+1,t}\right|\right]^{-1}}\Bigg],\quad k=\overline{1,n}.$$

С помощью (23) получаем

$$|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)|^{-1}=\frac{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)}{\log\left(1/t\right)}\times$$

$$\times\left(1+\frac{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)}{\log\left(1/t\right)}M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o\left(\frac{1}{\log\left(1/t\right)}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)}{\log\left(1/t\right)}-\left(\frac{2\pi\left(m_k+m_{k+1}\right)}{\log\left(1/t\right)}\right)^2M_k\left(D,A_{n,d}\right)+$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\left(1/t\right)}\right)^2\right),\qquad t\to 0. \tag{24}$$

Далее, учитывая, что $\sum_{k=1}^{n}m_k=m$, из (24) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)\right|^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi m}{\log\left(1/t\right)}-\left(\frac{2\pi}{\log\left(1/t\right)}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+m_{k+1}\right)^2M_k\left(D,A_{n,d}\right)+$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\left(1/t\right)}\right)^2\right),\quad t\to 0. \tag{25}$$

В свою очередь, (25) позволяет получить асимптотическое соотношение

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\left(1/t\right)}{4\pi m}\left(1-\frac{\pi}{m}\frac{1}{\log\left(1/t\right)}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+m_{k+1}\right)^2M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o\left(\frac{1}{\log\left(1/t\right)}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\left(1/t\right)}{4\pi m}+\frac{1}{4m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+m_{k+1}\right)^2M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o(1),\qquad t\to 0. \tag{26}$$

Неравенства (21) и (22) с учетом (20) и (26) позволяют заметить, что

$$\frac{1}{2\pi m}\log\frac{1}{t}+M\left(D,A_{n,d}\right)+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi m}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{2m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+m_{k+1}\right)^2M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o(1). \tag{27}$$

Из (27) при $t\to 0$ получаем

$$M(D, A_{n,d}) \leqslant \frac{1}{2m^2} \sum_{k=1}^{n} (m_k + m_{k+1})^2 \, M_k\left(D, A_{n,d}\right). \tag{28}$$

Формулы (20), (23) и (28) приводят к выражению

$$\frac{1}{2\pi m^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k} \log r\left(D, a_{k,p}\right) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi m^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{p=1}^{m_k}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_k\chi\left(|a_{k,p}|^{1/\alpha_k}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{m_{k+1}}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)}\right)}{\left[\alpha_k\chi\left(|a_{k+1,t}|^{1/\alpha_k}\right)|a_{k+1,t}|\right]^{-1}}\right].$$

Таким образом,

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(D, a_{k,p}\right) \leq$$

$$\leq \mu \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m_k+m_{k+1})/2} \prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{p=1}^{m_k} r\left(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right)\prod_{t=1}^{m_{k+1}} r\left(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)}\right)\right\}^{1/2}.$$

Доказательство теоремы завершается таким же образом, как и доказательство теоремы 2.

Доказательство следствия **1.** Поскольку для n-лучевой системы точек

$$n = m, \quad d = 1, \quad m_k = 1, \quad k = \overline{1, n},$$

получаем

$$\left(\frac{4}{nd}\right)^{nd} = \left(\frac{4}{n}\right)^{n}.$$

Отсюда и из формул (3), (4) при $\mu = 1$ и получаем необходимое утверждение.

Доказательство следствия **2.** Поскольку для n-лучевой системы точек

$$n = m, \quad d = 1, \quad m_k = 1, \quad k = \overline{1, n},$$

имеем

$$\left(\frac{2}{d}\right)^{nd} = 2^n, \quad \frac{1}{2}(m_k + m_{k+1}) = 1.$$

Отсюда и из формул (3), (5) при $\mu = 1$ и получаем необходимое утверждение.

Доказательство теоремы **3** аналогично доказательству теоремы 1.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.

2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3 – 76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
8. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596 – 610.
9. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 10. – С. 25 – 38.
10. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298 – 303.
11. *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 31 – 36.
12. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253 – 275.
13. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – **286**. – С. 103 – 114.
14. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Получено 08.06.10