УДК 517.9

І. О. Парасюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

КВАЗІПЕРІОДИЧНІ ЕКСТРЕМАЛІ НЕАВТОНОМНИХ ЛАГРАНЖЕВИХ СИСТЕМ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

The paper deals with a quasiperiodically excited natural Lagrangian system on a Riemannian manifold. We find sufficient conditions under which this system has a weak Besicovitch quasiperiodic solution minimizing the averaged Lagrangian. It is proved that this solution is indeed a twice continuously differentiable uniformly quasiperiodic function, and the corresponding system in variations is exponentially dichotomic on the real axis.

Рассматривается квазипериодически возбуждаемая натуральная лагранжева система на римановом многообразии. Указаны достаточные условия, при выполнении которых такая система имеет слабое квазипериодическое по Безиковичу решение, минимизирующее усредненный лагранжиан. Доказано, что в действительности это решение является дважды непрерывно дифференцируемой равномерной квазипериодической функцией, а соответствующая система в вариациях экспоненциально дихотомична на всей вещественной оси.

1. Вступ. Нехай $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — повний m-вимірний ріманів многовид з рімановою метрикою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, яка породжує функцію відстані $\rho(\cdot,\cdot): \mathcal{M}\times\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}_+$ та зв'язність Леві – Чивіти ∇. Через ∇_ξ, $\|\xi\|$, ∇V та $H_V(x)$ позначимо відповідно коваріантну похідну вздовж дотичного вектора ξ, норму цього вектора, градієнт та гессіан гладкої функції $V(\cdot): \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ в точці x. (Нагадаємо, що за означенням $\nabla_\xi V(x): = \langle \nabla V(x), \xi\rangle$, $\|\xi\|^2 = \langle\xi,\xi\rangle$ і $\langle H_V(x)\xi,\eta\rangle := \langle\nabla_\xi \nabla V(x), \eta\rangle$ для довільних $\xi,\eta \in T_x\mathcal{M}$.)

Розглянемо на $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ натуральну систему з кінетичною енергією $\mathrm{K}(\dot{x}) := \langle\dot{x},\dot{x}\rangle/2$, де $\dot{x} = dx/dt$ — вектор миттєвої швидкості, і квазіперіодичною за часом потенціальною енергією $\Pi(t,x)$ вигляду $\Pi(t,x) = -W(t\omega, x)$, де $W(\cdot,\cdot): \mathbb{T}^k \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ — гладка функція. Тут $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/(2\pi\mathbb{Z}^k)$ — k-вимірний тор з природними кутовими координатами $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)|\bmod 2\pi$, а $\omega \in \mathbb{R}^k$ — базисний вектор частот із раціонально незалежними компонентами. Отже, лагранжіан досліджуваної системи має вигляд

$$L(t\omega, x, \dot{x}) = \mathrm{K}(\dot{x}) + W(t\omega, x). \tag{1}$$

Виникає природне питання: чи має лагранжева система з таким лагранжіаном квазіперіодичний розв'язок із базисним вектором частот ω? Один із підходів до розв'язання поставленого питання спирається на варіаційний метод [1 – 10]. За винятком [7, 8], у цих роботах розглядалися лагранжеві системи в евклідовому просторі. У [7, 8] було обґрунтовано варіаційний метод виявлення слабкого квазіперіодичного розв'язку лагранжевої системи з лагранжіаном (1) на рімановому многовиді за умови недодатності секційної ріманової кривини цього многовиду. В [11] при доведенні існування слабкого квазіперіодичного розв'язку вдалося уникнути вимоги недодатності секційної ріманової кривини за додаткового припущення — наявності обмеженої гладкої функції $V(\cdot): \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, яка задовольняє такі умови:

У$_1$) множина $\mathcal{D} := \left\{x \in \mathcal{M} : 2\lambda_V(x) + \|\nabla V(x)\|^2 > 0\right\}$, де

$$\lambda_V(x) := \min\{\langle H_V(x)\xi,\xi\rangle : \|\xi\| = 1, \ \xi \in T_x\mathcal{M}\}$$

— мінімальне власне число гессіана $H_V(x)$, непорожня і для деякого некритичного значення $v \in V(\mathcal{D})$ існує обмежена зв'язна компонента Ω підрівневої множини $V^{-1}(-\infty, v)$ така, що $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega \subseteq \mathcal{D}$;

У$_2$) обмеження квадратичної форми $\langle H_V(x)\xi, \xi\rangle$ на $T_x\partial\Omega$ є додатно визначеною формою для всіх $x \in \partial\Omega$ і

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} \{\mu_V(x) - 2K^*(x)\} > 0, \tag{2}$$

де

$$\mu_V(x) := \min\left\{\langle H_V(x)\xi, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle\nabla V(x), \xi\rangle^2 : \|\xi\| = 1, \xi \in T_x\mathcal{M}\right\},$$

а $K^*(x)$ — максимальна секційна (ріманова) кривина по двовимірних площинах дотичного простору $T_x\mathcal{M}$ (див. визначення у [13, с. 113]);

У$_3$) будь-які дві точки $x,\ y \in \Omega$ можна з'єднати відрізком геодезичної конформно еквівалентної ріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_V := e^V\langle\cdot,\cdot\rangle$, розташованим у $\bar{\mathcal{D}}$.

Серед перелічених вимог щодо функції $V(\cdot)$ умова У$_3$ має „некоефіцієнтний” і нелокальний характер, унаслідок чого її перевірка може бути надто складною. Як показано у п. 2, насправді перевіряти цю умову немає потреби: вона виконується автоматично. Цей факт дозволив на основі результатів [11] констатувати, що умови У$_1$, У$_2$ разом із певними властивостями опуклості функції $W(\cdot,\cdot)$ та умовою гостроти кута між градієнтами функцій $V(\cdot)$ та $W(\varphi,\cdot)$ при кожному $\varphi \in \mathbb{T}^k$ гарантують існування функції $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathcal{M}$, яка породжує слабкий квазіперіодичний за Безіковичем розв'язок $x(t) := u(t\omega)$ системи з лагранжіаном $L(t\omega, x, \dot{x})$ (теорема 1). Зазначений розв'язок має екстремальну властивість: він є границею послідовності, яка мінімізує функціонал

$$\mathcal{L}[x(\cdot)] := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L(t\omega, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{3}$$

на метричному просторі, утвореному шляхом замикання множини гладких квазіперіодичних функцій $x(\cdot)\colon \mathbb{R} \mapsto \Omega$ за псевдометрикою

$$d_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\|^2 + \rho^2(x_1(t), x_2(t))\right]dt. \tag{4}$$

У п. 3 міститься основний результат: тут на основі підходу, запропонованого в [4] і розвинутого в [12], доведено, що $x(t)$ є класичним рівномірним квазіперіодичним розв'язком системи з лагранжіаном $L(t\omega, x, \dot{x})$ (теорема 2). Крім того, встановлено, що система у варіаціях відносно $x(t)$ є експоненціально дихотомічною на всій дійсній осі часу (теорема 3).

2. Теорема існування слабкого квазіперіодичного розв'язку лагранжевої системи на рімановому многовиді. Згідно з теоремою Неша [14] многовид $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ допускає гладке ізометричне вкладення $\iota\colon \mathcal{M} \mapsto \mathbb{E}^n$ в евклідів простір $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$ деякої вимірності $n > m$, так що $\langle\xi, \eta\rangle = (\iota_*\xi, \iota_*\eta)$ для довільних $\xi, \eta \in T_x\mathcal{M}$. Тут $(\cdot,\cdot)$ — стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, ι_* — похідна відображення вкладення ι. Тоді, як і в [11], можемо інтерпретувати натуральну лагранжеву систему на $\mathcal{M}$ як натуральну лагранжеву систему в $\mathbb{E}^n$ з голономною в'яззю у вигляді підмноговиду $\iota(\mathcal{M})$.

Позначимо через $D_\omega f(\varphi) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\varphi + t\omega)$ похідну за напрямом ω функції $f(\cdot) : \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^n$ і через $\nabla W(\varphi, x)$ градієнт функції $W(\varphi, \cdot) : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ у точці x для фіксованого $\varphi \in \mathbb{T}^k$.

Твердження 1. *Функція $t \mapsto x(t) := u(t\omega)$ класу $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, де $u(\cdot) \in \mathrm{C}\big(\mathbb{T}^k \mapsto \mathcal{M}\big)$ і $D^2_\omega u(\cdot) \in \mathrm{C}\big(\mathbb{T}^k \mapsto \mathcal{M}\big)$, є класичним квазіперіодичним розв'язком лагранжевої системи на $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ з лагранжіаном (1) тоді й лише тоді, коли для будь-якого відображення $h(\cdot) \in \mathrm{C}\big(\mathbb{T}^k; T\mathcal{M}\big)$ такого, що $D_\omega \iota_* h(\cdot) \in \mathrm{C}\big(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^n\big)$ і $h(\varphi) \in T_{u(\varphi)}\mathcal{M}$ при кожному $\varphi \in \mathbb{T}^k$, функція $u(\cdot)$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^k} \left[(D_\omega \iota \circ u(\varphi), D_\omega \iota_* h(\varphi)) + (\iota_* \nabla W(\varphi, u(\varphi)), \iota_* h(\varphi))\right] d\varphi = 0, \tag{5}$$

де $d\varphi := d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_k$ — диференціальна форма об'єму на торі $\mathbb{T}^k$.

Доведення. За означенням класичного розв'язку маємо

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) = \nabla W(t\omega, x(t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Якщо для кожної точки $x \in \mathcal{M}$ визначити оператор ортогонального проектування

$$P_x : T_{\iota(x)}\mathbb{E}^n \mapsto \iota_* T_x \mathcal{M},$$

то за відомою властивістю зв'язності Леві – Чивіти [13, с. 105] для будь-якого гладкого поля дотичних векторів $\xi(t)$ уздовж $x(t)$ маємо

$$\iota_* \nabla_{\dot{x}(t)} \xi(t) = P_{x(t)} \frac{d}{dt} \iota_* \xi(t). \tag{7}$$

Тоді, з урахуванням раціональної незалежності компонент вектора частот, рівність (6) виливається в ланцюжок еквівалентних співвідношень

$$P_{x(t)} \frac{d}{dt} \iota_* \dot{x}(t) = \iota_* \nabla W(t\omega, x(t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow$$

$$P_{u(\varphi)} D^2_\omega \iota \circ u(\varphi) = \iota_* \nabla W(\varphi, u(\varphi)) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{T}^k \qquad \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^k} \big(D^2_\omega \iota \circ u(\varphi), P_{u(\varphi)} v(\varphi)\big)\, d\varphi = \int\limits_{\mathbb{T}^k} \big(\iota_* \nabla W(\varphi, u(\varphi)), P_{u(\varphi)} v(\varphi)\big)\, d\varphi$$

$$\forall v(\cdot) \in \mathrm{C}\Big(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^n\Big) : \ D_\omega v(\cdot) \in \mathrm{C}\Big(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^n\Big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^k} \big(D^2_\omega \iota \circ u(\varphi), \iota_* h(\varphi)\big)\, d\varphi = \int\limits_{\mathbb{T}^k} (\iota_* \nabla W(\varphi, u(\varphi)), \iota_* h(\varphi))\, d\varphi \tag{8}$$

$$\forall h(\cdot) \in \mathrm{C}\Big(\mathbb{T}^k; T\mathcal{M}\Big) : \ D_\omega \iota_* h(\cdot) \in \mathrm{C}\Big(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^n\Big), \qquad h(\varphi) \in T_{u(\varphi)}\mathcal{M} \qquad \forall \varphi \in \mathbb{T}^k.$$

Інтегруючи частинами лівий бік рівності (8), завершуємо доведення твердження.

Тепер, спираючись на твердження 1, введемо поняття слабкого квазіперіодичного розв'язку системи з лагранжіаном (1) на рімановому многовиді $\mathcal{M}$. Перш ніж сформулювати відповідне означення нагадаємо означення низки функціональних просторів і пов'язаних із ними об'єктів.

Позначимо через $\mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ простір $\mathbb{E}^n$-значних функцій на торі $\mathbb{T}^k$, інтегровних за Лебегом з квадратом стандартної евклідової норми $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ в $\mathbb{E}^n$ (зауважимо, що з урахуванням ізометричності вкладення ι норми векторів $\xi \in T_x\mathcal{M}$ і $\iota_*\xi \in T_{\iota(x)}\mathbb{E}^n \sim \mathbb{E}^n$ у відповідних просторах рівні, тому ми використовуємо для позначення цих норм єдиний символ). Для елементів простору $\mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ визначено скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_0 := (2\pi)^{-k}\int_{\mathbb{T}^k}(\cdot,\cdot)d\varphi$ та напівнорму $\|\cdot\|_0 = \sqrt{(\cdot,\cdot)_0^2}$. Через $\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ позначимо простір функцій $f(\cdot) \in \mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$, кожна з яких має слабку (узагальнену) в сенсі Соболєва похідну $D_\omega f(\cdot) \in \mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ за напрямом ω, тобто $(f(\cdot), D_\omega g(\cdot))_0 = -(D_\omega f(\cdot), g(\cdot))_0$ для довільної неперервно диференційовної функції $g(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^n$. У просторі $\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ природним чином визначено скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_1 := (\cdot,\cdot)_0 + (D_\omega\cdot, D_\omega\cdot)_0$ та породжену ним напівнорму $\|\cdot\|_1$. Після ототожнення елементів, рівних майже скрізь, обидва простори $\left(\mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n), (\cdot,\cdot)_0\right)$, $\left(\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n), (\cdot,\cdot)_1\right)$ перетворюються на гільбертові простори (див., наприклад, [12, 15]).

Далі, для довільної обмеженої множини $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ позначимо через $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ простір гладких функцій $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathcal{A}$.

Означення 1. *Скажемо, що функція $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathcal{M}$ належить класу $\mathcal{H}^1_\mathcal{A}$, якщо $\iota\circ u(\cdot)$ є сильною границею в $\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ деякої послідовності $\{\iota\circ u_j(\cdot)\}$, де $u_j(\cdot) \in \mathcal{S}_\mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots$.*

Зауважимо, що для компактної множини $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}$ існують додатні сталі c та C такі, що

$$c\,\|\iota(x_1) - \iota(x_2)\| \le \rho(x_1, x_2) \le C\,\|\iota(x_1) - \iota(x_2)\| \qquad \forall x_1, x_2 \in \bar{\mathcal{A}},$$

а оскільки збіжна у $\mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ послідовність містить підпослідовність, збіжну майже скрізь на $\mathbb{T}^k$, то без обмеження загальності можна вважати, що функції класу $\mathcal{H}^1_\mathcal{A}$ набувають значень у $\bar{\mathcal{A}}$.

Означення 2. *Скажемо, що відображення $h(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto T\mathcal{M}$ є векторним полем уздовж відображення $u(\cdot) \in \mathcal{H}^1_\mathcal{A}$, визначеного послідовністю $\{u_j(\cdot) \in \mathcal{S}_\mathcal{A}\}$, якщо $\iota_* h(\cdot)$ є сильною границею в $\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T};\mathbb{E}^n)$ послідовності $\{\iota_* h_j(\cdot)\}$, де $\{h_j(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto T\mathcal{M}\}$ — послідовність гладких відображень таких, що*

$$h_j(\varphi) \in T_{u_j(\varphi)}\mathcal{M} \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{j\in\mathbb{N},\varphi\in\mathbb{T}^k} \|h_j(\varphi)\| < \infty.$$

За відомою теоремою Ріса – Фішера формальна сума $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} f_\mathbf{n} e^{\mathrm{i}(\mathbf{n},\varphi)}$ є рядом Фур'є функції $f(\cdot) \in \mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} \|f_\mathbf{n}\|^2$. З іншого боку, за теоремою Фішера – Ріса – Безіковича [16, с. 110] формальній сумі $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^k} f_\mathbf{n} e^{\mathrm{i}(\mathbf{n},\omega)t}$ можна поставити у відповідність (неоднозначно) функцію $t \mapsto \mathfrak{f}(t)$ класу $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$, яка має зазначену формальну суму своїм рядом Фур'є і представляє елемент простору квазіперіодичних за Безіковичем функцій $\mathrm{B}^2(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$. З огляду на вигляд обох зазначених рядів Фур'є загальновживаним є запис $\mathfrak{f}(t) = f(t\omega)$ для квазіперіодичної функції $\mathfrak{f}(\cdot)$, асоційованої з функцією на торі $f(\cdot)$. При цьому, однак, слід мати на увазі такі обставини. По-перше, у процесі доведення теореми Фішера – Ріса – Безіковича побудова функції Безіковича за її рядом Фур'є здійснюється безвідносно до звуження на лінію $\{\varphi = t\omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ конкретної асоційованої функції з $\mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$, і, крім того, будь-які дві функції з $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$, що представляють елемент простору $\mathrm{B}^2(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$ (тобто мають спільний ряд Фур'є), можуть відрізнятися на функцію, скрізь не рівну нулю. По-друге, якщо довільно взяти функцію $f(\cdot)\in \mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$, то можна лише стверджувати, що функція $t\mapsto f(\varphi+t\omega)$ буде належати $\mathrm{B}^2(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$ для майже кожної точки $\varphi\in\mathbb{T}^k$, однак апріорі невідомо, чи буде це вірно для $\varphi=0$. Тому для того, щоб надати неформального змісту рівності $\mathfrak{f}(t)=f(t\omega)$, навпаки, вважають, що, вже маючи функцію $\mathfrak{f}(\cdot)\in \mathrm{B}^2(\mathbb{R};\mathbb{E}^n)$, асоційовану функцію $f(\cdot)\in \mathrm{H}(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$ перевизначають у разі потреби на лінії $\{\varphi=t\omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ (яка має нульову лебегову міру) так, щоб зазначена рівність дійсно виконувалася [15] (п. 1.5).

Нехай тепер $f(\cdot)=\iota\circ u(\cdot)$, де $u(\cdot)\in\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$. Для цієї функції можна вказати асоційовану квазіперіодичну функцію Безіковича зі значеннями в $\mathbb{E}^n$. Однак з огляду на зазначені вище обставини потребує роз'яснень таке питання: чи існує асоційована з $\iota\circ u(\cdot)$ квазіперіодична функція Безіковича, яка набуває значень у $\iota(\bar{\mathcal{A}})$? Тобто, чи визначена для функції $u(\cdot)\in\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$ асоційована квазіперіодична функція Безіковича зі значеннями у $\bar{\mathcal{A}}$? Відповідь на поставлене питання є ствердною.

Справді, позначимо через $\mathfrak{M}^2(\mathbb{R};\bar{\mathcal{A}})$ простір Марцинкевича [17], утворений функціями $x(\cdot):\mathbb{R}\mapsto\bar{\mathcal{A}}$ такими, що $\rho(x(\cdot),x_0)\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ для деякого фіксованого $x_0\in\bar{\mathcal{A}}$ і

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\rho^2(x(t),x_0)dt<\infty.$$

Якщо для довільної пари функцій $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)\in\mathfrak{M}^2(\mathbb{R};\bar{\mathcal{A}})$ покласти

$$d(x_1(\cdot),x_2(\cdot)):=\left[\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\rho^2(x_1(t),x_2(t))dt\right]^{1/2}$$

і задати у $\mathfrak{M}^2(\mathbb{R};\bar{\mathcal{A}})$ відношення еквівалентності

$$x_1(\cdot)\sim x_2(\cdot)\quad\Leftrightarrow\quad d(x_1(\cdot),x_2(\cdot))=0,$$

то дістанемо повний метричний простір $\big(\mathfrak{M}^2(\mathbb{R};\bar{\mathcal{A}})/\sim;d(\cdot,\cdot)\big)$ [17–19]. Якщо тепер $\{u_j(\cdot)\in\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\}$ – послідовність, яка визначає функцію $u(\cdot)\in\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$, і $x_j(t):=u_j(t\omega)$, то з урахуванням нерівності

$$c\,\|\iota\circ u_i(\cdot)-\iota\circ u_j(\cdot)\|_0^2\le d^2(x_i(\cdot),x_j(\cdot))\le C\,\|\iota\circ u_i(\cdot)-\iota\circ u_j(\cdot)\|_0^2$$

послідовність квазіперіодичних функцій $\{x_j(\cdot)\}$ буде фундаментальною у зазначеному метричному просторі, а отже, збіжною до функції $x_*(\cdot)\in\mathfrak{M}^2(\mathbb{R};\bar{\mathcal{A}})$. Остання і є квазіперіодичною функцією Безіковича зі значеннями в $\bar{\mathcal{A}}$, асоційованою з $u(\cdot)\in\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$. Оскільки

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\|\iota\circ x_*(t)-\iota\circ x_j(t)\|^2\,dt=0,$$

то $\iota\circ x_*(\cdot)$ є квазіперіодичною функцією Безіковича, асоційованою з функцією $\iota\circ u(\cdot)\in$ $\in\mathrm{H}^1_\omega(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^n)$.

Зауважимо, що для кожної функції $\mathfrak{f}(\cdot) \in \mathrm{B}^2(\mathbb{R}; \mathbb{E}^n)$ справджується рівність

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\mathfrak{f}(t)\|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\mathfrak{f}(t)\|^2\, dt.$$

Оскільки послідовність $\{\iota \circ u_j(\cdot)\}$ збігається за нормою $\|\cdot\|_1$ і

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t)\|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\iota_*\dot{x}_i(t) - \iota_*\dot{x}_j(t)\|^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{T}^k} \|D_\omega \iota \circ u_i(\varphi) - D_\omega \iota \circ u_j(\varphi)\|^2\, d\varphi,$$

то послідовність $\{x_j(t)\}$ збігається за псевдометрикою $d_1(\cdot,\cdot)$ (4).

Тепер з огляду на твердження 1 сформулюємо таке означення.

Означення 3. *Квазіперіодичну функцію Безіковича $t \mapsto u(t\omega)$, асоційовану з функцією $u(\cdot) \in \mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$, де $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ — деяка обмежена множина, назвемо слабким квазіперіодичним розв'язком лагранжевої системи на $\mathcal{M}$ з лагранжіаном* (1), *якщо*

$$\left(D_\omega \iota \circ u(\cdot), D_\omega \iota_* h(\cdot)\right)_0 + \left(\iota_* \nabla W(\cdot, u(\cdot)), \iota_* h(\cdot)\right)_0 = 0 \tag{9}$$

для кожного векторного поля $h(\cdot)$ вздовж $u(\cdot)$.

Функцію $u(\cdot)$, яка фігурує в цьому означенні, можна інтерпретувати як екстремаль функціонала

$$J[u(\cdot)] := \int_{\mathbb{T}^k} \left[\frac{1}{2} \|D_\omega \iota \circ u(\varphi)\|^2 + W(\varphi, u(\varphi))\right] d\varphi$$

на множині $\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$, а відповідний слабкий розв'язок $t \mapsto u(t\omega)$ — як екстремаль функціонала $\mathcal{L}$ (3) на множині квазіперіодичних функцій Безіковича, асоційованих з функціями класу $\mathcal{H}^1_{\mathcal{A}}$.

Сформулюємо й доведемо теорему існування слабкого квазіперіодичного розв'язку.

Теорема 1. *Нехай на многовиді $\mathcal{M}$ існує обмежена гладка функція $V(\cdot)\colon \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, яка задовольняє умови $У_1$, $У_2$, а також нерівності*

$$\lambda_W(\varphi, x) + \frac{1}{2} \langle \nabla W(\varphi, x), \nabla V(x)\rangle > 0 \qquad \forall (\varphi, x) \in \mathbb{T}^k \times \bar{\Omega},$$

$$\langle \nabla W(\varphi, x), \nabla V(x)\rangle > 0 \qquad \forall (\varphi, x) \in \mathbb{T}^k \times \partial\Omega,$$

де $\lambda_W(\varphi, x) := \min\{\langle H_W(\varphi, x)\xi, \xi\rangle : \xi \in T_x\mathcal{M}, \|\xi\| = 1\}$, $H_W(\varphi, x)$ — гессіан функції $W(\varphi, \cdot)\colon \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ у точці x при $\varphi \in \mathbb{T}^k$. Тоді система з лагранжіаном (1) *має слабкий квазіперіодичний розв'язок, асоційований з функцією із класу $\mathcal{H}^1_{\Omega}$.*

Доведення. Насамперед покажемо, що будь-які дві точки множини $\Omega := V^{-1}((-\infty, v))$ можна з'єднати геодезичним сегментом конформно еквівалентної метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_V := e^V \langle\cdot,\cdot\rangle$, який цілком належить Ω. Позначимо через ∇^V зв'язність Леві–Чивіти ріманова многовиду $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, через $\exp_x^V(\cdot)$ експоненціальне відображення в точці x, асоційоване зі зв'язністю ∇^V. Нехай $x \in \Omega$ і, отже, $v_0 := V(x) < v$. Розглянемо відкриту множину

$$\mathcal{Z}_x = \left\{\xi \in T_x\mathcal{M}\colon\ \exp_x^V(s\xi) \in \Omega \quad \forall s \in [0,1]\right\}.$$

В [11, с. 10] на підставі відомої формули секційної кривини конформно еквівалентної метрики [13, с. 117] було зазначено, що при виконанні нерівності (2) в кожній точці області Ω секційна кривина для зв'язності ∇^V по будь-якому двовимірному напряму є недодатною. Тоді за теоремою Морса–Шенберга [13, с. 193] при кожному $\xi \in \mathcal{Z}_x$ на геодезичному сегменті $\exp_x^V(s\xi)$, $s \in [0,1]$, немає спряжених точок. Тому на множині $\mathcal{Z}_x$ відображення $\exp_x^V(\cdot)$ є локальним дифеоморфізмом і, отже, $\Xi := \exp_x^V(\mathcal{Z}_x)$ є відкритою підмножиною множини Ω.

Покажемо, що Ξ є водночас замкненою підмножиною області Ω. Нехай $\{\xi_k \in \mathcal{Z}_x\}$ — така послідовність, що послідовність $\left\{x_k = \exp_x^V(\xi_k) \in \Xi\right\}$ збігається до точки $x_* \in \Omega$. Потрібно довести існування вектора $\xi_* \in \mathcal{Z}_x$ такого, що $\exp_x^V(\xi_*) = x_*$. Множина $\bar{\mathcal{Z}}_x$ компактна, тому можна вважати, що ξ_k збігається до деякої точки $\xi_* \in \bar{\mathcal{Z}}_x$. Залишилось показати, що $\xi_* \notin \partial\mathcal{Z}_x$. Припустимо, що, навпаки, $\xi_* \in \partial\mathcal{Z}_x$. Оскільки для достатньо малого $\delta > 0$ при всіх $t \in [0,\delta]$ маємо $\exp_x^V(t\xi_*) \in \Omega$, то $t\xi_* \in \mathcal{Z}_x$ для всіх $t \in [0,\delta]$. З означення множини $\mathcal{Z}_x$ випливає, що існує $s_* \in (\delta, 1)$ таке, що $\exp_x^V(s_*\xi_*) \in \partial\Omega$, але $\exp_x^V(s\xi_*) \in \Omega$, якщо $s \in [0, s_*)$. Тут враховано, що рівність $s_* = 1$ неможлива, оскільки $x_* \in \Omega$ (якщо б $s_* = 1$, то вектор ξ_* належав би $\mathcal{Z}_x$, що суперечить нашому припущенню).

Розглянемо тепер послідовність $s_*\xi_k$. Вона збігається до $s_*\xi_*$, а тому $V \circ \exp_x^V(s_*\xi_k) \to v$, причому $V \circ \exp_x^V(s_*\xi_k) < v$. Позначимо $\hat{V}(\xi) := \exp \circ V \circ \exp_x^V(\xi)$. Тоді для всіх достатньо великих k матимемо

$$\frac{1}{2}\left(e^v + e^{v_0}\right) < \hat{V}(s_*\xi_k) < e^v. \tag{10}$$

В [11, с. 9] показано, що включення $\bar{\Omega} \subset \mathcal{D}$ гарантує існування $\sigma > 0$ такого, що

$$\frac{d^2}{ds^2}\hat{V}(s\xi_k) \geq \sigma \qquad \forall s \in [0,1] \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді кожна похідна $\dfrac{d}{ds}\hat{V}(s\xi_k)$ монотонно зростає на проміжку $[0,1]$ і до того ж

$$\frac{d}{ds}\hat{V}(s\xi_k) \geq \frac{1}{2s_*}\left(e^v - e^{v_0}\right) \quad \forall s \in [s_*, 1] \tag{11}$$

для всіх k, починаючи з достатньо великого номера k_*. Справді, в противному разі знайшлося б достатньо велике k, для якого одночасно виконувалися б нерівності (10) і

$$\frac{d}{ds}\hat{V}(s\xi_k) \leq \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_*}\hat{V}(s\xi_k) < \frac{1}{2s_*}\left(e^v - e^{v_0}\right) \quad \forall s \in [0, s_*].$$

Однак тоді

$$\hat{V}(s_*\xi_k) < e^{v_0} + \frac{1}{2s_*}\left(e^v - e^{v_0}\right)s_* = \frac{1}{2}\left(e^v + e^{v_0}\right),$$

що суперечить нерівності (10). Тепер з нерівності (11) дістаємо

$$\exp\circ V(x_k)=\hat V(\xi_k)\geq \hat V(s_*\xi_k)+\frac{1}{2s_*}\left(e^v-e^{v_0}\right)(1-s_*)\qquad \forall k\geq k_*.$$

Спрямувавши тут k до нескінченності, дістанемо

$$\exp\circ V(x_*)\geq e^v+\frac{1}{2s_*}\left(e^v-e^{v_0}\right)(1-s_*)>e^v\quad\Rightarrow\quad V(x_*)>v,$$

а це суперечить припущенню, що $x_*\in\Omega$, тобто що $V(x_*)<v$.

Отже, Ξ є відкрито-замкненою в Ω підмножиною відкритої множини Ω. Оскільки за припущенням Ω є зв'язною, то, як загальновідомо, $\Xi=\Omega$.

Таким чином, для кожної пари точок $x,y\in\Omega$ існує дотичний вектор $\zeta(x,y)\in T_x\mathcal{M}$ такий, що $\exp_x^V(\zeta(x,y))=y$. При цьому геодезичний сегмент $\bigcup_{s\in[0,1]}\exp_x^V(s\zeta(x,y))$ сполучає точки x та y і повністю належить Ω. Більше того, в [11] (твердження 3.8) показано, що відображення

$$\exp_x^V(\cdot)\colon \mathcal{Z}_x\mapsto\Omega$$

є дифеоморфізмом, а отже, точки x, y однозначно визначають як вектор $\zeta(x,y)$, так і геодезичний сегмент метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, який їх сполучає і належить Ω.

Подальше доведення спирається на твердження 3.9 – 3.11 роботи [11] і повністю повторює міркування, викладені в доведенні теореми 4.1 та в додатку зазначеної статті. На підставі цих міркувань встановлюємо таке: 1) існує гладке відображення $\chi(\cdot,\cdot,\cdot)\colon[0,1]\times\Omega\times\Omega\mapsto\Omega$ (відображення зв'язування) таке, що при фіксованих $x,y\in\Omega$ функція $\chi(\cdot,x,y)\colon[0,1]\mapsto\Omega$ є розв'язком рівняння

$$\nabla_{x'}x'=\frac{\|x'\|^2}{2}\nabla V(x)\quad\left(x':=\frac{dx}{ds}\right),\tag{12}$$

задовольняє крайові умови $\chi(0,x,y)=x$, $\chi(1,x,y)=y$ і знайдеться додатне число $\varkappa>0$ таке, що для будь-якої пари гладких функцій $x_i(\cdot)\colon\mathbb{R}\mapsto\Omega$, $i=1,2$, і при кожному $\varphi\in\mathbb{T}^k$ виконується умова опуклості лагранжіана (14)

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}L\left(\varphi+t\omega,\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right),\frac{\partial}{\partial t}\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right)\right)\geq$$

$$\geq\varkappa\left[\|\nabla_\xi\eta\|^2+\|\xi\|^2\left(\|\eta\|^2+1\right)\right],\tag{13}$$

де

$$\eta:=\eta(s,t):=\frac{\partial}{\partial t}\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right),\quad \xi:=\xi(s,t):=\frac{\partial}{\partial s}\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right)$$

— векторні поля вздовж відображення $(s,t)\mapsto\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right)$; 2) як наслідок, для довільних $u_1(\cdot),u_2(\cdot)\in\mathcal{S}_\Omega$ функція

$$s\mapsto J[\chi(s,u_1(\cdot),u_2(\cdot))]$$

строго опукла донизу на відрізку $[0,1]$; 3) мінімізаційна послідовність $\{u_j(\cdot)\in\mathcal{S}_\Omega\}$ для $J\big|_{\mathcal{S}_\Omega}$ збігається до функції $u(\cdot)\in\mathcal{H}^1_\Omega$ в тому сенсі, що

$$\lim_{j\to\infty} \|\iota \circ u_j(\cdot) - \iota \circ u(\cdot)\|_1 = 0,$$

причому для достатньо малого $\delta > 0$ справджується рівність $\inf\{J[\mathcal{S}_{\Omega+\delta}]\} = J[u(\cdot)]$; 4) функція $u(\cdot)$ задовольняє рівність $J'[u_*(\cdot)]h(\cdot) = 0$, еквівалентну (9), для довільного векторного поля $h(\cdot)$ вздовж $u(\cdot)$. Це означає, що $t \mapsto u(t\omega)$ — слабкий квазіперіодичний розв'язок системи з лагранжіаном (1).

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Оскільки згідно з умовами теореми 1 функції $V(\cdot)$ та $W(\cdot,\cdot)$ мають задовольняти строгі нерівності, то отриманий результат залишатиметься справедливим і для області $\Omega' = V^{-1}(-\infty, v') \subset \Omega$ з довільним $v' < v$, достатньо близьким до v. Тоді $u(\cdot) \in \mathcal{H}^1_{\Omega'}$.

3. Теорема існування класичного квазіперіодичного розв'язку. Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови теореми* 1 *і функція* $u(\cdot) \in \mathcal{H}^1_\Omega$ *визначає слабкий квазіперіодичний розв'язок системи з лагранжіаном* (1). *Тоді* $u(\cdot) \in \mathrm{C}\big(\mathbb{T}^k;\Omega\big)$ *і функція* $x(t) := := u(t\omega)$ *є класичним рівномірно квазіперіодичним розв'язком цієї системи.*

Доведення теореми спирається на твердження 2 – 4, які наведено нижче.

Насамперед скористаємося технікою, запропонованою в [4], і доведемо таке твердження.

Твердження 2. *Нехай справджуються умови теореми* 1 *і функція* $u(\cdot) \in \mathcal{H}^1_\Omega$ *визначає слабкий квазіперіодичний розв'язок системи з лагранжіаном* (1). *Тоді для майже всіх* $\varphi \in \mathbb{T}^k$ *функція* $t \mapsto u(\varphi + t\omega)$ *є класичним квазіперіодичним за Безіковичем розв'язком системи з лагранжіаном*

$$L(\varphi + t\omega, x, \dot{x}) := \mathrm{K}(\dot{x}) + W(\varphi + t\omega, x). \tag{14}$$

Цей розв'язок набуває значень у деякому компакті $\mathcal{K} \subset \Omega$.

Доведення. На підставі міркувань, наведених у доведенні теореми 1, можна дійти висновку, що множина Ω дифеоморфна деякій області $\mathcal{U}$ евклідового простору $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, (\cdot,\cdot))$ — карті множини Ω. Отже, з урахуванням зауваження 1 вважатимемо, що функція $u(\cdot)$, існування якої встановлено в зазначеній теоремі, належить класу $\mathrm{H}^1_\omega\left(\mathbb{T}^k;\mathbb{E}^m\right)$ і набуває значень у компактній підмножині $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, а відображення вкладення ι діє з $\mathcal{U}$ у $\mathbb{E}^n$. Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ індукує в $\mathcal{U}$ тензорне поле $g(x)$ і відповідну метрику $(g(x)\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Оскільки для довільного гладкого поля дотичних векторів $\xi(t)$ уздовж гладкої кривої $x(t)$ з урахуванням (7) справджуються рівності

$$\left(\frac{d}{dt}\iota x(t), \frac{d}{dt}\iota_*\xi(t)\right) = \left(\iota_*\dot{x}(t), \frac{d}{dt}\iota_*\xi(t)\right) = \left(\iota_*\dot{x}(t), P_{x(t)}\frac{d}{dt}\iota_*\xi(t)\right) = \big(\iota_*\dot{x}(t), \iota_*\nabla_{\dot{x}(t)}\xi(t)\big)$$

і в локальних координатах області $\mathcal{U}$

$$\nabla_{\dot{x}(t)}\xi(t) = \dot{\xi}(t) + \Gamma_{x(t)}\left(\dot{x}(t), \xi(t)\right),$$

де білінійне відображення $\Gamma_x : \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^m \mapsto \mathbb{E}^m$ гладко залежить від $x \in \mathcal{U}$ і виражається через символи Крістоффеля, то для послідовності $\{u_j(\cdot)\}$, яка визначає функцію $u(\cdot)$, і послідовності $\{h_j(\cdot)\}$, яка згідно з означенням 2 визначає векторне поле $h(\cdot)$ вздовж $u(\cdot)$, маємо

$$(D_\omega\iota \circ u_j(\varphi), D_\omega\iota_* h_j(\varphi)) = \Big(\iota_* D_\omega u_j(\varphi), \iota_*\nabla_{D_\omega u_j(\varphi)} h_j(\varphi)\Big) =$$

$$= \Big(g\left(u_j(\varphi)\right) D_\omega u_j(\varphi), \nabla_{D_\omega u_j(\varphi)} h_j(\varphi)\Big) =$$

$$= \Big(g\left(u_j(\varphi)\right) D_\omega u_j(\varphi), D_\omega h_j(\varphi) + \Gamma_{u_j(\varphi)}\left(D_\omega u_j(\varphi), h_j(\varphi)\right)\Big).$$

Розглянемо частинний випадок, коли послідовність $\{h_j(\cdot)\}$ визначається єдиним гладким відображенням $h(\cdot)\colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^m$, тобто вектор $h_j(\varphi)$ має початок у точці $u_j(\varphi)$ і кінець у точці $u_j(\varphi) + h(\varphi)$. Враховуючи, що $\{u_j(\cdot)\}$ рівномірно обмежена і збігається в $\mathrm{H}^1_\omega\big(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^m\big)$, а $\nabla W(\varphi, x) = g^{-1}(x) W'_x(\varphi, x)$, властивість (5) функції $u(\cdot)$ можна записати у вигляді

$$\int\limits_{\mathbb{T}^k} \big[\big(g(u(\varphi)) D_\omega u(\varphi), D_\omega h(\varphi) + \Gamma_{u(\varphi)}\left(D_\omega u(\varphi), h(\varphi)\right)\big) + \big(W'_x(\varphi, u(\varphi)), h(\varphi)\big)\big]\, d\varphi = 0. \qquad (15)$$

Як і в [4], виконаємо в інтегралі лівої частини заміну змінних $\varphi \to (\tau, y)$ за формулою

$$\varphi = Q(\tau, y) := \sum_{i=1}^{k-1} y_i \varepsilon_i + \tau \varepsilon_k,$$

де $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$ — ортонормований базис у $\mathbb{E}^k$, причому $\varepsilon_k := \omega / \|\omega\|$, і $y = (y_1, \ldots, y_{k-1})$. Поклавши

$$v(\tau, y) := u(Q(\tau, y)), \quad w(\tau, y) := h(Q(\tau, y)), \quad I(y) := \{\tau \in \mathbb{R}\colon Q(\tau, y) \in K\}, \quad K := [0, 2\pi]^k,$$

за теоремою Фубіні з рівності

$$\int\limits_{K} \big[\big(g(u(\varphi)) D_\omega u(\varphi), D_\omega h(\varphi) + \Gamma_{u(\varphi)}\left(D_\omega u(\varphi), h(\varphi)\right)\big) + \big(W'_x(\varphi, u(\varphi)), h(\varphi)\big)\big]\, d\varphi = 0 \qquad (16)$$

дістанемо

$$\int\limits_{Y}\int\limits_{I(y)} \Big[\Big(\|\omega\|^2 g(v(\tau, y)) v'_\tau(\tau, u), \dot{w}(\tau, y) + \Gamma_{v(\tau, y)}\left(v'_\tau(\tau, y), w(\tau, y)\right)\Big)\Big]\, d\tau dy +$$

$$+ \int\limits_{Y}\int\limits_{I(y)} \big(W'_x(Q(\tau, y), v(\tau, y)), w(\tau, y)\big)\, d\tau dy = 0, \qquad (17)$$

де $v'_\tau(\tau, u)$ — узагальнена за Соболєвим, а $\dot{w}(\tau, y) = \partial w(\tau, y)/\partial \tau$ — класична частинні похідні за змінною τ. Оскільки $u(\varphi) \in \mathrm{H}^1_\omega\left(\mathbb{T}^k; \mathbb{E}^m\right)$, то

$$\int\limits_{Y}\int\limits_{I(y)} \|v(\tau, y)\|^2 + \left\|v'_\tau(\tau, y)\right\|^2 d\tau dy < \infty.$$

Якщо тепер позначити через Y ортогональну проекцію k-вимірного куба $K := [0, 2\pi]^k$ на гіперплощину з базисом $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k-1}$, то з теореми Фубіні та теореми 6 з [20, с. 399] випливають такі факти: існує множина $Y' \subset Y$ така, що $\operatorname{mes} Y' = \operatorname{mes} Y$ і для кожного $y \in Y'$ функція $v(\cdot, y)\colon I(y) \mapsto \mathcal{C}$ є абсолютно неперервною на відрізку $I(y)$, майже скрізь на $I(y)$ має класичну похідну $\dot{v}(\tau, y) = v'_\tau(\tau, y)$, задовольняє умову

$$\int\limits_{I(y)} \|v(\tau,y)\|^2 + \left\|v'_\tau(\tau,y)\right\|^2 d\tau < \infty \qquad \forall y \in Y'$$

і, як наслідок, належить простору Соболєва $\mathrm{H}^1(I(y);\mathbb{E}^m)$.

Увівши „імпульс”

$$p(\tau,y) = g(v(\tau,y))\dot{v}(\tau,u),$$

рівність (17) запишемо у вигляді

$$\int\limits_{Y}\int\limits_{I(y)} (p(\tau,y),\dot{w}(\tau,y))\, d\tau dy =$$

$$= -\int\limits_{Y}\int\limits_{I(y)} \Big(G_{v(\tau,y)}(\dot{v}(\tau,y),\dot{v}(\tau,y)) + \|\omega\|^{-2}\, W'_x(Q(\tau,y),v(\tau,y)),w(\tau,y)\Big)\, d\tau dy, \qquad (18)$$

де сім’я білінійних відображень $G_x(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{E}^m\times\mathbb{E}^m \mapsto \mathbb{E}^m$, гладко залежна від $x\in\mathcal{U}$, визначається рівністю

$$(g(x)a,\Gamma_x(b,c)) = (G_x(a,b),c) \quad \forall a,b,c\in\mathbb{E}^m.$$

Оскільки рівність (18) виконується для будь-якої функції $w(\tau,y)$ з простору $\mathrm{C}_0^\infty\left(Q^{-1}(K);\mathbb{E}^m\right)$, утвореного гладкими функціями з носіями у внутрішності множини $Q^{-1}(K)=\bigcup_{y\in Y} I(y)$, то зазначена рівність означає, що функція $p(\tau,y)$ має узагальнену в сенсі Соболєва інтегровну в $Q^{-1}(K)$ похідну

$$p'_\tau(\tau,y) = G_{v(\tau,y)}(\dot{v}(\tau,y),\dot{v}(\tau,y)) + \|\omega\|^{-2}\, W'_x(Q(\tau,y),v(\tau,y)). \qquad (19)$$

Знову скориставшись результатами [20, с. 399], дійдемо висновку, що існує множина $Y''\subset Y'$ така, що $\operatorname{mes} Y'' = \operatorname{mes} Y'$ і для кожного $y\in Y''$ на відрізку $I(y)$ справджується рівність

$$p(\tau,y) = p(\tau_0,y) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \Big[G_{v(s,y)}(\dot{v}(s,y),\dot{v}(s,y)) + \|\omega\|^{-2}\, W'_x(Q(s,y),v(s,y))\Big]\, ds, \qquad (20)$$

де $\tau_0\in I(y)$ — фіксована точка. Отже, при кожному $y\in Y''$ функції $\tau\mapsto p(\tau,y)$ та $\tau\mapsto$ $\mapsto \dot{v}(\tau,y) = p(\tau,y)/g(v(\tau,y))$ є абсолютно неперервними на відрізку $I(y)$ і кожна з них майже скрізь на $I(y)$ має звичайну частинну похідну щодо τ. Тоді функція $\tau\mapsto v(\tau,y)$ є неперервно диференційовною, а з (20) випливає, що й функція $\tau\mapsto p(\tau,y)$ неперервно диференційовна. Зрозуміло, що тоді $\tau\mapsto\dot{v}(\tau,y)$ є неперервно диференційовною. Таким чином, для майже всіх $y\in Y$ функція $\tau\mapsto v(\tau,y)$ двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівність (19) скрізь на $I(y)$. Визначаючи з цієї рівності функцію $\ddot{v}(\cdot,\cdot)$ змінних τ, y, бачимо, що вона інтегровна на $Q^{-1}(K)$.

Нарешті покажемо, що для майже всіх $y\in Y$ функції $\tau\mapsto v(\tau,y)$ та $\tau\mapsto p(\tau,y)$ мають описані вище властивості не лише на $I(y)$, але й на будь-якому відрізку прямої $\mathbb{R}$. Запишемо простір $\mathbb{E}^k$ у вигляді об’єднання кубів: $\mathbb{E}^k = \bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k}(K+2\pi\mathbf{m})$. Тоді $\mathbb{R}=\bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}} I_{\mathbf{m}}(y)$, де

$$I_0(y) := I(y), \qquad I_{\mathbf{m}}(y) := \{\tau \in \mathbb{R} \colon Q(\tau, y) \in K + 2\pi\mathbf{m}\}.$$

Серед усіх $I_{\mathbf{m}}(y)$ є й множини нульової міри, зокрема, порожні. Покладемо

$$Y_{\mathbf{m}} := \{y \in Y : \operatorname{mes} I_{\mathbf{m}}(y) > 0\}, \quad \mathbb{M} := \left\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k : Y_{\mathbf{m}} \neq \varnothing\right\}.$$

Зрозуміло, що для фіксованого $\mathbf{m}$ множина $Y_{\mathbf{m}}$ складається лише з тих $y \in Y$, для яких пряма $L(y)$, задана в $\mathbb{E}^k$ рівнянням $\varphi = Q(\tau, y),\ \tau \in \mathbb{R}$, перетинає куб $K + 2\pi\mathbf{m}$ по відрізку, що не зводиться до одноточкової множини, а $\mathbb{M}$ містить лише ті цілочислові вектори $\mathbf{m}$, для яких відповідний куб $K + 2\pi\mathbf{m}$ перетинається хоча б з однією прямою $L(y),\ y \in Y$, по відрізку, зокрема в точці. Неважко зрозуміти, що з огляду на раціональну незалежність компонент вектора частот ω будь-яка непорожня множина $Y_{\mathbf{m}}$ є відкритою, до того ж $\operatorname{mes}(Y \setminus Y_{\mathbf{0}}) = 0$.

Ввівши ортопроектори

$$\operatorname{pr}_Y(a) := \sum_{i=1}^{k-1} (a, \varepsilon_i)\varepsilon_i, \qquad \operatorname{pr}_T(a) := (a, \varepsilon_k)\varepsilon_k \qquad \forall a \in \mathbb{E}^k,$$

для довільної функції $F \colon \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^m$ дістанемо[1]

$$f(\tau, y) := F(Q(\tau, y)) = F(Q(\tau, y) - 2\pi\mathbf{m}) = F\left(Q(\tau - \operatorname{pr}_T(2\pi\mathbf{m}), y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m}))\right) =$$

$$= f\left(\tau - \operatorname{pr}_T(2\pi\mathbf{m}), y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right).$$

Тоді для кожного $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ і кожного $y \in Y_{\mathbf{m}}$ маємо

$$y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m}) \in Y_{\mathbf{0}}, \quad I_{\mathbf{m}}(y) - \operatorname{pr}_T(2\pi\mathbf{m}) = I\left(y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right). \tag{21}$$

Таким чином, для кожного $y \in Y_{\mathbf{m}}$ властивості функції $\tau \mapsto f(\tau, y)$ на відрізку $I_{\mathbf{m}}(y)$ цілком визначаються властивостями функції $\tau \mapsto f\left(\tau, y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right)$ на відрізку $I\left(y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right)$ прямої $L\left(y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right)$, розташованому в кубі K.

Введемо позначення Y_* для множини тих $y \in Y$, для яких функція

$$\tau \mapsto \nu(\tau, y) := \|v(\tau, y)\|^2 + \left\|v'_\tau(\tau, y)\right\|^2$$

не є локально інтегровною на $\mathbb{R}$, або, що те саме, для кожного $y \in Y_*$ знайдеться хоча б одне $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ таке, що $y \in Y_{\mathbf{m}}$ і

$$\int\limits_{I_{\mathbf{m}}(y)} \nu(\tau, y) d\tau = \int\limits_{I(y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m}))} \nu\left(\tau, y - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right) d\tau = \infty. \tag{22}$$

Тоді $Y_* \subset \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{M}} Y_{\mathbf{m}}$, а тому $Y_* = \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbb{M}} (Y_* \cap Y_{\mathbf{m}})$. Очевидно, що

$$\operatorname{mes}(Y_* \cap Y_{\mathbf{m}}) = \operatorname{mes}\left([Y_* \cap Y_{\mathbf{m}}] - \operatorname{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})\right)$$

---

[1] Ми ототожнюємо функцію на торі $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / 2\pi\mathbb{Z}^k$ з її природним підняттям у простір $\mathbb{E}^k$, який накриває цей тор.

і з огляду на (21), (22) маємо $[Y_* \cap Y_{\mathbf{m}}] - \mathrm{pr}_Y(2\pi\mathbf{m}) \subset Y_* \cap Y_{\mathbf{0}}$. Оскільки для майже кожного $y \in Y$ функція $\tau \mapsto \nu(\tau, y)$ є інтегровною на $I_{\mathbf{0}}(y) = I(y)$, то $\mathrm{mes}\,(Y_* \cap Y_{\mathbf{0}}) = 0$, а тому

$$\mathrm{mes}\,(Y_*) \leq \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{M}} \mathrm{mes}(Y_* \cap Y_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{M}} \mathrm{mes}\,([Y_* \cap Y_{\mathbf{m}}] - \mathrm{pr}_Y(2\pi\mathbf{m})) \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{M}} \mathrm{mes}\,(Y_* \cap Y_{\mathbf{0}}) = 0.$$

Отже, для майже всіх $y \in Y$ функція $\tau \mapsto \nu(\tau, y)$ є локально інтегровною на $\mathbb{R}$. Звідси випливає, що для майже всіх $y \in Y$ функція $\tau \mapsto v(\tau, y)$ абсолютно неперервна і має інтегровну похідну на кожному відрізку $I_{\mathbf{m}}(y)$, $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$.

Повторивши міркування, викладені вище, легко довести, що для майже всіх $y \in Y$ функція $\tau \mapsto v(\tau, y)$ є двічі неперервно диференційовною на кожному відрізку $I_{\mathbf{m}}(y)$, $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$. Візьмемо тепер до уваги, що з урахуванням (15) у правій частині рівності (16) інтегрування по кубу K можна замінити інтегруванням по кубу $K + s\varepsilon_k$ з довільним $s \in \mathbb{R}$. Відповідно в рівності (17) відрізок $I(y)$ можна замінити на $I(y) + s$. Зрозуміло, що тоді функція $\tau \mapsto v(\tau, y)$ виявиться двічі неперервно диференційовною на кожному відрізку $I_{\mathbf{m}}(y) + s$, $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$, а отже, на всій дійсній осі. При цьому рівність (19) справджуватиметься для всіх дійсних τ. Поклавши у (19) $\tau = y_k + \|\omega\|\,t$, дійдемо висновку, що для кожного $y_k \in \mathbb{R}$ і майже всіх $y \in Y$ функція $t \mapsto u\left(\sum_{i=1}^{k} y_k\varepsilon_k + t\omega\right)$, $t \in \mathbb{R}$, є класичним розв'язком лагранжевої системи

$$\frac{d}{dt}\,(g(x)\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\,[(g(x)\dot{x}, \dot{x}) + W\,(\varphi + t\omega, x)]$$

з $\varphi = \sum_{i=1}^{k} y_i\varepsilon_i \in K$, тобто системи, породженої на карті $\mathcal{U}$ лагранжіаном (14). Залишилося зауважити, що ортогональне перетворення, яке точці $(y_1, \ldots, y_k) \in Q^{-1}(K)$ ставить у відповідність точку $\varphi = \sum_{i=1}^{k} y_i\varepsilon_i \in K$, зберігає міру.

Твердження 2 доведено.

Зафіксуємо точку $\varphi_0 \in \mathbb{T}^k$ так, щоб функція $t \mapsto x(t) := u(\varphi_0 + t\omega)$ була класичним розв'язком, про який йдеться у твердженні 2. Якщо метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ евклідова, тобто $g(x) \equiv \mathrm{const}$, то безпосереднім наслідком нерівності Ландау [21] є обмеженість похідної цього розв'язку на всій дійсній осі. У загальному ж випадку встановлення факту обмеженості похідної потребує іншого підходу.

Твердження 3. *Функція $\|\dot{x}(\cdot)\|$ обмежена на дійсній осі.*

Доведення. Векторне поле $\xi(t) := \dot{x}(t)$ уздовж кривої γ, заданої рівнянням $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, задовольняє тотожність

$$\nabla_{\dot{x}(t)}\xi(t) \equiv \nabla W(\varphi_0 + t\omega, x(t)).$$

Взявши коваріантну похідну $\nabla_{\dot{x}(t)}$ від обох частин, переконаємося в тому, що $\xi(\cdot)$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\nabla_{\dot{x}}^2\xi = H_W(\varphi_0 + t\omega, x(t))\xi + \left[\nabla\frac{\partial}{\partial t}W(\varphi_0 + t\omega, x)\right]_{x=x(t)}$$

і водночас системи

$$\nabla^2_{\dot{x}}\xi = H_W(\varphi_0 + t\omega, x(t))\xi - r(\|\dot{x}(t)\|)R(\dot{x}(t), \xi)\dot{x}(t) + \left[\nabla \frac{\partial}{\partial t} W(\varphi_0 + t\omega, x)\right]_{x=x(t)}, \qquad (23)$$

де R — тензор кривини зв'язності Леві–Чивіти, а $r(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ — довільна неперервна функція (достатньо зауважити, що $R(\xi,\xi) = 0$). Якщо вимагати, щоб $r(s) = O(s^{-2})$ при $|s| \to \infty$, то права частина системи (23) буде обмеженою щодо $t \in \mathbb{R}$ для кожного поля $\xi(t)$ з обмеженою нормою.

Нехай Ξ^t_s — еволюційний оператор лінійної системи $\nabla_{\dot{x}(t)}\xi = 0$, за допомогою якого виконується паралельне перенесення векторів уздовж γ. А саме, для довільного вектора $\xi_s \in T_{x(s)}\mathcal{M}$ результатом його паралельного перенесення з точки $x(s)$ у точку $x(t)$ вздовж кривої γ є вектор $\Xi^t_s\xi_s$. При паралельному перенесенні скалярний добуток пари векторів залишається сталим. Тому оператор Ξ^t_s є ортогональним відносно метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Покладемо $y_*(t) := \Xi^0_t\dot{x}(t) \equiv \Xi^0_t\xi(t)$. Оскільки

$$\nabla_{\dot{x}}\xi(t) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\Xi^t_{t+s}\xi(t+s) - \xi(t)\right] = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\Xi^t_{t+s}\Xi^{t+s}_0 y_*(t+s) - \Xi^t_0 y_*(t)\right] = \Xi^t_0\dot{y}_*(t),$$

то з урахуванням (6) маємо

$$\dot{y}_*(t) = \Xi^0_t\nabla W(\varphi_0 + t\omega, x(t)),$$

звідки, зокрема,

$$\|y_*(t)\| = O(|t|), \qquad |t| \to \infty. \qquad (24)$$

Далі, оскільки векторне поле $\xi(t)$ вздовж кривої γ задовольняє систему (23) і

$$\nabla^2_{\dot{x}}\Xi^t_0 y_*(t) = \nabla_{\dot{x}}\Xi^t_0\dot{y}_*(t) = \Xi^t_0\ddot{y}_*(t),$$

то $y_*(t)$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\ddot{y} = A(t)y + h(t), \qquad (25)$$

де

$$A(t)y := \Xi^0_t\left[H_W(\varphi_0 + t\omega, x(t))\Xi^t_0 y - r(\|\xi(t)\|)R(\xi(t), \Xi^t_0 y)\xi(t)\right],$$

$$h(t) := \Xi^0_t\left[\nabla \frac{\partial}{\partial t} W(\varphi_0 + t\omega, x)\right]_{x=x(t)}.$$

Розглянемо тепер відповідні однорідні системи

$$\nabla^2_{\dot{x}}\eta = H_W(\varphi_0 + t\omega, x(t))\eta - r(\|\xi(t)\|)R(\xi(t), \eta)\xi(t), \qquad (26)$$

$$\ddot{y} = A(t)y \qquad (27)$$

і покажемо, що при відповідному виборі функції $r(\cdot)$ вони експоненціально дихотомічні. Визначимо функцію

$$\mathcal{F}(t,\eta,\nabla_{\xi(t)}\eta) := \left\langle \nabla_{\xi(t)}\eta,\eta\right\rangle + \frac{r(\|\xi(t)\|)\,\|\eta\|^2}{2}\left\langle \nabla V(x(t)),\xi(t)\right\rangle$$

й обчислимо та оцінимо знизу її похідну внаслідок системи (26):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,\eta,\nabla_\xi\eta) = \left\langle \nabla_\xi^2\eta,\eta\right\rangle + \|\nabla_\xi\eta\|^2 + r(\|\xi\|)\left\langle \nabla_\xi\eta,\eta\right\rangle\left\langle \nabla V,\xi\right\rangle +$$

$$+\frac{r(\|\xi\|)\,\|\eta\|^2}{2}\left[\left\langle \nabla_\xi\nabla V,\xi\right\rangle + \left\langle \nabla V,\nabla_\xi\xi\right\rangle\right] + \frac{r'(\|\xi\|)\left\langle \xi,\nabla_\xi\xi\right\rangle\|\eta\|^2\left\langle \nabla V,\xi\right\rangle}{2\,\|\xi\|} =$$

$$= \left\langle H_W\eta,\eta\right\rangle - r(\|\xi\|)\left\langle R(\xi,\eta)\xi,\eta\right\rangle + \|\nabla_\xi\eta\|^2 + r(\|\xi\|)\left\langle \nabla_\xi\eta,\eta\right\rangle\left\langle \nabla V,\xi\right\rangle +$$

$$+\frac{r(\|\xi\|)\,\|\eta\|^2}{2}\left[\left\langle H_V\xi,\xi\right\rangle + \left\langle \nabla V,\nabla W\right\rangle\right] + \frac{r'(\|\xi\|)\left\langle \xi,\nabla W\right\rangle\left\langle \nabla V,\xi\right\rangle\|\eta\|^2}{2\,\|\xi\|} \geq$$

$$\geq \left\langle H_W\eta,\eta\right\rangle + \frac{r(\|\xi\|)\,\|\eta\|^2}{2}\left\langle \nabla W,\nabla V\right\rangle +$$

$$+\|\nabla_\xi\eta\|^2 - r(\|\xi\|)\,\|\xi\|\,\|\nabla_\xi\eta\|\,\|\eta\|\left|\left\langle \nabla V,\varepsilon\right\rangle\right| + \frac{r(\|\xi\|)\,\|\xi\|^2\,\|\eta\|^2}{2}\left[\left\langle H_V\varepsilon,\varepsilon\right\rangle - 2K^*\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left|r'(\|\xi\|)\right|\,\|\xi\|\left|\left\langle \nabla W,\varepsilon\right\rangle\left\langle \nabla V,\varepsilon\right\rangle\right|\,\|\eta\|^2,$$

де $\varepsilon := \xi/\|\xi\|$. Тепер покладемо

$$r(s) := \begin{cases} 1, & s\in[0,B],\\ B^2/s^2, & s>B,\end{cases}$$

де $B>1$, і позначимо $\|\nabla_\xi\eta\| = z_1$, $\|\eta\| = z_2$. Тоді на множині тих t, для яких $\|\xi(t)\|\leq B$, матимемо

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,\eta,\nabla_{\xi(t)}\eta) \geq \left[\lambda_W + \frac{1}{2}\left\langle \nabla W,\nabla V\right\rangle\right] z_2^2 +$$

$$+z_1^2 - \left|\left\langle \nabla V,\varepsilon\right\rangle\right| z_1\,\|\xi\|\,z_2 + \frac{\|\xi\|^2\,z_2^2}{2}\left[\left\langle H_V\varepsilon,\varepsilon\right\rangle - 2K^*\right].$$

Легко бачити, що виконання умов теореми 1 гарантує існування додатних чисел α_1 та α_2 таких, що

$$\lambda_W + \frac{1}{2}\left\langle \nabla W,\nabla V\right\rangle \geq \alpha_1,$$

$$z_1^2 - \left|\left\langle \nabla V,\varepsilon\right\rangle\right| z_1\,\|\xi\|\,z_2 + \left[\frac{1}{2}\left\langle H_V\varepsilon,\varepsilon\right\rangle - K^*\right]\|\xi\|^2\,z_2^2 \geq \alpha_2\left(z_1^2 + \|\xi\|^2\,z_2^2\right),$$

звідки

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,\eta,\nabla_\xi\eta) \geq \alpha_1\,\|\eta\|^2 + \alpha_2\,\|\nabla_\xi\eta\|^2,$$

якщо $\|\xi(t)\| \leq B$.

Поклавши

$$C := \max\left\{\max_{x\in\bar\Omega}\|\nabla V(x)\|\,,\ \max_{(\varphi,x)\in\mathbb{T}^k\times\bar\Omega}\|\nabla W(\varphi,x)\|\,,\ \max_{(\varphi,x)\in\mathbb{T}^k\times\bar\Omega}\|H_W(\varphi,x)\|\right\}$$

і вибравши B настільки великим, щоб $\alpha_2 B^2 \geq 1 + C(1+3C/2)$, на множині тих t, для яких $\|\xi(t)\| > B$, дістанемо

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,\eta,\nabla_\xi\eta) \geq \|\nabla_\xi\eta\|^2 - B\,|\langle\nabla V,\varepsilon\rangle|\,\|\nabla_\xi\eta\|\,\|\eta\| + \frac{B^2\,\|\eta\|^2}{2}\left[\langle H_W\varepsilon,\varepsilon\rangle - 2K^*\right] -$$

$$-\left[C+3C^2/2\right]\|\eta\|^2 \geq \alpha_2(z_1^2 + B^2 z_2^2) - \left[C+3C^2/2\right] z_2^2 \geq \alpha_2 z_1^2 + z_2^2.$$

Звідси випливає, що існує $\alpha > 0$ таке, що похідна квадратичної форми змінних y, $\dot y$

$$\mathcal{F}(t,\Xi_0^t y,\Xi_0^t\dot y) = \langle\dot y, y\rangle + \frac{r(\|\xi(t)\|)}{2}\,\langle\nabla V(x(t)),\xi(t)\rangle\,\|y\|^2$$

внаслідок системи (27) задовольняє нерівність

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t,\Xi_0^t y,\Xi_0^t\dot y) \geq \alpha\left[\left\|\Xi_0^t y\right\|^2 + \left\|\Xi_0^t\dot y\right\|^2\right] = \alpha\left[\|y\|^2 + \|\dot y\|^2\right]$$

і, отже, є додатно визначеною. Сама ж форма $\mathcal{F}(t,\Xi_0^t y,\Xi_0^t\dot y)$, очевидно, невироджена і має обмежені коефіцієнти. Відомо [22], що наявність квадратичної форми з такими властивостями гарантує експоненціальну дихотомію лінійної системи (27) на всій дійсній осі, а неоднорідна система (25) з огляду на обмеженість $\|h(t)\|$ має єдиний обмежений розв'язок. При цьому будь-який інший розв'язок цієї системи експоненціально зростає або при $t\to\infty$, або при $t\to-\infty$. Оскільки вище було встановлено оцінку (24), то розв'язок $y_*(t)$ є обмеженим на $\mathbb{R}$. Отже, функція $\|\dot x(t)\| = \left\|\Xi_0^t y_*(t)\right\| = \|y_*(t)\|$ обмежена на $\mathbb{R}$.

Твердження 3 доведено.

Твердження 4. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то для довільного* $\varphi\in\mathbb{T}^k$ *система з лагранжіаном* (14) *має не більше одного розв'язку* $x(\cdot):\mathbb{R}\mapsto\mathcal{K}$ *такого, що* $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot x(t)\| < \infty$, *де* $\mathcal{K}\subset\Omega$ — *компакт із твердження* 2.

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує пара різних розв'язків $x_i(\cdot):\mathbb{R}\mapsto\mathcal{K}$ таких, що $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot x_i(t)\| < \infty$, $i=1,2$. Скориставшись відображенням зв'язування χ, про яке йшлося в кінці п. 2, і ввівши позначення

$$\eta(s,t) := \frac{\partial}{\partial t}\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right), \qquad \xi(s,t) := \frac{\partial}{\partial s}\chi\left(s,x_1(t),x_2(t)\right),$$

визначимо функцію

$$l(t) := \langle\eta(s,t),\xi(s,t)\rangle\Big|_{s=0}^{s=1} = \langle\dot x_2(t),\xi(1,t)\rangle - \langle\dot x_1(t),\xi(0,t)\rangle\,.$$

Вона обмежена на $\mathbb{R}$, а її похідну можна записати у вигляді

$$\dot l(t) = \langle\nabla_{\dot x_2}\dot x_2(t),\xi(1,t)\rangle + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=1}\langle\dot x_2(t),\eta(s,t)\rangle -$$

$$- \langle \nabla_{\dot{x}_1} \dot{x}_1(t), \xi(0,t) \rangle - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \langle \dot{x}_1(t), \eta(s,t) \rangle =$$

$$= \langle \nabla W(\varphi + t\omega, x_2(t)), \xi(1,t) \rangle + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=1} \langle \dot{x}_2(t), \eta(s,t) \rangle -$$

$$- \langle \nabla W(\varphi + t\omega, x_1(t)), \xi(0,t) \rangle - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \langle \dot{x}_1(t), \eta(s,t) \rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} L\left(\varphi + t\omega, \chi\left(s, x_1(t), x_2(t)\right), \eta(s,t)\right) \Big|_{s=0}^{s=1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} L\left(\varphi + t\omega, \chi\left(s, x_1(t), x_2(t)\right), \eta(s,t)\right) ds.$$

З урахуванням (13) маємо

$$\dot{l}(t) \geq \varkappa \int\limits_0^1 \left[\|\nabla_\xi \eta\|^2 + \left(\|\eta\|^2 + 1 \right) \|\xi\|^2 \right] ds.$$

Таким чином, функція $l(\cdot)$ є неспадною і її обмеженість гарантує збіжність інтегралів

$$\int\limits_{-\infty}^0 \int\limits_0^1 \|\xi(s,t)\|^2 \, ds dt < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \|\xi(s,t)\|^2 \, ds dt < \infty. \tag{28}$$

Зазначимо, що $\chi'_s(0,x,y) \neq 0$ при $x \neq y$. Справді, в іншому випадку відображення $s \mapsto$ $\mapsto \chi(s,x,y)$ визначало б розв'язок рівняння (12), який задовольняє початкові умови $\chi\big|_{s=0} = x$, $\chi'_s\big|_{s=0} = 0$, а таким є лише сталий розв'язок $\chi(s,x,y) \equiv x$. Це суперечить рівності $\chi(1,s,y) = y$. З урахуванням того, що рівність $x_1(t) = x_2(t)$ може виконуватися лише на дискретній множині точок, $\xi(0,t) \not\equiv 0$. Тоді виконуються строгі нерівності

$$\limsup_{t \to -\infty} l(t) < l(0) < \liminf_{t \to \infty} l(t). \tag{29}$$

Покажемо, що друга нерівність у (28) гарантує існування послідовності $t_k^+ \to \infty$ такої, що $\max\left\{ \left\|\xi(0,t_k^+)\right\|, \left\|\xi(1,t_k^+)\right\| \right\} \to 0$. Справді, в іншому випадку знайдуться додатні числа T та σ такі, що

$$\inf_{t > T} \max\left\{ \|\xi(0,t)\|, \|\xi(1,t)\| \right\} = \sigma.$$

Оскільки з урахуванням (12) для $i = 0, 1$ маємо

$$\|\xi(s,t)\|^2 \geq \|\xi(i,t)\|^2 - \frac{|s-i|}{2} \max_{s \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial s} \|\xi(s,t)\|^2 \right| = \|\xi(i,t)\|^2 - |s-i| \max_{s \in [0,1]} |\langle \nabla_\xi \xi, \xi \rangle| \geq$$

$$\geq \|\xi(i,t)\|^2 - \frac{|s-i|}{2} \max_{[0,1] \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}} \left(\left\|\chi'_s(s,x,y)\right\|^3 \|\nabla V(\chi(s,x,y))\| \right),$$

то знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$\inf_{t>T} \max \left\{ \min_{s\in[0,\delta]} \|\xi(s,t)\|^2 , \min_{s\in[1-\delta,1]} \|\xi(s,t)\|^2 \right\} \geq \frac{\sigma^2}{2},$$

а тоді

$$\int_0^\infty \int_0^1 \|\xi(s,t)\|^2 \, dsdt \geq \int_T^\infty \left[\int_0^\delta \|\xi(s,t)\|^2 \, ds + \int_{1-\delta}^1 \|\xi(s,t)\|^2 \, ds \right] ds = \infty.$$

Отримали суперечність.

Аналогічно доводиться, що перша нерівність у (28) гарантує існування послідовності $t_k^- \to -\infty$, уздовж якої $\|\xi(0,t)\|$ та $\|\xi(1,t)\|$ одночасно прямують до нуля. Тоді, враховуючи обмеженість $\|\dot{x}_i(t)\|$ на $\mathbb{R}$, дістаємо

$$\lim_{k\to\infty} l(t_k^\pm) = 0.$$

Легко перевірити, що ця рівність суперечить (29). А саме, випадок $l(0) \geq 0$ суперечить існуванню послідовності $\left\{t_k^+\right\}$, а випадок $l(0) < 0$ — існуванню послідовності $\left\{t_k^-\right\}$.

Твердження 4 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Застосуємо теорему Амеріо (див., наприклад, [23, с. 437]). На карті $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}^m$ області $\Omega \subset \mathcal{M}$ систему з лагранжіаном $L(\varphi_0 + t\omega, x, \dot{x})$ запишемо у вигляді системи другого порядку, еквівалентної $2m$-вимірній нормальній системі першого порядку з фазовим простором $\mathcal{U} \times \mathbb{E}^m$. Оскільки компоненти вектора частот ω раціонально незалежні, то H-клас системи з лагранжіаном $L(\varphi_0 + t\omega, x, \dot{x})$ утворює сім'я систем з лагранжіанами $L(\varphi + t\omega, x, \dot{x})$, параметризована точками тора $\varphi \in \mathbb{T}^k$. З тверджень 2 – 4 випливає, що в $\mathcal{C} \times \mathbb{E}^m$ ($\mathcal{C}$ — зображення компакта $\mathcal{K}$ на карті) система з лагранжіаном $L(\varphi_0 + t\omega, x, \dot{x})$ має єдиний класичний обмежений квазіперіодичний у сенсі Безіковича розв'язок $t \mapsto u(\varphi_0 + t\omega)$ і кожна система з її H-класу має єдиний обмежений розв'язок у $\mathcal{C} \times \mathbb{E}^m$. Отже, всі умови теореми Амеріо виконано і $u(\varphi_0 + t\omega)$ є рівномірною майже періодичною функцією. З урахуванням вигляду її ряду Фур'є вона є рівномірною квазіперіодичною функцією з базисом частот ω. Тоді $u(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{T}^k; \mathcal{C}\right)$ і при кожному $\varphi \in \mathbb{T}^k$, зокрема при $\varphi = 0$, функція $t \mapsto u(\varphi + t\omega)$ є класичним квазіперіодичним розв'язком системи з лагранжіаном $L(\varphi + t\omega, x, \dot{x})$.

Теорема 3. *Припустимо, що виконано умови теореми* 2 *і* $x(\cdot) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}; \mathcal{K})$ — *квазіперіодичний розв'язок системи з лагранжіаном* $L(t\omega, x, \dot{x})$. *Тоді система у варіаціях відносно цього розв'язку є експоненціально дихотомічною на* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $t \mapsto x(t,s)$, $s \in (-\delta, \delta)$, сім'я розв'язків системи з лагранжіаном $L(t\omega, x, \dot{x})$ гладко залежна від параметра s і така, що $x(t,0) = x(t)$. Тоді $\xi(t,s) := x'_t(t,s)$, $\eta(t,s) := x'_s(t,s)$ утворюють векторні поля вздовж відображення $(t,s) \mapsto x(t,s)$ і справджується рівність — рівняння Лагранжа

$$\nabla_{\xi(t,s)} \xi(t,s) = \nabla W(t\omega + \varphi, x(t,s)).$$

Обчисливши тут коваріантну похідну $\nabla_{\eta(t,s)}$ від обох частин, взявши до уваги рівності [13, с. 111]

$$\nabla_\eta \xi = \nabla_\xi \eta, \quad \nabla_\eta \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_\eta \xi = R(\xi, \eta)\xi,$$

де R — тензор кривини зв'язності Леві–Чивіти, та поклавши $s = 0$, $\xi(t) := \xi(t,0)$, $\eta(t) :=$ $:= \eta(t,0)$, переконаємося, що поле $\eta(t)$ задовольняє систему в варіаціях відносно розв'язку $x(t)$:

$$\nabla^2_{\xi(t)}\eta = \nabla_\eta \nabla W(t\omega + \varphi, x(t)) - R(\xi(t), \eta)\xi(t). \tag{30}$$

Оскільки в даному випадку функція $t \mapsto \|\xi(t)\|$ є обмеженою, то можемо скористатися міркуваннями з доведення твердження 3 у випадку $r(s) \equiv 1$, які й доводять експоненціальну дихотомію системи (30).

Теорему 3 доведено.

4. Заключні зауваження. В даній роботі з використанням допоміжної функції $V(\cdot)$ та варіаційного методу встановлено достатні умови існування як слабкого, так і класичного гіперболічного квазіперіодичного розв'язку натуральної лагранжевої системи на рімановому многовиді. Нам вдалося показати, що зазначений класичний розв'язок є рівномірною квазіперіодичною функцією. З цього погляду теорема 2 посилює результати робіт [4, 12], автори яких обмежились лише доведенням того факту, що класичні розв'язки, породжені слабкими розв'язками певних класів систем в евклідовому просторі, є квазіперіодичними функціями Безіковича. Варто зазначити, що в [12] розглядалися квазіперіодичні системи в $\mathbb{E}^m$ достатньо загального вигляду

$$\frac{d^p q}{dt^p} = F\left(t\omega, q, \dot{q}, \ldots, \frac{d^{p-1}q}{dt^{p-1}}\right)$$

за умови обмеженості правої частини за похідними $q^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p-1$. На жаль, ця умова унеможливлює застосування отриманих у [12] результатів про класичні квазіперіодичні за Безіковичем розв'язки до лагранжевих систем на рімановому многовиді з несталим метричним тензором $g(x)$.

Застосування отриманих у цій статті результатів до конкретних механічних систем вимагає побудови допоміжної функції $V(\cdot)$. Один із способів знаходження цієї функції з використанням усередненої силової функції

$$\bar{W}(x) := \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{\mathbb{T}^k} W(\varphi, x) d\varphi$$

запропоновано в [11], де водночас продемонстровано ефективність зазначеного способу для виявлення екстремальних вимушених квазіперіодичних коливань сферичного маятника за допомогою слабких розв'язків відповідної лагранжевої системи. З огляду на теорему 2 можемо тепер стверджувати, що ці коливання описуються рівномірною квазіперіодичною функцією.

1. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians // J. Math. Anal. and Appl. – 1988. – **134**, № 2. – P. 312–321.
2. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians II // Bull. Austral. Math. Soc. – 1989. – **40**, № 3. – P. 457–463.
3. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians III // Isr. J. Math. – 1989. – **67**, № 3. – P. 337–344.
4. *Berger M. S., Zhang Luping.* A new method for large quasiperiodic nonlinear oscillations with fixed frequencies for nondissipative second order conservative systems of second type // Commun. Appl. Nonlinear Anal. – 1996. – **3**, № 1. – P. 25–49.

5. *Mawhin J.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential equations: variational vs nonvariational approach // Calculus Variat. and Different. Equat. Res. Notes Math. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. – **410**. – P. 167 – 184.
6. *Zakharin S. F., Parasyuk I. O.* Generalized and classical almost periodic solutions of Lagrangian systems // Funkc. ekvacioj. – 1999. – **42** . – P. 325 – 338.
7. *Захарін С. Ф., Парасюк І. О.* Узагальнені квазіперіодичні розв'язки лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 1999. – Вип. 3. – С. 15 – 20.
8. *Захарін С. Ф., Парасюк І. О.* Про гладкість квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 2. – С. 180 – 193.
9. *Ayachi M., Blot J.* Variational methods for almost periodic solutions of a class of neutral delay equations // Abstr. Appl. Anal. – 2008. – **2008.** – ID 153285. – 13 p.
10. *Kuang J.* Variational approach to quasi-periodic solution of nonautonomous second-order Hamiltonian systems // Abstrs Appl. Anal. – 2012. – **2012**. – ID 271616. – 14 p.
11. *Parasyuk I., Rustamova A.* Variational approach for weak quasiperiodic solutions of quasiperiodically excited Lagrangian systems on Riemannian manifolds // Electron. J. Different. Equat. – 2012. – **2012**, № 66. – P. 1 – 22.
12. *Blot J., Pennequin D.* Spaces of quasi-periodic functions and oscillations in differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **65**, № 1–3. – P. 83 – 113.
13. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, 1971. – 344 с.
14. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math. – 1956. – **63**, № 1. – P. 20 – 63.
15. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 313 p.
16. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – New York: Dover Publ., 1955. – 180 p.
17. *Marcinkiewicz J.* Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch // C. r. Acad. sci. Paris. – 1939. – **208** . – P. 157 – 159.
18. *Bohr H., Fölner E.* On some types of function spaces. A contribution to the theory of almost periodic functions // Acta Math. – 1945. – **76**. – P. 31 – 155.
19. *Данилов Л.И.* О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Изв. Ин-та математики и информатики УдГу. – 2006. – **35**, № 1. — С. 33 – 48.
20. *Никольский С. М.* Курс математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 448 с.
21. *Landau E.* Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
22. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$// Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 356 – 371.
23. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Одержано 13.11.13