УДК 517.925:62.50

С. С. Жуматов
(Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЛОКАЛЬНО КВАДРАТИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

Sufficient conditions of the absolute stability of program manifold of control systems are obtained. For the case where the Jacobi matrix is degenerate, by the reduction to the central canonical form, sufficient conditions of the absolute stability of program manifold are found.

Встановлено достатні умови абсолютної стійкості програмного многовиду систем управління. Для випадку, коли матриця Якобі є виродженою, шляхом зведення до центральної канонічної форми отримано достатні умови абсолютної стійкості програмного многовиду.

В работе Н. П. Еругина [1] построено все множество систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, сформулирована задача и дан метод ее решения. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах А. С. Галиуллина, И. А. Мухаметзянова, Р. Г. Мухарлямова и их учеников [2 – – 4] как задача построения систем дифференциальных уравнений, в которых гладкое многообразие, определяемое пересечением гиперповерхностей, является интегральным.

Рассмотрим материальную систему, имеющую $(n - s)$-мерное интегральное многообразие $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$, движения которой описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R\xi, \tag{1}$$

где B, P, R — соответственно $(n \times r)$-, $(s \times r)$- и $(r \times r)$-матрицы, x — n-мерный вектор состояния объекта, f — n-мерная вектор-функция, ω — $s \leq n$-мерный вектор, ξ — r-мерный вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям локальной квадратичной связи

$$\varphi^T\theta\left(\sigma - K^{-1}\varphi\right) > 0, \quad \theta = \operatorname{diag}\|\theta_1, \ldots, \theta_r\|, \quad K = K^T > 0. \tag{2}$$

Поскольку многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1), имеет место $\dot{\omega} = \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + Hf(t, x, u) = F(t, \omega, u)$, $H = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ — матрица Якоби, $F(t, 0, u) \equiv 0$ — некоторая s-мерная вектор-функция; при $F = (t, \omega, \xi(\omega, t))$ система называется замкнутой, $\xi = \xi(\omega, t)$ — множество законов обратной связи [5].

Заданная программа $\Omega(t)$ точно выполняется лишь при условии, когда начальные значения вектора состояния системы удовлетворяют условиям $\omega(t_0, x_0) = 0$. Но эти условия не всегда могут быть точно выполнены. Поэтому при построении систем программного движения следует иметь в виду еще и требования устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω.

Построим систему дифференциальных уравнений (1), интегральное многообразие $\Omega(t)$ которой имело бы свойство устойчивости.

Пусть $F = -A\omega$, A — гурвицева $(s \times s)$-матрица. Дифференцируя многообразие $\Omega(t)$ по времени t в силу системы (1), получаем

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R\xi. \tag{3}$$

Определение. *Программное многообразие* $\Omega(t)$ *называется абсолютно устойчивым относительно вектор-функции* ω, *если оно устойчиво в целом на решениях уравнения* (1) *при любой* $\omega(t_0, x_0)$ *и* $\varphi(\sigma)$, *удовлетворяющей условиям* (2).

Ставится задача: получить условия абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω.

Рассмотрим неавтономную систему программного многообразия

$$\dot{\omega} = F(t, \omega). \tag{4}$$

Предположим, что: а) $F(t, 0) = 0$ и $F(t, \omega)$ удовлетворяет условиям существования и единственности нулевого решения системы, б) существует некоторая неотрицательная локальная квадратичная связь S [6]

$$S = S(\omega, t) \geq 0 \wedge S(0, t) = 0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если существуют положительно определенная функция*

$$V = V(t, \omega) > 0 \tag{6}$$

и неотрицательное число α *такие*, *что*

$$M[\omega, \omega(t)] = V(t, \omega) + \alpha \int_{t_0}^{t} S[\tau, \omega(\tau)] d\tau > 0, \tag{7}$$

где $\omega(t)$ — *любое решение с условием* (5),

$$-\dot{M}\Big|_{(4)} = W(\omega(t)) > 0, \tag{8}$$

то программное многообразие $\Omega(t)$ *асимптотически устойчиво при выполнении условий* (5) *относительно вектор-функции* ω.

Доказательство. Допустим, что [7]

$$\lim_{t \to \infty} M[\omega(t)] = \alpha_0 > 0, \tag{9}$$

где α_0 — некоторое число. Докажем, что $\alpha_0 = 0$. В силу (8) имеем

$$\frac{dM}{dt} \leq -\alpha_1 \quad (\alpha_1 > 0). \tag{10}$$

Тогда для любого $t > t_0$ с учетом неравенства (10) находим

$$M[\omega(t)] = M[\omega(t_0)] + \int_{t_0}^{t} \frac{dM}{dt} d\tau \leq M[\omega(t_0)] - \alpha_0(t - t_0). \tag{11}$$

Из (11) при достаточно большом t следует, что $M[\omega(t)]$ становится отрицательной, что противоречит неравенству (9). Значит, имеет место условие

$$\lim_{t \to \infty} M[\omega(t)] = 0. \tag{12}$$

В силу предположения (5) неравенство (12) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to \infty} \|\omega(t)\| = 0. \tag{13}$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если существуют функция* $V = V(\omega) > 0$, *обладающая свойством*

$$V = V(\omega) \to \infty \quad \text{при} \quad \|\omega(t)\| \to \infty, \tag{14}$$

и неотрицательное число α *такие, что имеют место соотношения* (6) *и* (7), *то программное многообразие* $\Omega(t)$ *асимптотически устойчиво в целом при условиях* (5) *относительно вектор-функции* ω.

Теперь рассмотрим систему (3) в случае, когда управление является прямым и скалярным:

$$\dot{\omega} = -A\omega - b\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T\omega. \tag{15}$$

На основании теоремы 2 достаточные условия асимптотической устойчивости в целом программного многообразия $\Omega(t)$ можно получить при выполнении неравенств

$$\varphi(0) = 0 \vee k_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) < k_2\sigma^2, \tag{16}$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, а также неравенств (5) – (7) и условия (8) при

$$V(\omega) = \omega^T L\omega + \beta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma > 0, \tag{17}$$

где β — неотрицательное число.

Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если существуют вещественная матрица* $L = L^T > 0$ *и неотрицательные числа* α *и* β *такие, что выполняется одно из условий*

$$F = \begin{Vmatrix} 2G & g \\ g^T & \rho \end{Vmatrix} > 0, \tag{18}$$

$$2\rho G - gg^T > 0, \tag{19}$$

$$2G > 0 \wedge \rho - 2^{-1}g^TG^{-1}g > 0, \tag{20}$$

то программное многообразие $\Omega(t)$ *асимптотически устойчиво в целом относительно вектор-функции* ω *при условиях*

$$S(\omega) = \left(\sigma - k_2^{-1}\varphi(\sigma)\right)\left(\varphi(\sigma) - k_1\sigma\right) \geq 0, \tag{21}$$

где $k \geq 0$, $k_2 \leq \infty$,

$$A^T L + LA + k_1\alpha cc^T = 2G, \tag{22}$$

$$g = Lb + 2^{-1}\left\lfloor \beta A^T c - \alpha\left(1 + k_1k_2^{-1}\right)c \right\rfloor, \tag{23}$$

$$\rho = \alpha k_2^{-1} + \beta c^T b. \tag{24}$$

***Замечание* 1.** Если нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ дифференцируема и разлагается в ряд Маклорена $\varphi(\sigma) = h_0\sigma + \psi(\sigma)$, то вместо (15) получаем систему

$$\dot{\omega} = -\tilde{A}\omega - b\xi, \quad \xi = \psi(\sigma), \quad \sigma = c^T\omega. \tag{25}$$

Здесь $\tilde{A}$ зависит от h_0, b и c:

$$\tilde{A} = A + h_0bc^T,$$

а функция ψ удовлетворяет условиям

$$\psi(0) = 0 \vee \tilde{k}_1\sigma^2 < \sigma\,\psi(\sigma) < \tilde{k}_2\sigma^2 \quad \forall\sigma \neq 0, \tag{26}$$

где $\tilde{k}_1 = k_1 - h_0$, $\tilde{k}_2 = k_2 - h_0$.

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ асимптотически устойчиво в целом при условии (26), если выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \tilde{A}^T L + L\tilde{A} + \tilde{k}_1\alpha cc^T = 2G, \\ \rho = Lb + 2^{-1}\left(\beta\tilde{A}^T c - \alpha c\right), \quad \rho = \alpha\tilde{k}_2^{-1} + \beta c^T b. \end{gathered} \tag{27}$$

Используя равенства [8]

$$P^T H + HP = U = \left\| u_{ij} \right\|_1^s, \tag{28}$$

$$P = \operatorname{diag}\left\| \rho_1, \ldots, \rho_n \right\|, \qquad H = \left\| \frac{u_{ij}}{\rho_i + \rho_j} \right\|_1^s, \tag{29}$$

можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *в угле* $\left]k_1, k_2\right[$ *относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения одного из неравенств* (18) – (20), *где* $2G$, g *и* ρ *определяются так*:

$$\begin{gathered} U + \alpha cc^T = 2G, \quad \rho = \alpha k_2^{-1} + p^T d, \\ g = Ld + 2^{-1}\left[\beta Pp - \alpha\left(1 + k_1 k_2^{-1}\right)p\right], \end{gathered} \tag{30}$$

или

$$U > 0 \wedge \rho > 0, \tag{31}$$

$$Lb = 2^{-1}\left[\alpha\left(1 + k_1 k_2^{-1}\right)p - \beta Pp\right]. \tag{32}$$

Уравнение (32) есть обобщенное разрешающее уравнение Лурье [9]. Здесь условие $2G > 0$ из (23) заменено условием $U > 0$, так как $\alpha \geq 0$.

***Замечание* 2.** Для выполнения соотношений (24), (32) необходимо, чтобы выполнялись соответственно неравенства

$$\alpha\left(1 + k_1 k_2^{-1}\right)b^T c > \beta b^T A^T c, \tag{33}$$

$$\alpha\left(1 + k_1 k_2^{-1}\right)d^T p > \beta d^T A P^{-1} p, \tag{34}$$

если $L = L^T > 0$.

Теорема 5. *Для асимптотической устойчивости в целом программного многообразия* $\Omega(t)$ *при условии* (21) *относительно вектор-функции* ω *достаточно, чтобы*

$$G = Q > 0 \wedge L = L^T > 0 \wedge \alpha \geq 0, \tag{35}$$

а также либо

$$\gamma_1 \geq 0 \wedge \gamma_2 < 0 \wedge \gamma_3 \geq 0 \wedge \gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3 > 0, \tag{36}$$

либо

$$\gamma_1 \geq 0 \wedge \gamma_3 < 0, \tag{37}$$

где матрица $2Q$ *определяется формулой* (5.18) [4, *с.* 115], *а* γ_s *определяется так*:

$$\gamma_1 = (\gamma_5)^T G^{-1}\gamma_5, \qquad \gamma_5 = A^T c, \qquad \gamma_2 = \gamma_4^T G^{-1}\gamma_5 - c^T b,$$
$$\gamma_4 = Lb - \frac{\alpha}{2}\left(1 + k_1 k_2^{-1}\right)c, \qquad \gamma_3 = \gamma_4^T G^{-1}\gamma_4 - 2\alpha k_2^{-1}. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть матрица $L = L^T > 0$ определена из уравнения (22), α — заданное неотрицательное число и $2Q > 0$. Тогда из условий устойчивости (20) остается лишь последнее:

$$2\rho - g^T G^{-1} g > 0, \tag{39}$$

которое сводится к неравенству

$$\gamma_1\beta^2 + 2\gamma_2\beta + \gamma_3 < 0. \tag{40}$$

Поскольку $G > 0$, всегда имеет место неравенство $\gamma_1 > 0$, если $\gamma_s \neq 0$. Поэтому для существования неотрицательного параметра β достаточно выполнения условий (36) либо (37). Следовательно, на основании теоремы 3 верна теорема 5.

Замечание **3.** Функция вида

$$M = \omega^T L\omega + \beta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma + \alpha\int_0^t S(\omega(\delta))d\delta \tag{41}$$

отличается от функции Ляпунова типа Лурье $(\alpha = 0)$ наличием последнего слагаемого. Преимуществом условий (18) или (19), или (20) является то, что они необходимы и достаточны для положительной определенности $-\dot{M} = W$. Кроме того, из них можно также получить, как следствия, известные условия абсолютной устойчивости для различных углов при $k_1 = 0$, $k_2 = k$, $k_2 = \infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение матрицы $H(t)$ при $s = n$ имеет r нулевых корней, а многообразие $\Omega(t)$ задано в линейном виде

$$\omega(t, x) \equiv H_1(t)x = 0, \tag{42}$$

где $H_1(t) \in R^{s\times n}$ — заданная непрерывная матрица.

Нашей целью является приведение полученной системы к центральной канонической форме [10 – 12] и установление условий устойчивости программного многообразия. Выберем функцию Еругина следующим образом:

$$F(t, x, \omega) = -A_2(t)\omega. \tag{43}$$

Тогда выражение $\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + H(t)\,\dot{x} = F(t, x, \omega)$ запишется в виде

$$H(t)\dot{x} = A_2(t)\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}. \tag{44}$$

Принимая во внимание соотношение (42), имеем

$$H(t)\dot{x} = -A(t)\omega - q(t), \tag{45}$$

где

$$H(t) \in R^{s\times s}, \qquad A(t) = A_2(t)H_1(t), \qquad q(t) = \frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Рассмотрим оператор $L(t) = -A(t) - H(t)\dfrac{d}{dt}$.

Теорема 6 [11]**.** *Пусть* $A(t)$, $H(t) \in C^{2m}(\alpha, \beta)$, $\operatorname{rank} H(t) = s - r$ *и матрица* $H(t)$ *имеет в интервале* (α, β) *полный жорданов набор относительно* *оператора* $L(t)$, *который складывается в* r *клеток порядка* $l_1, l_2, \ldots, l_r$ *при* $\max_i l_i = m$. *Тогда существуют неособые при всех* $t \in (\alpha, \beta)$ $(s \times s)$*-матрицы* $\tilde{M}(t)$, $G_1(t) \in C^1(\alpha, \beta)$ *такие, что умножением на* $\tilde{M}(t)$ *и заменой* $z = G(t)y$ *система* (44) *приводится к центральной канонической форме*

$$\left\| \begin{matrix} E_{s-r} & 0 \\ 0 & J \end{matrix} \right\| \dot{y} = \left\| \begin{matrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_l \end{matrix} \right\| y + \tilde{M}(t) q(t),$$

где $l = l_1 + \ldots + l_r$, $J = \mathrm{diag}\,(J_1, \ldots, J_r)$, J_j *— жордановые клетки порядка* l_j, $j = \overline{1, r}$.

Выберем функцию Еругина в виде

$$F(t, x, \omega) = -A_2(t)\omega - B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \tag{46}$$

где $A_2(t) \in R^{s\times s}$ — гурвицева, $B(t) \in R^{s\times k}$ — непрерывная, $P \in R^{k\times k}$ — постоянная матрицы, φ, $\sigma \in R^k$ — векторы, а нелинейная вектор-функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет локальным условиям квадратичной связи и дифференцируема по σ:

$$\varphi(t, 0) \equiv 0 \wedge 0 < \sigma^T K_1 \varphi(t, \sigma) < \sigma^T K(t)\sigma \quad \forall \sigma \neq 0, \tag{47}$$

$$K_2 < \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} < K_3. \tag{48}$$

Здесь K, K_i, $i = 1, 2, 3$, — диагональные матрицы.

С учетом (42) и (46) получим систему (44) в виде

$$H(t)\dot{x} = -A_2(t)\omega - q(t) - B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \tag{49}$$

где $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (47), (48).

На основании теоремы 6 система (49) приводится к центральной канонической форме

$$\begin{gathered} \dot{u} = -M(t)u - M_1(t)q_1 - M_1(t)B_1(t)\varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{\nu} = -\nu - M_2(t)q_2 - M_2(t)B_2(t)\varphi_2(\sigma_2), \\ \sigma_1 = Q_1^T u, \quad \sigma_2 = Q_2^T u, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad y = \left(u^T \nu^T\right)^T. \end{gathered} \tag{50}$$

Здесь $q_1(t)$, $q_2(t)$ играют роль постоянно действующих возмущений. Для системы (50) без возмущений строим функцию Ляпунова вида

$$V = u^T L u + \nu^T JNJ\nu + \int_0^{\sigma_1} \varphi^T(\sigma_1)\beta_1\, d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} \varphi^T(\sigma_2)\beta_2\, J d\sigma_2, \tag{51}$$

где $L = L^T > 0$, $N = N^T > 0$, а β_1, β_2 — положительные диагональные матрицы.

Дифференцируя функцию (51) по времени t, в силу системы (50) получаем

$$\begin{gathered} -\dot{V} = u^T G_0 u + 2u^T G_1 \varphi_1(\sigma_1) + \varphi_1^T(\sigma_1) G_2 \varphi_1(\sigma_1) + \\ + \nu^T G_3 \nu + 2\nu^T G_4 \varphi_2(\sigma_2) + \varphi_2^T(\sigma_2) G_5 \varphi_2(\sigma_2) > 0, \end{gathered}$$

если выполняются обобщенные условия Сильвестра

$$\begin{Vmatrix} G_0 & G_1 & 0 & 0 \\ G_1^T & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & G_4 \\ 0 & 0 & G_4^T & G_5 \end{Vmatrix} > 0, \tag{52}$$

$$G_0 = LM + M^T L, \quad G_1 = LM_1 B_1 + \frac{1}{2} M^T Q_1 \beta_1, \quad G_2 = 2JNJ,$$

$$G_3 = \beta_1 Q_1^T M_1 B_1, \quad G_4 = JNJVM_2 B_2 + \frac{1}{2} Q_2^T \beta_2, \quad G_5 = \beta_2 Q_2^T M_2 B_2.$$

Теорема 7. *Пусть нелинейность* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (47), (48) *и существуют положительно определенные матрицы* L, N, β. *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *относительно вектор-функции* ω *без возмущений достаточно выполнения условия* (52).

Из устойчивости системы (50) без возмущений следует, что

$$\|q_1(t)\| \le \delta(\varepsilon), \quad \|q_2(t)\| \le \delta(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \|u\| \le \varepsilon, \quad \|\nu\| \le \varepsilon. \tag{53}$$

Теорема 8. *Пусть выполняются все условия теоремы* 7. *Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *относительно вектор-функции* ω *достаточно выполнения условий* (53).

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, вып. 6. – С. 653 – 670.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др.* Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
3. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. – 1994. – № 1. – С. 5 – 21.
4. *Жуматов С.С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости управления движением. – Алматы, 1999. – 228 с.
5. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
6. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., 1978. – 400 с.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
8. *Майгарин Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата, 1980. – 316 с.
9. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., 1963. – 140 с.
10. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 10 – 15.
11. *Яковець В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278 – 1296.
12. *Яковець В. П.* Про структуру загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 292 – 298.

Получено 06.10.08