УДК 517.988.63

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Conditions for the existence and uniqueness of bounded solutions of the nonlinear differential equation $f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, are obtained.

Получены условия существования и единственности ограниченных решений нелинейного дифференциального уравнения $f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - h(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Основні позначення, об'єкт досліджень і результати. Позначимо через C^0 банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|,$$

через C^1 банахів простір функцій $x \in C^0$, похідна кожної з яких є елементом простору C^0, з нормою

$$\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}\right\},$$

через C множину всіх неперервних функцій $y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, через $\mathcal{M}$ множину всіх строго монотонних функцій $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для кожної з яких множина значень $R(g)$ збігається з $\mathbb{R}$, а через $\mathcal{F}$ множину всіх неперервних функцій g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для кожної з яких $R(g) = \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \|g(t)\| = +\infty$.

Визначимо оператор $L:\ C^1 \to C^0$ рівністю

$$(Lx)(t) = f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) - f_2(x(t)), \tag{1}$$

де $x \in C^1$, $f_1 \in \mathcal{M}$ і $f_2 \in C$.

З'ясуємо, при виконанні яких умов диференціальне рівняння

$$f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для кожної функції $h \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1$, а відповідний оператор L має обернений неперервний оператор.

Зазначимо, що аналогічні задачі розв'язувалися багатьма авторами переважно у випадку лінійних або слабконелінійних відображень (див., наприклад, [1 – – 9]). Випадок $f_1(t) \equiv t$ розглянуто в [10 – 12].

Справджуються наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_1(0) = 0$, *і* $f_2 \in C$.

Рівняння (2) *для кожної функції* $h \in C^0$ *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1$ *тоді і тільки тоді, коли* $R(f_2) = \mathbb{R}$. *При цьому для кожного відрізка* $[\alpha, \beta]$, *для якого* $R\left(f_2|_{[\alpha,\beta]}\right) = \overline{R(h)}$ *і* $\{f_2(\alpha),\ f_2(\beta)\} = \left\{\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} h(t),\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} h(t)\right\}$, *існує такий розв'язок* $x \in C^1$, *що* $R(x) \subset [\alpha\,\beta]$.

Теорема 2. *Нехай* $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_1(0) = 0$, *і* $f_2 \in C$. *Тоді є рівносильними наступні твердження*:

а) $f_2 \in \mathcal{M}$;

б) *оператор* $L: C^1 \to C^0$ *має обернений неперервний оператор*;

в) *оператор* $L: C^1 \to C^0$ *має обернений неперервний обмежений оператор*;

г) *оператор* $L: C^1 \to C^0$ *має обернений неперервний обмежений і с-неперервний оператор*.

Ці теореми встановимо за допомогою ряду допоміжних тверджень.

2. Локально збіжні послідовності неперервних функцій. Говоритимемо, що послідовність $(x_k)_{k\geq 1}$ елементів простору C^0 локально збігається до елемента $x \in C^0$, і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і для кожного $p > 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\leq p} |x_k(t) - x(t)| = 0.$$

Аналогічно послідовність $(x_k)_{k\geq 1}$ елементів простору C^1 локально збігається до елемента $x \in C^1$:

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^1} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x$ і $\dfrac{dx_k}{dt} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} \dfrac{dx}{dt}$ при $k \to \infty$.

Розглянемо у просторах C^0 і C^1 замкнені кулі

$$B^0[r, 0] = \left\{x \in C^0 : \|x\|_{C^0} \leq r\right\}$$

і

$$B^1[r, 0] = \left\{x \in C^1 : \|x\|_{C^1} \leq r\right\}$$

радіуса $r > 0$.

Важливим для подальшого є наступне твердження.

Лема 1 [13]**.** *Для кожної послідовності функцій* $x_n \in B^0[r_0, 0] \cap B^1[r_1, 0]$, $n \geq 1$, *де* r_0 *і* r_1 — *довільні додатні числа*, *існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел* n_k, $k \geq 1$, *і функція* $x \in B^0[r_0, 0]$, *що* $x_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x$ *при* $k \to \infty$.

3. Одне співвідношення для елементів множини $\mathcal{F}$**.** Очевидно, що $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ і $f \circ g \in \mathcal{F}$ для довільних $f, g \in \mathcal{F}$.

Лема 2. *Нехай* $f \in \mathcal{M}$ *і* $g \in \mathcal{F}$.

Тоді для кожних відрізка $[\gamma_1, \gamma_2]$ *і досить великого числа* $a > 0$ *існує таке дійсне числа* $k \neq 0$, *що*

$$|f(g(t) - \gamma) - kt| \leq |k| a$$

для всіх $t \in [-a, a]$ *і* $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Доведення. За умови леми існує відрізок $[-\delta, \delta]$, для якого

$$f(g(t) - \gamma) \neq 0$$

для всіх $t \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$ і $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$. Зафіксуємо довільне число $a > \delta$. Оскільки функція $|f(g(t) - \gamma)|$ змінних t і γ є неперервною на $\mathbb{R}^2$, то вона обмежена на кожній обмеженій множині $M \subset \mathbb{R}^2$. Тому скінченними є

$$\max_{|t| \le \delta, \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]} |f(g(t) - \gamma)|$$

і

$$\max_{t \in [-a, -\delta] \cup [\delta, a], \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]} |f(g(t) - \gamma)|,$$

які позначимо відповідно через H_1 і H_2. Розглянемо довільне дійсне число $k \neq \neq 0$, для якого

$$|k| \ \ge \ \max\left\{\frac{H_1}{a - \delta}, \frac{H_2}{a}\right\} \tag{3}$$

і

$$kf(g(\delta) - \gamma_2) \ > \ 0. \tag{4}$$

Завдяки (3) для всіх $t \in [-\delta, \delta]$ і $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$

$$|f(g(t) - \gamma) - kt| \ \le \ |f(g(t) - \gamma)| \ + \ |kt| \ \le \ H_1 \ + \ |k|\delta \ \le \ |k|a.$$

Завдяки (3) і (4) для всіх $t \in [-a, -\delta] \cup [\delta, a]$ і $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$

$$|f(g(t) - \gamma) - kt| \ < \ \max\{H_2, |k|a\} \ = \ |k|a.$$

Звідси випливає твердження леми.

Лему 2 доведено.

4. Оцінка знизу приростів строго зростаючих функцій.

Лема 3. *Нехай неперервна на* $\mathbb{R}^2$ *функція* $F(t, s)$ *зі значеннями в* $\mathbb{R}$ *є строго зростаючою по змінній* t *на* $\mathbb{R}$ *для кожного* $s \in \mathbb{R}$.

Тоді для кожних прямокутника $[a, b] \times [c, d]$ *і числа* $\varepsilon \in (0, b - a)$ *існує таке число* $k > 0$, *що* $F(u, s) - F(v, s) \ge k(u - v)$ *для всіх* $(u, v, s) \in [a, b] \times \times [a, b] \times [c, d]$, *для яких* $u - v \ge \varepsilon$.

Доведення. Припустимо, що твердження леми є хибним. Тоді існує послідовність точок $(u_n, v_n, s_n) \in [a, b] \times [a, b] \times [c, d]$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $u_n - v_n \ge \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(u_n, s_n) - F(v_n, s_n)}{u_n - v_n} \ = \ 0.$$

Тому завдяки неперервності функції $F(t, s)$ на $[a, b] \times [c, d]$ існують такі числа $\alpha, \beta \in [a, b]$ і $\gamma \in [c, d]$, що $\beta - \alpha \ge \varepsilon$ і $F(\beta, \gamma) = F(\alpha, \gamma)$. Остання рівність суперечить умовам леми.

Отже, лему 3 доведено.

5. Умови розв'язності рівняння (2) у просторі періодичних функцій. Позначимо через $\mathcal{P}_T$ (T — додатне число) підпростір простору C^0, що містить всі T-періодичні функції.

Лема 4. *Нехай* $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_1(0) = 0$, *і* $f_2 \in \mathcal{F}$.

Тоді рівняння (2) *для кожної функції* $h \in \mathcal{P}_T$ *має хоча б один розв'язок* $x \in \mathcal{P}_T$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $h \in \mathcal{P}_T$. Функція f_1 має обернену неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f_1^{-1}. Тому рівняння (2) рівносильне рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = f_1^{-1}\big(f_2(x(t)) - h(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Візьмемо числа $k \neq 0$ і $a > 0$, для яких

$$\left| f_1^{-1}(f_2(t) - \gamma) - kt \right| \leq |k| a, \quad \text{якщо} \quad |t| \leq a \quad \text{і} \quad |\gamma| \leq \|h\|_{C^0}. \tag{5}$$

Такі числа існують завдяки включенню $f_1^{-1} \in \mathcal{M}$ і лемі 2. Розглянемо цілком неперервне відображення $G\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_T$, що визначається рівністю

$$(Gx)(t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{k(t-s)} \left(f_1^{-1}(f_2(x(s)) - h(s)) - kx(s) \right) ds, & \text{якщо} \quad k < 0, \\ -\int\limits_{t}^{+\infty} e^{k(t-s)} \left(f_1^{-1}(f_2(x(s)) - h(s)) - kx(s) \right) ds, & \text{якщо} \quad k > 0. \end{cases}$$

Використовуючи [1], неважко переконатися в тому, що задача про існування T-періодичних розв'язків рівняння (2) рівносильна аналогічній задачі для рівняння

$$x(t) = (Gx)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

і на підставі (5) $GS_a \subset S_a$, де $S_a = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\|_{C^0} \leq a\}$. Тому завдяки теоремі Шаудера про нерухому точку [14] множина T-періодичних розв'язків рівняння (6), а отже і рівняння (2), не є порожньою.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай* $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_1(0) = 0$, $f_2 \in C$, $h \in \mathcal{P}_T$ *і* $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ — *такі відрізки, що* $R\left(f_2|_{[\alpha,\beta]}\right) = R(h) = [a, b]$ *і* $\{f_2(\alpha),\, f_2(\beta)\} = \{a, b\}$.

Тоді рівняння (2) *має розв'язок* $y \in \mathcal{P}_T$, *для якого* $R(y) \subset [\alpha, \beta]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f_2^* \in \mathcal{F}$, для якої $f_2^*\big|_{[\alpha,\beta]} = f_2|_{[\alpha,\beta]}$ і

$$f_2^*(t) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \quad \text{для всіх} \quad t \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]. \tag{7}$$

Завдяки лемі 4 рівняння

$$f_1\!\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2^*(x(t)) - h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

має розв'язок $y \in \mathcal{P}_T$, який у деяких точках t_1 і t_2 досягає найменшого $y_{\min}$ і найбільшого $y_{\max}$ значень. У цих точках $dy/dt = 0$ і, отже, $f_1(dy/dt) = 0$. Тому $\left\{f_2^*(y_{\min}),\, f_2^*(y_{\max})\right\} = \{h(t_1),\, h(t_2)\}$ і на підставі (7) $\{y_{\min},\, y_{\max}\} \subset [\alpha, \beta]$. Оскільки $f_2^*(t) = f_2(t)$ для всіх $t \in [\alpha, \beta]$, то розв'язок $y = y(t)$ рівняння (8) також є розв'язком рівняння (2).

Лему 5 доведено.

6. Доведення теореми 1. Нехай $R(f_2) = \mathbb{R}$. Розглянемо послідовності чисел T_n і функцій $h_n \in \mathcal{P}_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$, $R(h_n) = \overline{R(h)}$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} h \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{9}$$

а також відрізок $[\alpha, \beta]$, для якого $R\left(f_2|_{[\alpha,\beta]}\right) = \overline{R(h)}$ і $\left\{\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} h(t),\, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} h(t)\right\} = \{f_2(\alpha),\, f_2(\beta)\}$. На підставі леми 5 існують такі функції $x_n \in \mathcal{P}_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, що $R(x_n) \subset [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t f_1^{-1}\big(f_2(x_n(s)) - h_n(s)\big)ds, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Звідси, з обмеженості послідовності $(h_n)_{n\geq 1}$, із співвідношень $R(x_n) \subset [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, і неперервності функцій f_1^{-1} і f_2 випливає, що

$$\sup_{n\geq 1} \| x_n \|_{C^1} < +\infty.$$

Тому за лемою 1 існують функція $z \in C^0$ і числа $n_k > k$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $R(z) \subset [\alpha, \beta]$ і

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} z \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси, із співвідношень (9), (10) і неперервності функцій f_1^{-1}, f_2 випливає, що

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f_1^{-1}\big(f_2(z(s)) - h(s)\big)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто $z(t)$ — розв'язок рівняння (2).

Нехай $R(f_2) \neq \mathbb{R}$. Розглянемо рівняння

$$f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - m, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $m \in \mathbb{R} \setminus \overline{R(f_2)}$. Кожний розв'язок $x(t)$ цього рівняння є необмеженим, оскільки

$$\left|\frac{dx(t)}{dt}\right| \geq \inf\left\{\left|f_1^{-1}(y - m)\right|: \ y \in R(f_2)\right\} > 0$$

для всіх точок t з множини визначення цього розв'язку. Звідси випливає, що існування обмежених розв'язків рівняння (2) із довільною функцією $h \in C^0$ гарантує виконання співвідношення $R(f_2) = \mathbb{R}$, що завершує доведення теореми 1.

7. Доведення теореми 2. Спочатку нагадаємо, що оператор $F: X \to Y$, де X, Y — елементи множини $\{C^0, C^1\}$, називається обмеженим, якщо він кожну обмежену множину відображає в обмежену множину. Цей оператор називається c-неперервним, якщо для довільних $x \in X$ і $x_n \in X$, $n \geq 1$, для яких

$$x_n \xrightarrow{\text{лок.}, X} x \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

випливає, що

$$Fx_n \xrightarrow{\text{лок.}, Y} Fx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тепер перейдемо до доведення теореми 2.

Імплікації (г) $\Rightarrow$ (в) і (в) $\Rightarrow$ (б) є очевидними.

Доведемо імплікацію (б) $\Rightarrow$ (а). Нехай оператор $L: C^1 \to C^0$ має обернений неперервний оператор. Зафіксуємо довільне число $h \in \mathbb{R}$ і розглянемо рівняння

$$f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - h, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Якщо функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (11), то для кожного $\tau \in \mathbb{R}$ функція $y(t + \tau)$ також є розв'язком цього рівняння. А оскільки, згідно з оборотністю оператора $L:\ C^1 \to C^0$, рівняння (11) має єдиний розв'язок $y \in C^1$, то $y(t) \equiv \text{const}$ і, отже, кожний розв'язок рівняння (11) є розв'язком рівняння

$$f_2(x) - h = 0. \tag{12}$$

Кожний сталий розв'язок рівняння (12) також є розв'язком рівняння (11). Тому рівняння (12) також має єдиний розв'язок. На підставі цього та рівності $R(f_2) = \mathbb{R}$, що випливає з довільності вибору $h \in \mathbb{R}$, функція $f_2:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має обернену функцію. Звідси та з включення $f_2 \in C$ випливає, що $f_2 \in \mathcal{M}$.

Отже, імплікацію (б) $\Rightarrow$ (а) доведено.

Доведемо імплікацію (а) $\Rightarrow$ (г). За теоремою 1 для множини $R(L)$ значень оператора $L:\ C^1 \to C^0$ справджується співвідношення

$$R(L) = C^0. \tag{13}$$

Розглянемо довільні функції $h_n \in C^0$, $x_n \in C^1$, $n \geq 0$, для яких

$$Lx_n = h_n, \quad n \geq 0, \tag{14}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \| h_n - h_0 \|_{C^0} = 0. \tag{15}$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_{C^1} = 0. \tag{16}$$

Звідси випливатиме, що: 1) для кожної функції $h \in C^0$ рівняння (2) має єдиний розв'язок $x \in C^1$ (тому завдяки (13) оператор $L:\ C^1 \to C^0$ має обернений оператор L^{-1}); 2) оператор $L^{-1}:\ C^0 \to C^1$ є неперервним.

Розглянемо функцію

$$Y(t, s) = f_1^{-1}\big(f_2(t) - s\big),$$

яка є строго монотонною по t на $\mathbb{R}$ для всіх $s \in \mathbb{R}$, оскільки $f_1,\ f_2 \in \mathcal{M}$ (зазначимо, що функція f_1 має обернену функцію f_1^{-1} на підставі включення $f_1 \in \mathcal{M}$). Тоді завдяки (14)

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = Y\big(x_n(t), h_n(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \tag{17}$$

і

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = Y\big(x_0(t), h_0(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Припустимо, що співвідношення (16) не виконується. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$\inf_{n\geq 1} \| x_n - x_0 \|_{C^1} > 0. \tag{19}$$

Із цього співвідношення випливає, що

$$\inf_{n\geq 1} \| x_n - x_0 \|_{C^0} > 0. \tag{20}$$

Справді, якщо для деякої зростаючої послідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ цілих чисел

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_{n_k} - x_0 \right\|_{C^0} = 0, \tag{21}$$

то завдяки рівномірній неперервності функції $Y(t, s)$ на кожній обмеженій і замкненій множині справджується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|Y\big(x_{n_k}(t), h_{n_k}(t)\big) - Y(x_0(t), h_0(t))\right| = 0.$$

Тому на підставі (17) і (18)

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{dx_{n_k}(t)}{dt} - \frac{dx_0(t)}{dt}\right| = 0,$$

що разом із (21) суперечить (19).

Послідовність $(h_n)_{n\ge 0}$ є обмеженою (на підставі (15)). Тому завдяки (14) та теоремі 1 аналогічну властивість має послідовність $(x_n)_{n\ge 0}$. Отже, існують відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$, для яких

$$\bigcup_{n\ge 0} R(x_n) \subset [a, b] \tag{22}$$

і

$$\bigcup_{n\ge 0} R(h_n) \subset [c, d]. \tag{23}$$

Позначимо через μ ліву частину нерівності (20).

Розглянемо випадок, коли функція $Y(t, s)$ є строго зростаючою по змінній t на $\mathbb{R}$ для всіх $s\in\mathbb{R}$ (такий випадок можливий завдяки умовам теореми). За лемою 3 існує таке число $k>0$, що

$$Y(u, s) - Y(v, s) \ge k(u - v) \tag{24}$$

для всіх $(u, v, s) \in [a, b]\times[a, b]\times[c, d]$, для яких $u - v \ge \frac{\mu}{2}$. Візьмемо таке число $\delta > 0$, щоб

$$k\mu - 2\delta > 0. \tag{25}$$

Завдяки (15), (22), (23), рівності $\inf\limits_{n\ge 1}\| x_n - x_0 \|_{C^0} = \mu$ і неперервності функції $Y(t, s)$ на $[a, b]\times[c, d]$ існують числа $n_1\in\mathbb{N}$ і $t_1\in\mathbb{R}$, для яких

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|Y\big(x_{n_1}(t), h_0(t)\big) - Y\big(x_{n_1}(t), h_1(t)\big)\right| \le \delta \tag{26}$$

і $\left|x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1)\right| \ge \frac{\mu}{2}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1) \ge \frac{\mu}{2}. \tag{27}$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{d\big(x_0(t) - x_{n_1}(t)\big)}{dt} = \Big(Y(x_0(t), h_0(t)) - Y\big(x_{n_1}(t), h_0(t)\big)\Big) +$$

$$+ \Big(Y\big(x_{n_1}(t), h_0(t)\big) - Y\big(x_{n_1}(t), h_{n_1}(t)\big)\Big), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{28}$$

що випливає з (17) і (18). Звідси з урахуванням (24) – (27) отримуємо

$$\frac{d\big(x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1)\big)}{dt} > 0. \tag{29}$$

Розглянемо довільний проміжок $[t_1, T)$, для якого

$$\frac{d\big(x_0(t) - x_{n_1}(t)\big)}{dt} > 0, \quad t \in [t_1, T) \tag{30}$$

(такий проміжок існує, оскільки функції $Y(x_0(t),\ h_0(t))$, $Y\big(x_{n_1}(t),\ h_0(t)\big)$ і $Y\big(x_{n_1}(t),\ h_{n_1}(t)\big)$ неперервні на $\mathbb{R}$ і справджуються співвідношення (28) і (29)). Тоді на підставі (30) функція $x_0(t) - x_{n_1}(t)$ є строго зростаючою на проміжку $[t_1, T)$. Тому завдяки неперервності в точці T цієї функції виконується нерівність $x_0(T) - x_{n_1}(T) \geq \frac{\mu}{2}$. А оскільки на підставі (22) $\big\{x_0(T),\ x_{n_1}(T)\big\} \subset [a, b]$, то завдяки (24) – (26)

$$\Big(Y(x_0(T), h_0(T)) - Y\big(x_{n_1}(T), h_0(T)\big)\Big) +$$
$$+ \Big(Y\big(x_{n_1}(T), h_0(T)\big) - Y\big(x_{n_1}(T), h_{n_1}(T)\big)\Big) > \frac{k\mu}{2} - \delta > 0.$$

Звідси випливає, що на проміжку $[t_1, +\infty)$ немає жодної точки τ, для якої

$$\left.\frac{d\big(x_0(t) - x_{n_1}(t)\big)}{dt}\right|_{t=\tau} = 0.$$

Тому

$$\frac{d\big(x_0(t) - x_{n_1}(t)\big)}{dt} > 0, \ t \geq t_1.$$

Отже,

$$x_0(t) - x_{n_1}(t) \geq \frac{\mu}{2}, \quad t \geq t_1.$$

Тоді на підставі (24) – (26) і (28)

$$\frac{d\big(x_0(t) - x_{n_1}(t)\big)}{dt} \geq \frac{k\mu}{2} - \delta > 0, \ t \geq t_1.$$

Це співвідношення, очевидно, суперечить (22).

Таким чином, припущення про те, що співвідношення (16) не виконується, є хибним у випадку, коли функція $Y(t, s)$ є строго зростаючою по змінній t на $\mathbb{R}$ для всіх $s \in \mathbb{R}$. Отже, у цьому випадку оператор $L:\ C^1 \to C^0$ має обернений неперервний оператор L^{-1}.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $Y(t, s)$ є строго спадною по змінній t на $\mathbb{R}$ для всіх $s \in \mathbb{R}$. Цей випадок зводиться до розглянутого вище. Справді, допоміжний оператор $L_1:\ C^1 \to C^0$, визначений рівністю

$$(L_1 y)(t) = f_1\!\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) - f_2(-y(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

має обернений неперервний оператор, оскільки відповідна функція

$$Y_1(t, s) = f_1^{-1}(f_2(-t) - s)$$

є строго зростаючою по змінній t на $\mathbb{R}$ для всіх $s \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$(Lx)(t) = (L_1 y)(-t)$$

для всіх $x,\ y \in C^1$ і $t \in \mathbb{R}$, якщо

$$x(t) = -y(-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

то оператор $L: C^1 \to C^0$ має обернений неперервний оператор L^{-1} й у випадку строго спадної по змінній t на $\mathbb{R}$ для всіх $s \in \mathbb{R}$ функції $Y(t, s)$.

Отже, оператор $L: C^1 \to C^0$ має обернений неперервний оператор L^{-1}.

Покажемо обмеженість оператора L^{-1}. Розглянемо довільну обмежену множину $M \subset C^0$. Існують відрізки $[a, b]$ і $[\alpha, \beta]$, для яких

$$\bigcup_{h \in M} R(h) \subset [a, b]$$

і

$$R\left(f_2\big|_{[\alpha,\beta]}\right) = [a, b].$$

Завдяки теоремі 1 для кожної функції $h \in M$

$$R\left(L^{-1}h\right) \subset [\alpha, \beta]. \tag{31}$$

Таким чином, оператор L^{-1} відображає обмежену множину $M \subset C^0$ в обмежену множину $L^{-1}M \subset C^0$. Множина $L^{-1}M$ також обмежена у просторі C^1. Справді, оскільки для кожної функції $h \in M$

$$\frac{d\left(L^{-1}h\right)}{dt} = Y\left(\left(L^{-1}h\right)(t), h(t)\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

і функція $Y(t, s)$ обмежена на прямокутнику $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, то

$$\sup_{h \in M} \left\| \frac{dL^{-1}h}{dt} \right\|_{C^0} \le \max_{(t,s) \in [\alpha,\beta] \times [a,b]} |Y(t, s)| < +\infty.$$

Звідси і з (31) випливає обмеженість множини $L^{-1}M$ у просторі C^1.

Отже, оператор $L^{-1}M$ є обмеженим.

Тепер покажемо, що оператор $L^{-1}: C^0 \to C^1$ є c-неперервним.

Припустимо, що властивість c-неперервності для L^{-1} не виконується. Існують функції $h \in C^0$, $h_n \in C^0$, $n \in \mathbb{N}$, і числа $\delta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, для яких

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} h \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{32}$$

і

$$\max_{a \le t \le b} \left| \left(L^{-1}h\right)(t) - \left(L^{-1}h_n\right)(t) \right| +$$

$$+ \max_{a \le t \le b} \left| \frac{d\left(L^{-1}h\right)(t)}{dt} - \frac{d\left(L^{-1}h_n\right)(t)}{dt} \right| > \delta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Згідно з обмеженістю множини $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ у просторі C^0 і обмеженістю оператора L^{-1} множина $\left\{L^{-1}h_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ є обмеженою у просторі C^1. Тому на підставі леми 1 можна вважати, не зменшуючи загальності, що

$$L^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} y \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{34}$$

де y — деякий елемент простору C^0. Оскільки

$$\frac{d\left(L^{-1}h_n\right)(t)}{dt} \equiv Y\left(\left(L^{-1}h_n\right)(t), h_n(t)\right), \quad n \geq 1,$$

то

$$\left(L^{-1}h_n\right)(t) - \left(L^{-1}h_n\right)(0) = \int_0^t Y\left(\left(L^{-1}h_n\right)(\tau), h_n(\tau)\right) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси, із (32), (34) та неперервності $Y(t, s)$ на $\mathbb{R}^2$ отримуємо

$$y(t) - y(0) = \int_0^t Y(y(\tau), h_n(\tau))\, d\tau$$

і

$$L^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^1} y \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{35}$$

Отже, рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Y(x(t), h(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

має розв'язки $x = \left(L^{-1}h\right)(t)$ і $y = y(t)$, для яких завдяки (33) і (35)

$$\| x - y \|_{C^1} \geq \delta > 0,$$

що суперечить оборотності оператора $L: \ C^0 \to C^1$.

Таким чином, припущення про те, що оператор $L: \ C^1 \to C^0$ не є c-неперервним, хибне.

Отже, імплікацію (а) $\Rightarrow$ (г) доведено.

Теорему 2 доведено.

8. Обмежені нелінійні збурення рівняння (2). Наведемо застосування отриманих результатів.

Теорема 3. *Нехай*:

1) $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ *і* $f_1(0) = 0$;

2) $H: \ C^0 \to C^0$ — *c-неперервний оператор, для якого*

$$\sup_{x \in C^0} \| Hx \|_{C^0} < +\infty.$$

Тоді рівняння

$$f_1\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = f_2(x(t)) - (Hx)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{36}$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^1$.

Доведення. Зазначимо, що завдяки теоремі 2 та першій умові теореми оператор $L: \ C^1 \to C^0$, що визначається рівністю (1), має обернений неперервний обмежений і c-неперервний оператор L^{-1}. Тому задача про існування обмежених розв'язків рівняння (36) рівносильна аналогічній задачі для рівняння

$$x(t) = \left(L^{-1}Hx\right)(t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

Оператор $L^{-1}H: \ C^0 \to C^1$ як композиція двох c-неперервних операторів є c-неперервним й існує таке число $r > 0$, що

$$\sup_{x \in C^0} \left\| L^{-1}Hx \right\|_{C^1} \leq r. \tag{38}$$

Тут використано другу умову теореми та обмеженість оператора L^{-1}.

Визначимо оператор $P_n: C^1 \to C^1$ рівністю

$$(P_n x)(t) = p_n(t)\,x(t),$$

де

$$p_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t| \le n, \\ \cos^2 \pi t, & \text{якщо} \quad n < |t| \le n + \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| > n + \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

і розглянемо рівняння

$$x(t) = \left(P_n L^{-1} H x\right)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Оскільки на підставі (38), очевидної нерівності

$$\sup_{n \ge 1} \| P_n \|_{L(C^1, C^1)} < \pi + 1$$

і теореми Арцела оператор $P_n L^{-1} H: C^0 \to C^0$ є цілком неперервним, а куля

$$B_r = \left\{ x \in C^0 : \| x \|_{C^0} \le r \right\}$$

інваріантна по відношенню до цього оператора, то на підставі теореми Шаудера про нерухому точку [14] рівняння (39) має розв'язок

$$y_n \in B_r.$$

Цей розв'язок також є елементом простору C^1 і

$$\| y_n \|_{C^1} < (\pi + 1)\, r.$$

На підставі леми 1 існує така функція $y^* \in B_r$, що

$$y_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} y^* \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Звідси, з означення оператора P_n, c-неперервності оператора $L^{-1}H$ і співвідношень

$$y^* - L^{-1} H y^* = \left(y^* - y_n\right) + \left(y_n - P_n L^{-1} H y_n\right) +$$

$$+ \left(P_n L^{-1} H y_n - P_n L^{-1} H y^*\right) + \left(P_n L^{-1} H y^* - L^{-1} H y^*\right),$$

$$y_n - P_n L^{-1} H y_n = 0,$$

$$P_n L^{-1} H y_n - P_n L^{-1} H y^* \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$P_n L^{-1} H y^* - L^{-1} H y^* \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

випливає

$$y^* - P_n L^{-1} H^* = 0,$$

тобто рівняння (37) має розв'язок $y^* \in C^0$. Цей розв'язок є елементом простору C^1, оскільки $L^{-1} H h \in C^1$ для всіх $h \in C^0$.

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що рівняння (36) може бути диференціально-функціональним рівнянням. Це рівняння є таким, якщо оператор $H: \ C^0 \to C^0$ визначається рівністю

$$(Hx)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t, x(\varphi(t))), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $F_k: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ і $\varphi_k: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервні функції, $x \in C^0$ і функціональний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(t, s)$$

рівномірно збігається на $\mathbb{R}^2$. Для цього оператора друга умова теореми 3 виконується.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
2. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Наука, 1970. – 456 с.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
6. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116** (158), № 4 (12). – С. 483 – 501.
7. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660 – 662.
8. *Перов А. И.* Об ограниченных решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физика, математика. – 2003. – № 1. – С. 165 – 168.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні диференціальні рівняння з обмеженими на $\mathbb{R}$ розв'язками // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 1. – С. 96 – 111.
10. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, вып. 4. – С. 181 – 182.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних диференціальних операторів у просторі обмежених на осі функцій // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 2. – С. 213 – 220.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Необхідні і достатні умови ліпшицевої оборотності нелінійного диференціального оператора $d/dt - f$ у просторі обмежених на осі функцій // Там же. – 2001. – **15**, № 1. – С. 77 – 86.
13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523 – 539.
14. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 233 с.

Одержано 08.04.08