УДК 512.552.1

Н. А. Броницкая (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ПОЛУЦЕПНЫЕ КОЛЬЦА И ЧЕРЕПИЧНЫЕ ПОРЯДКИ ШИРИНЫ ДВА

Artinian serial rings and tiled orders of the width two with maximal finite global dimension are constructed.

Побудовано напівланцюгові артинові кільця та черепичні порядки ширини два найбільшої скінченної глобальної розмірності.

Введение. В настоящей статье изучаются связи между полуцепными артиновыми кольцами и черепичными порядками ширины два. Отметим, что *черепичным порядком* называется нетерово первичное полусовершенное и полудистрибутивное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона [1] (гл. 14).

В статье [2] доказана теорема, которая описывает свойства полуцепных артиновых колец с конечной глобальной размерностью.

Основные результаты данной статьи — построение полуцепных артиновых колец, удовлетворяющих условиям основной теоремы статьи [2] (исходя из черепичного порядка ширины 1), и черепичных порядков ширины два с наибольшей глобальной размерностью (с использованием методов [3]). Все кольца, рассматриваемые в статье, являются ассоциативными с единицей $1 \neq 0$, а модули — левыми.

Пусть R — радикал Джекобсона артинова кольца A. Радикал Джекобсона артинова кольца нильпотентен, т. е. существует натуральное число t такое, что $R^t \neq 0$, а $R^{t+1} = 0$. Цепочка подмодулей модуля M

$$M \supset RM \supset R^2M \supset \ldots \supset R^mM \supset 0,$$

где $R^mM \neq 0$, а $R^{m+1}M = 0$, называется *рядом Леви* левого модуля M.

Поскольку все модули $Q_1, \ldots, Q_n$ цепные, длины композиционных рядов $l(Q_i) = LL(Q_i)$, где $LL(Q_i)$ — длина ряда Леви модуля Q_i, $i = 1, \ldots, n$. Длиной ряда Леви $LL(A)$ кольца A называется $\max\limits_{1 \leq i \leq n} l(Q_i) = LL(Q_i)$.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема Густафсона. *Пусть* A *— полуцепное артиново кольцо и глобальная размерность* gl. dim A *является конечной. Тогда*:

1) $LL(A) \leq 2n - 1$,

2) gl. dim $A \leq 2n - 2$.

Отметим, что в силу теоремы Ауслендера (см., например, [4], теорема 5.1.16) правая и левая глобальные размерности для нетеровых с двух сторон колец совпадают. Следовательно, для полуцепных артиновых колец достаточно рассматривать левую глобальную размерность.

1. Полуцепные кольца. Напомним, что модуль называется *цепным*, если его подмодули линейно упорядочены по включению. Кольцо A называется *цепным справа* (*слева*), если правый (левый) регулярный модуль A_A $({}_AA)$ является цепным модулем. Кольцо A называется *цепным*, если оно является цепным справа и слева.

Модуль M называется *полуцепным*, если он является прямой суммой цепных модулей. Кольцо A называется *полуцепным справа* (*слева*), если правый (левый) регулярный модуль A_A $({}_AA)$ является полуцепным модулем. Полуцепное справа и слева кольцо называется *полуцепным*.

Эта терминология берет начало от статьи [5]. Полуцепные артиновы кольца назывались „обобщенно однорядными кольцами” и были введены японским алгебраистом Т. Накаямой в 1940 году. Более подробную информацию о полуцепных кольцах можно найти в монографиях [6] (гл. 25), [7], [1] (гл. 11 – 13), [4] (гл. V).

Говоря нетерово, артиново, наследственное и т. д. кольцо, мы считаем, что это нетерово, артиново, наследственное и т. д. с двух сторон кольцо.

Обозначим через R радикал Джекобсона кольца A.

Напомним, что кольцо $\mathcal{O}$ называется дискретно нормированным, если оно локальное цепное нетерово кольцо, которое не является артиновым. Это эквивалентно тому [8], что $\mathcal{O}$ является локальным кольцом с единственным максимальным идеалом $\mathcal{M}$ таким, что:

1) $\mathcal{O}/\mathcal{M}$ является телом;

2) $\bigcap_{n>0}\mathcal{M}^n = 0$;

3) $\mathcal{M}^n \neq 0$ для всех $n > 0$, и $\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$ является простым как левым, так и правым $\mathcal{O}$-модулем.

Кольцо $\mathcal{O}$ имеет классическое тело частных D. Обозначим через $M_n(D)$ кольцо квадратных матриц порядка n над телом D. Рассмотрим в кольце $M_n(D)$ следующее подкольцо:

$$H_n(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \\ \mathcal{M} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{M} & \mathcal{M} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что ассоциативное кольцо A с единицей $1 \neq 0$ называют *неразложимым*, если оно не является прямым произведением двух ненулевых колец.

Отметим, что теорема [9] имеет место, если заменить кольцо $H_n(\mathcal{O})$ на кольцо $H_n(\mathcal{O})^T$, где

$$H_n(\mathcal{O})^T = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{M} & \ldots & \mathcal{M} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Именно это кольцо мы будем рассматривать в дальнейшем. Для краткости будем обозначать его через Λ_n, а его радикал Джекобсона — через R_n. В силу теоремы Михлера [10] любое нетерово с двух сторон наследственное первичное полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты кольцу Λ_n. Из предложений 6.10.2 и 6.10.3 [4] следует, что это полуцепное наследственное кольцо, которое не является артиновым.

Пусть A — неразложимое приведенное полуцепное артиново кольцо, R — его радикал Джекобсона. В этом случае фактор-кольцо A/R является конечным прямым произведением тел и ${}_AA = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n$ — разложение левого регулярного модуля A в прямую сумму попарно неизоморфных неразложимых левых проективных A-модулей. В этом случае колчан $Q(A)$ кольца A имеет n вершин.

Имеют место следующие теоремы: теорема [1] (гл. 12) и теорема, которая дает критерий неразложимости нетерова полусовершенного кольца A с помощью его колчана $Q(A)$ [1] (теорема 11.1.9). Отсюда получаем, что колчан неразложимого полуцепного нетерова кольца является либо простым циклом, либо простой цепью.

В случае, когда колчан полуцепного нетерова кольца A является простой цепью $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n-1 \to n$, как следует из теоремы Голди [12], любое такое кольцо изоморфно фактор-кольцу кольца верхних треугольных матриц $T_n(D)$ по некоторому идеалу. Глобальная размерность таких колец всегда конечна и не превышает $n-1$. Поэтому будем предполагать, что колчан $Q(A)$ кольца A является простым циклом. Простой цикл, содержащий n вершин, обозначается через C_n и имеет вид

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 & \cdots & n-1 \arrow[r] & n \arrow[llll, bend left] \end{tikzcd}$$

В работе [2] указаны длины модулей $Q_1, \ldots , Q_n$ полуцепных артиновых приведенных неразложимых колец, колчаны которых являются простыми циклами, содержащими n вершин, для выполнения равенств в условиях 1 и 2 теоремы Густафсона.

При этом в случае 1 достаточно рассмотреть кольцо A_1, удовлетворяющее указанным выше условиям, со следующими длинами цепных проективных A_1-модулей: $l(Q_k) = 2n - k$ для $1 \le k \le n$. В [2] показано, что $\mathrm{gl.\,dim}\, A_1 = 2$.

В случае 2 достаточно рассмотреть кольцо A_2 с теми же условиями, с длинами цепных проективных A_2-модулей: $l(Q_i) = n + 1$ для $i = 1, \ldots , n - 1$ и $l(Q_n) = n$.

Мы, используя кольцо Λ_n, строим примеры полуцепных артиновых колец, для которых выполняются равенства в условиях 1 и 2.

Поскольку любое фактор-кольцо полуцепного кольца является полуцепным, любое фактор-кольцо кольца Λ_n является полуцепным. Построим примеры колец, для которых выполняются равенства в условиях 1 и 2, как фактор-кольца кольца Λ_n. Для этого в случае 1 рассмотрим следующий двусторонний идеал кольца Λ_n:

$$I_1 = \begin{pmatrix} \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \ldots & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A_1 фактор-кольцо Λ_n / I_1. Кольцо A_1 является полуцепным артиновым неразложимым и приведенным. Длины цепных проективных A_1 модулей $\overline{Q}_k = \Lambda_n e_{kk} / I_1 e_{kk}$ равны $2n - k$. Ясно, что $LL(A_1) = 2n - 1$ и $\mathrm{gl.\,dim}\, A_1 = 2$.

В случае 2 рассмотрим идеал I_2 кольца Λ_n вида

$$I_2 = \begin{pmatrix} \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & \ldots & \pi^2\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \ldots & \pi\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \ldots & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A_2 фактор-кольцо Λ_n / I_2. Кольцо A_2 является неразложимым приведенным полуцепным артиновым кольцом. Оно удовлетворяет условиям Густафсона и поэтому $\text{gl. dim}\, A_2 = 2n - 2$.

Отметим, что в случае $n = 1$ оба идеала совпадают: $I_1 = I_2 = \pi\mathcal{O}$.

2. Черепичные порядки ширины два. Напомним, что черепичный порядок A — это нетерово первичное полусовершенное и полудистрибутивное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона R.

Следующие результаты содержатся в [1] (гл. 14) и [4] (гл. 6).

Пусть $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо с единственным максимальным идеалом $\pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$, D — его классическое кольцо частных, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ — матрица показателей, т. е. $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ii} = 0$ для $i, j, k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $M_n(D)$ кольцо всех квадратных матриц порядка n с элементами из тела D, e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, — матричные единицы этого кольца.

Обозначим через $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E} = (\alpha_{ij})\}$ подкольцо в $M_n(D)$: $\Lambda = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\, \pi^{\alpha_{ij}}\, \mathcal{O}\right\}$. Матрицу $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ обозначают $\mathcal{E}(\Lambda)$. Если Λ является приведенным кольцом, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ при $i \neq j$. Наоборот, если это условие выполнено, то Λ — приведенный черепичный порядок. Любой черепичный порядок изоморфен порядку вида Λ, где $\mathcal{O}$ — кольцо эндоморфизмов неразложимого проективного Λ-модуля.

Пусть $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — черепичный порядок. *Правой* (*левой*) *Λ-решеткой* называется правый (левый) Λ-модуль, который является конечнопорожденным свободным $\mathcal{O}$-модулем. В частности, все конечнопорожденные проективные Λ-модули являются Λ-решетками.

Обозначим $Q = M_n(D)$, $U(V)$ — простой правый (левый) Q-модуль. Среди всех Λ-решеток выделяются так называемые неприводимые Λ-решетки, т. е. правые (левые) Λ-решетки, лежащие в $U(V)$.

Пусть Λ — черепичный порядок ширины 2 (см. [13, 4]).

Имеет место следующая теорема [4] (теорема 6.10.4).

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны для черепичного порядка* Λ:

а) *кольцо эндоморфизмов любой неразложимой Λ-решетки является дискретно нормированным кольцом*;

б) *каждая Λ-решетка M является прямой суммой неприводимых Λ-решеток*;

в) *каждая неприводимая Λ-решетка имеет не более двух максимальных подмодулей*;

г) *ширина* Λ *не превышает двух.*

Согласно этой теореме, если Λ — черепичный порядок ширины не больше 2, то любая Λ-решетка является прямой суммой неприводимых Λ-решеток, и поэтому для определения глобальной размерности Λ достаточно проверить проективные размерности неприводимых Λ-решеток [4] (теорема 5.1.13).

Черепичный порядок Λ_n имеет матрицу показателей $\mathcal{E}(\Lambda_n)$ следующего вида:

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(\Lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Поскольку любой двусторонний идеал I черепичного порядка $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ имеет вид $I = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\, \pi^{\delta_{ij}}\, \mathcal{O}\right\}$, матрицу (δ_{ij}) естественно называть матрицей показателей идеала I и обозначать $\mathcal{E}(I)$.

Рассмотрим идеал I_2 из предыдущего пункта. Очевидно, при $n = 1$ матрица $\mathcal{E}(I_2)$ имеет вид (1), при $n = 2$ $\mathcal{E}(I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и при $n = 3$ $\mathcal{E}(I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В общем случае

$$\mathcal{E}(I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим черепичный порядок $\Delta_{2n} = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Delta_{2n})\}$ с матрицей показателей $\mathcal{E}(\Delta_{2n}) = M_{2n}$, где

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_n & \mathcal{E}_n \\ \mathcal{E}(I_2) & \mathcal{E}_n \end{pmatrix}.$$

В силу результатов [13] это черепичный порядок ширины 2.

Имеет место такая теорема [4] (теорема 6.10.8).

Теорема 2. *Пусть* Λ — *черепичный порядок в* $M_n(D)$ *ширины не больше двух. Если* $\text{gl. dim}\,\Lambda < \infty$, *то* $\text{gl. dim}\,\Lambda \le n-1$.

Следующее предложение мы используем для определения глобальной размерности черепичного порядка Δ_{2n}.

Предложение [3]. *Пусть* Λ — *черепичный порядок и* e — *такой идемпотент кольца* Λ, *что кольцо* $e\Lambda e$ — *наследственное кольцо и* $I = \Lambda e \Lambda$. *Тогда* $\text{gl. dim}\,(\Lambda/I) \le \text{gl. dim}\,\Lambda \le \text{gl. dim}\,(\Lambda/I) + 2$.

Из теоремы 2 и предложения получаем такое следствие.

Следствие. *Глобальная размерность черепичного порядка* Δ_{2n} *с матрицей показателей* M_{2n} *удовлетворяет неравенству*

$$2n-2 \le \text{gl. dim}\,\Delta_{2n} \le 2n-1.$$

Доказательство. Очевидно, что Δ_{2n} является черепичным порядком в $M_{2n}(D)$, где D — тело частных $\mathcal{O}$. Пусть $e = e_{11} + \ldots + e_{nn}$. Тогда $e\Delta_{2n}e = \Lambda_n$ — наследственное кольцо и $I = \Delta_{2n}e\Delta_{2n}$ является идемпотентным идеалом с матрицей показателей $\mathcal{E}(I) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_n & \mathcal{E}_n \\ \mathcal{E}(I_2) & \mathcal{E}(I_2) \end{pmatrix}$. Поэтому $\Lambda/I \simeq \Lambda_n/I_2$. Это кольцо имеет глобальную размерность $2n-2$. Согласно предложению $\text{gl. dim}\,\Delta_{2n} \ge 2n-2$. В силу теоремы 2 $\text{gl. dim}\,\Delta_{2n} \le 2n-1$.

Следствие доказано.

Более подробный анализ показывает, что $\text{gl. dim}\,\Delta_{2n} = 2n-1$.

1. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules // Math. and Appl. – 2004. – № 575. – 380 p.
2. *Gustafson W. H.* Global dimension in serial rings // J. Algebra. – 1985. – № 97. – P. 14 – 16.
3. *Kirkman E., Kuzmanovich I.* Global dimension a class of tiled orders // Ibid. – 1989. – № 127. – P. 57 – 92.
4. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules // Math. and Appl. – 2007. – **2**, № 586. – 400 p.
5. *Скорняков Л. А.* Когда все модули полуцепные // Мат. заметки. – 1969. – **5**, № 2. – С. 173 – 182.
6. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории: В 2 т. – М.: Мир, 1979. – Т. 2. – 464 с.
7. *Puninski G.* Serial rings. – Kluwer Acad. Publ., 2001. – 226 p.
8. *Warfield R. B. Jr.* Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra. – 1975. – **37**. – P. 187 – 222.
9. *Dokuchaev M. A., Kirichenko V. V., Novikov B. V., Petravchuk A. P.* On incidence modulo ideal rings // J. Algebra and Appl. – 2007. – **6**, № 4. – P. 553 – 586.
10. *Michler G.* Structure of semi-perfect hereditary Noetherian rings // J. Algebra. – 1969. – **13**, № 3. – P. 327 – 344.
11. *Eisenbud D., Griffith P.* The structure of serial rings // Pacif. J. Math. – 1971. – **36**. – P. 173 – 182.
12. *Goldie A. W.* Torsionfree modules and rings // J. Algebra. – 1964. – **1**. – P. 268 – 287.
13. *Завадский А. Г., Кириченко В. В.* Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1976. – **57**. – С. 100 – 116.

Получено 12.12.07,
после доработки — 17.07.08