УДК 517.95

Ю. Б. Дмитришин (Львів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ТА МАЙЖЕ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ ОПЕРАТОРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We study a problem without initial conditions for linear and almost linear degenerate operator differential equations in Banach spaces. The uniqueness of a solution of this problem is proved in the classes of bounded functions and functions with the exponential behavior as $t \to -\infty$. In addition, sufficient conditions on the initial data are established under which there exists a solution of the considered problem in the class of functions with the exponential behavior at infinity.

Изучается задача без начальных условий для вырожденных линейных и почти линейных операторных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Доказана единственность решения этой задачи в классах ограниченных функций и функций с экспоненциальным поведением при $t \to -\infty$. Кроме того, установлены достаточные условия на исходные данные, при которых существует решение указанной задачи в классе функций с экспоненциальным поведением на бесконечности.

Вступ. Нехай V — дійсний рефлексивний сепарабельний банахів простір, V' — спряжений до V простір, S — дійсна числова вісь або промінь $(-\infty, T]$, $T \in \mathbb{R}$. Розглянемо *задачу без початкових умов*: знайти функцію $u : S \to V$ таку, що

$$(\mathcal{B}u(t))' + \mathcal{A}(t, u(t)) = f(t), \quad t \in S, \tag{1}$$

де $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, $\mathcal{B}$ — оператори, що діють з V в V', а $f : S \to V'$ — деяка функція. Нас цікавить випадок, коли оператор $\mathcal{B}$ є лінійним, а $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, — сім'я лінійних або майже лінійних операторів. Таку задачу у випадку $\mathcal{B} = I$ вивчено в роботі [1]. Крім того, задачу (1) у випадку лінійного оператора $\mathcal{B}$ та сім'ї сильнонелінійних операторів $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, досліджено в роботі [2], де встановлено достатні умови на вихідні дані $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, $\mathcal{B}$ та f для існування та єдиності розв'язку задачі (1) без обмежень на поведінку розв'язку і вихідних даних при $t \to -\infty$. Якщо ж оператори $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, є лінійними, то, як показують результати роботи [1], навіть у випадку $\mathcal{B} = I$ розв'язок задачі (1) може бути неєдиним у класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Тому ми досліджуватимемо існування та єдиність розв'язку задачі (1) у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Багато фізичних процесів, зокрема деякі дифузійні процеси у пористих середовищах (див. [3 – 5]), моделюються рівняннями та системами диференціальних рівнянь із частинними похідними, які можна подати при відповідному виборі простору V у вигляді (1). Мотивовані практичним застосуванням задачі для рівняння (1) інтенсивно вивчалися багатьма математиками. Зокрема, у випадку лінійних операторів $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S = [0, T]$, та $\mathcal{B}$ задача Коші для невиродженого рівняння (1) $(\mathcal{B}v = 0 \Leftrightarrow v = 0)$ з відповідною початковою умовою вивчалася у роботах [6 – 9]. Така ж задача для виродженого рівняння (1) (оператор $\mathcal{B}$ може набувати нульового значення на ненульових елементах) вивчалася у роботах [9 – 12]. У випадку, коли $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S = [0, T]$, — сім'я нелінійних операторів, задача Коші для рівняння (1) вивчалася в роботах [11, 13, 14]. Як було відмічено, задача без початкових умов для рівняння (1) досліджувалася у роботах [1, 2]. Крім того, ця задача вивчалася у класі інтегровних функцій на $S = (-\infty, 0)$ у роботах [11, 15], коли $\mathcal{B} = I$, а оператори $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, є майже лінійними. У роботах [16 – 19] досліджувалася задача без початкових умов (1) у класах обмежених та майже періодичних функцій при $\mathcal{B} = I$.

Зазначимо, крім того, що задача знаходження розв'язку сингулярного еволюційного рівняння

$$\frac{1}{h(\tau)}(\mathcal{B}w(\tau))' + \mathcal{A}(\tau, w(\tau)) = f(\tau), \quad 0 < \tau \le T_0, \tag{2}$$

де $T_0 > 0$ — деяке число, а $h(\cdot) > 0$ — локально інтегровна на $(0, T_0]$ функція така, що $\int_0^{T_0} h(\tau)d\tau = +\infty$, за допомогою заміни змінних $t = H(\tau)$, де $H(\cdot)$ — первісна функції $h(\cdot)$ на $(0, T_0]$, зводиться до задачі без початкових умов вигляду (1). Тобто функція w є розв'язком рівняння (2) тоді і лише тоді, коли функція $u \equiv w \circ H^{-1}$ є розв'язком задачі без початкових умов

$$(\mathcal{B}u(t))' + \mathcal{A}(H^{-1}(t), u(t)) = f(H^{-1}(t)), \quad -\infty < t \le H(T_0).$$

Дослідженню сингулярного еволюційного рівняння (2) (при $\mathcal{B} = I$) присвячено роботи [11, 15, 20], в яких вивчалася лише розв'язність задачі Коші для цього рівняння.

Опишемо будову цієї статті. У першому пункті наведено основні позначення та деякі допоміжні факти, які використовуватимемо далі. Задачу і основні результати сформульовано в п. 2. Третій пункт містить доведення основних результатів. В останньому пункті наведено простий приклад застосування отриманих результатів.

1. Основні позначення та допоміжні поняття. Нехай V — дійсний рефлексивний сепарабельний банахів простір, а S — дійсна числова вісь або промінь $(-\infty, T]$, $T \in \mathbb{R}$. Далі у випадку, коли $S = (-\infty, T]$, без обмеження загальності будемо вважати, що $T \ge 0$.

Введемо позначення, які використовуватимемо далі в роботі. Якщо X — нормований (напівнормований) простір, то через $\|\cdot\|_X$ позначатимемо норму (напівнорму) на ньому. Під X' розумітимемо спряжений до X простір, а під $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — канонічний скалярний добуток на $X' \times X$. Через $L_{2,\mathrm{loc}}(S; X)$ позначатимемо простір визначених на S зі значеннями в X функцій, звуження яких на будь-який відрізок $[t_1, t_2] \subset S$ належить $L_2(t_1, t_2; X)$. Відомо, що простір $L_{2,\mathrm{loc}}(S; X)$ можна ототожнити з деяким підпростором простору $\mathcal{D}'(S; X)$ розподілів на $\operatorname{int} S$ зі значеннями в X_w. Для функції v з простору $L_{2,\mathrm{loc}}(S; X)$ під v' розумітимемо її похідну в сенсі розподілів $\mathcal{D}'(S; X)$ [14]. Простір неперервних функцій з S в X позначатимемо через $C(S; X)$. Символом $\mathcal{D}(S)$ ми позначатимемо простір нескінченно диференційовних дійсних функцій на S з компактними носіями в $\operatorname{int} S$, наділений відповідною топологією (див. [14, с. 41]). Неперервне вкладення одного топологічного простору в інший позначатимемо символом "$\hookrightarrow$", а неперервне та щільне — "$\overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow}$".

Нехай $\mathcal{B}\colon V \to V'$ — лінійний неперервний симетричний (тобто $\langle \mathcal{B}v_1, v_2 \rangle_V = \langle \mathcal{B}v_2, v_1 \rangle_V \ \forall\, v_1, v_2 \in V$) і монотонний (тобто $\langle \mathcal{B}v, v \rangle_V \ge 0 \ \forall\, v \in V$) оператор. Тоді $\langle \mathcal{B}\cdot, \cdot \rangle_V$ — напівскалярний добуток, а $\|\cdot\|_{V_\mathcal{B}} \overset{\mathrm{df}}{=} \langle \mathcal{B}\cdot, \cdot \rangle_V^{1/2}$ — напівнорма на V. Позначимо поповнення простору V у цій напівнормі через $V_\mathcal{B}$. Очевидно, що $V \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} V_\mathcal{B}$ і для довільного $v \in V$ маємо $\|v\|_{V_\mathcal{B}} \le \sqrt{\|\mathcal{B}\|} \cdot \|v\|_V$, де $\|\mathcal{B}\|$ — норма оператора $\mathcal{B}$ у просторі $\mathcal{L}(V; V')$. Напівскалярний добуток $\langle \mathcal{B}\cdot, \cdot \rangle_V$ можна за неперервністю однозначно продовжити на $V_\mathcal{B}$. Через ототожнення функціоналів маємо вкладення $V'_\mathcal{B} \hookrightarrow V'$. На підставі теореми 3.5 гл. I монографії [9] простір $V'_\mathcal{B}$ є гільбертовим. Оператор $\mathcal{B}$ має єдине лінійне неперервне продовження $\mathcal{B}\colon V_{\mathcal{B}} \to V'_{\mathcal{B}}$. Скалярний добуток на $V'_{\mathcal{B}}$ задовольняє умову

$$(w, \mathcal{B}v)_{V'_{\mathcal{B}}} = \langle w, v\rangle_V, \qquad w \in V'_{\mathcal{B}}, \quad v \in V,$$

звідки, покладаючи $w = \mathcal{B}v$, маємо

$$\|\mathcal{B}v\|_{V'_{\mathcal{B}}} = \|v\|_{V_{\mathcal{B}}}, \quad v \in V_{\mathcal{B}}. \tag{3}$$

Обгрунтування цих фактів можна знайти в монографіях [9, 11].

2. Формулювання задачі і основних результатів. Припустимо, що задано сім'ю операторів $\mathcal{A}(t,\cdot)\colon V \to V'$, $t \in S$, таких, що:

1) для довільної вимірної за Бохнером функції $v\colon S \to V$ функція $w(\cdot) = \mathcal{A}(\cdot, v(\cdot))\colon S \to V'$ є вимірною на S;

2) якщо $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V)$, то $\mathcal{A}(\cdot, v(\cdot)) \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V')$.

Розглянемо задачу: для заданої функції $f \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V')$ знайти функцію $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V) \bigcap C(S; V_{\mathcal{B}})$, що задовольняє рівняння

$$(\mathcal{B}u(t))' + \mathcal{A}(t, u(t)) = f(t) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(S; V'). \tag{4}$$

Далі цю задачу називатимемо *задачею без початкових умов для виродженого неявного операторного диференціального рівняння* (4) або просто *задачею* (4).

Теорема 1 (єдиність розв'язку). *Нехай*:

3) *для майже всіх* $t \in S$ *і довільних* $v, w \in V$, $v \neq w$, *виконується нерівність*

$$\langle \mathcal{A}(t,v) - \mathcal{A}(t,w),\ v - w\rangle_V > \gamma(t)\varphi\big(\|v-w\|^2_{V_{\mathcal{B}}}\big),$$

де $\gamma \in L_{1,\mathrm{loc}}(S)$, $\gamma(t) > 0$ *для майже всіх* $t \in S$, $\int_{-\infty}^{0}\gamma(t)\,dt = +\infty$, *а функція* $\varphi \in C([0,+\infty))$ *така, що* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$ *при* $\tau > 0$ *і* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)} = +\infty$.

Тоді задача (4) *не може мати більше одного розв'язку з простору* $L_\infty(S; V_{\mathcal{B}})$. *Більш того, якщо функція* Φ^{-1}, *обернена до* $\Phi(s) \overset{\mathrm{df}}{=} \displaystyle\int_1^s \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}$, $s > 0$, *для будь-якого* $a \geq 0$ *задовольняє умову*

$$\Phi^{-1}(a+b) = O\big[\Phi^{-1}(b)\big] \quad \textit{при} \quad b \to +\infty, \tag{5}$$

то задача (4) *не може мати більше одного розв'язку, що задовольняє умову*

$$\|u(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} = o\left[\Phi^{-1}\left(2\int_t^0 \gamma(\tau)\,d\tau\right)\right] \quad \textit{при} \quad t \to -\infty. \tag{6}$$

***Наслідок* 1.** *Нехай в умовах теореми* 1 *функція* $\varphi(\tau) = \tau$, $\tau \geq 0$. *Тоді задача* (4) *не може мати більше одного розв'язку, що задовольняє умову*

$$\|u(t)\|_{V_{\mathcal{B}}} = o\left[\exp\left(\int_t^0 \gamma(\tau)\,d\tau\right)\right] \quad \textit{при} \quad t \to -\infty.$$

Теорема 2 (існування розв'язку). *Нехай вкладення* $V \hookrightarrow V_{\mathcal{B}}$ *є компактним та*

4) *існують функції* $\alpha_1 \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(S)$ *і* $\alpha_2 \in L_{2,\mathrm{loc}}(S)$ *такі, що*

$$\|\mathcal{A}(t,v)\|_{V'} \leq \alpha_1(t)\|v\|_V + \alpha_2(t), \quad v \in V, \quad \textit{для майже всіх } t \in S;$$

5) $\langle \mathcal{A}(t,v_1) - \mathcal{A}(t,v_2),\ v_1 - v_2\rangle_V \geq 0\ \ \forall\, v_1, v_2 \in V$, *для майже всіх* $t \in S$;

6) *існують число* $\beta_1 > 0$ *та функція* $\beta_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(S)$, $\beta_2 \geq 0$, *такі, що*

$$\langle \mathcal{A}(t,v), v\rangle_V \geq \beta_1\|v\|^2_V + \beta_2(t), \quad v \in V, \quad \textit{для майже всіх } t \in S;$$

7) *для майже всіх* $t \in S$ *і довільних* $v_1, v_2 \in V$ *дійснозначна функція* $s \mapsto$ $\mapsto \langle \mathcal{A}(t, v_1 + s v_2), v_2 \rangle_V$ *є неперервною на* $\mathbb{R}$.

Крім того, припустимо, що для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \| \mathcal{B} \| < 2\beta_1$, *маємо*

$$\int_{t-1}^{t} \| f(\tau) \|_{V'}^2 d\tau + \int_{t-1}^{t} \beta_2(t) d\tau \le C_1 e^{-\lambda t}, \quad t \le 0, \tag{7}$$

де $C_1 > 0$ — *стала, яка залежить від* f *та* β_2.

Тоді існує розв'язок задачі (4), *що задовольняє оцінку*

$$\| u(t) \|_{V_\mathcal{B}}^2 + \int_{t-1}^{t} \| u(\tau) \|_V^2 d\tau \le C_2 e^{-\lambda t}, \quad t \le 0, \tag{8}$$

де C_2 — *додатна стала, що залежить лише від* C_1, β_1, λ *і оператора* $\mathcal{B}$.

***Зауваження* 1.** Для того щоб сім'я операторів $\mathcal{A}(t, \cdot) : V \to V'$, $t \in S$, задовольняла умову 1, достатньо, щоб вона задовольняла умови 6, 7, а функція $w(\cdot) = \mathcal{A}(\cdot, v)$ була вимірною на S для довільного $v \in V$ (див., наприклад, [11]). Умова ж 2 виконується при виконанні умов 1 та 4.

Теорема 3 (існування єдиного розв'язку). *Нехай вкладення* $V \hookrightarrow V_\mathcal{B}$ *є компактним, сім'я операторів* $\mathcal{A}(t, \cdot) : V \to V'$, $t \in S$, *задовольняє умови* 4, 6, 7 *і*

8) *існує стала* $K_1 > 0$ *така, що для майже всіх* $t \in S$ *і довільних* $v, w \in$ $\in V$, $v \ne w$, *виконується нерівність*

$$\langle \mathcal{A}(t, v) - \mathcal{A}(t, w), v - w \rangle_V > K_1 \| v - w \|_{V_\mathcal{B}}^2 .$$

Тоді якщо для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \| \mathcal{B} \| < 2\beta_1$ *і* $\lambda < 2K_1$, *виконується нерівність* (7), *то існує єдиний розв'язок задачі* (4) *у класі функцій* $v \in C(S; V_\mathcal{B})$, *що задовольняють умову*

$$\| v(t) \|_{V_\mathcal{B}} = o\big[e^{-K_1 t} \big] \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{9}$$

Більш того, цей розв'язок також задовольняє оцінку (8).

3. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми* 1.** Нехай u_1, u_2 — два різні розв'язки задачі (4). Тоді для $w \overset{\text{df}}{=} u_1 - u_2$ з рівняння (4) отримуємо

$$(\mathcal{B} w(t))' + \mathcal{A}(t, u_1(t)) - \mathcal{A}(t, u_2(t)) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(S; V'). \tag{10}$$

Звідси та з умови 2 випливає, що $(\mathcal{B} w)' \in L_{2,\text{loc}}(S; V')$, а тому на підставі леми 2.1 роботи [2] маємо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| w(t) \|_{V_\mathcal{B}}^2 = \big\langle (\mathcal{B} w(t))', w(t) \big\rangle_V \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{11}$$

Помноживши (10) скалярно на w, для майже всіх $t \in S$ одержимо

$$\langle (\mathcal{B} w(t))', w(t) \rangle_V + \langle \mathcal{A}(t, u_1(t)) - \mathcal{A}(t, u_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V = 0. \tag{12}$$

З (11) і (12) отримаємо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| w(t) \|_{V_\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{A}(t, u_1(t)) - \mathcal{A}(t, u_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V = 0 \tag{13}$$

майже скрізь на S.

З (13) та з умови 3 дістанемо диференціальну нерівність

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2\gamma(t) \varphi(y(t)) \le 0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S, \tag{14}$$

де $y(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{V_\mathcal{B}}$, $t \in S$, — абсолютно (локально) неперервна функція. Якщо $y \equiv 0$ на S, то з (13) та з умови 3 випливає, що $u_1(t) = u_2(t)$ для майже всіх $t \in S$, а це суперечить тому, що u_1 та u_2 — два різні розв'язки задачі (4). Тому внаслідок неперервності функції y існує точка $t_0 \in S$ така, що $y(t_0) > 0$. Оскільки $\dfrac{dy(t)}{dt} \le 0$ для майже всіх $t \in S$, то функція y не зростає на S. Тому $y(t) \ge y(t_0) > 0$ при $t \le t_0$. Розглянемо нерівність (14) на $(-\infty, t_0]$. Поділимо цю нерівність на $\varphi(y)$ і зінтегруємо по t від t_1 до t_0, де t_1 $(t_1 < t_0)$ — довільне число. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\int_1^{y(t_1)} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} - \int_1^{y(t_0)} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \ \ge\ 2\int_{t_1}^{t_0} \gamma(t)\,dt. \tag{15}$$

Припустимо, що $u_1,\ u_2 \in L_\infty(S; V_\mathcal{B})$, тоді функція y є обмеженою на S. Звідси і з нерівності (15), врахувавши, що $\int_{-\infty}^{t_0} \gamma(t)\,dt = +\infty$, отримаємо суперечність, якщо візьмемо t_1 достатньо меншим за t_0. Тому $u_1(t) = u_2(t)$ для майже всіх $t \in S$. Першу частину теореми доведено.

Доведемо другу частину теореми. Нехай функція Φ^{-1} (обернена до функції Φ) задовольняє умову (5), а для розв'язків u_1 та u_2 виконується умова (6). Тоді функція y задовольняє умову

$$y(t) = o\left[\Phi^{-1}\left(2\int_t^0 \gamma(\tau)\,d\tau\right)\right] \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{16}$$

Візьмемо $t_2 \le \min\{0, t_0\}$ таке, що $\Phi(y(t_0)) + 2\int_{t_2}^{t_0} \gamma(\tau)\,d\tau \ge 0$. З (5) і (16) маємо

$$y(t) = o\left[\Phi^{-1}\left(2\int_t^{t_2} \gamma(\tau)\,d\tau\right)\right] \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{17}$$

З нерівності (15) дістаємо

$$\Phi(y(t_1)) \ \ge\ \Phi(y(t_0)) + 2\int_{t_1}^{t_0} \gamma(t)\,dt \quad \forall\, t_1 \le t_2.$$

Звідси внаслідок того, що функція Φ^{-1} монотонно зростає, отримуємо

$$y(t) \ \ge\ \Phi^{-1}\left(\Phi(y(t_0)) + 2\int_t^{t_0} \gamma(\tau)\,d\tau\right) \ \ge\ \Phi^{-1}\left(2\int_t^{t_2} \gamma(\tau)\,d\tau\right) \quad \forall\, t \le t_2. \tag{18}$$

Але (18) суперечить (17). Тому $u_1(t) = u_2(t)$ для майже всіх $t \in S$.

Теорему доведено.

***Доведення теореми* 2** розіб'ємо на три кроки.

Крок 1 (апроксимація розв'язку). Побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі (4). Визначимо $S_k \overset{\text{df}}{=} S \cap \{t \in \mathbb{R} : t \ge -k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу знаходження функції $\hat{u}_k \in L_2(S_k; V)$, $\mathcal{B}\hat{u}_k \in C(S_k; V'_\mathcal{B})$, такої, що

$$\begin{gathered} (\mathcal{B}\hat{u}_k(t))' + \mathcal{A}(t, \hat{u}_k(t)) = f(t) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(S_k; V'), \\ \lim_{t \to -k} \mathcal{B}\hat{u}_k(t) = 0 \quad \text{в} \quad V'_\mathcal{B}. \end{gathered} \tag{19}$$

Існування єдиного розв'язку задачі (19) випливає з наслідку III.6.3 [11]. Продовжимо функцію $\hat{u}_k$ на весь проміжок S, поклавши її рівною нулю на $(-\infty, -k]$, і позначимо це продовження через u_k. Очевидно, що функція u_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ є розв'язком задачі без початкових умов

$$(\mathcal{B}u_k(t))' + \mathcal{A}(t, u_k(t)) = f_k(t) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(S; V'), \tag{20}$$

де $f_k(t) = f(t)$ на S_k і $f_k(t) = \mathcal{A}(t, 0)$ на $(-\infty, -k]$.

Крок 2 (оцінки апроксимуючих розв'язків). Тепер для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдемо оцінки розв'язку u_k задачі (20). З (20) випливає, що $(\mathcal{B}u_k)' \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V')$, а тому на підставі леми 2.1 [2] маємо, що $u_k \in C(S; V_{\mathcal{B}})$ і

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} = \langle(\mathcal{B}u_k(t))', u_k(t)\rangle_V \tag{21}$$

для майже всіх $t \in S$.

Нехай $\tau_1, \tau_2 \in S$, $\tau_1 < \tau_2$, — довільні дійсні числа. Підставимо u_k в рівняння (20) і отриману рівність, помноживши скалярно на $\exp(\lambda t)u_k(t)$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ $\left(\lambda\|\mathcal{B}\| < 2\beta_1\right)$ — поки що довільне число, зінтегруємо по t від τ_1 до τ_2. В результаті отримаємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{\langle(\mathcal{B}u_k(t))', u_k(t)\rangle_V + \langle\mathcal{A}(t, u_k(t)), u_k(t)\rangle_V\right\} e^{\lambda t} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle f_k(t), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt. \tag{22}$$

З (22), використавши (21), матимемо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} e^{\lambda t} dt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle\mathcal{A}(t, u_k(t)), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle f_k(t), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt. \tag{23}$$

Зінтегрувавши перший доданок у лівій частині рівності (23) за формулою інтегрування частинами, дістанемо

$$\|u_k(\tau_2)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} e^{\lambda\tau_2} + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle\mathcal{A}(t, u_k(t)), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt =$$

$$= \lambda\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} e^{\lambda t} dt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle f_k(t), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt + \|u_k(\tau_1)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} e^{\lambda\tau_1}. \tag{24}$$

Оцінимо, використавши умову 6, другий доданок у лівій частині рівності (24):

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle\mathcal{A}(t, u_k(t)), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt \geq 2\beta_1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|^2_V e^{\lambda t} dt - 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \beta_2(t) e^{\lambda t} dt. \tag{25}$$

Оскільки $\|v\|^2_{V_{\mathcal{B}}} \leq \|\mathcal{B}\|\|v\|^2_V \ \ \forall\, v \in V$, то маємо оцінку

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} e^{\lambda t} dt \leq \|\mathcal{B}\|\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|^2_V e^{\lambda t} dt. \tag{26}$$

Далі, застосувавши нерівність Юнга з $\varepsilon > 0$, оцінимо другий доданок у правій частині рівності (24):

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle f_k(t), u_k(t)\rangle_V e^{\lambda t} dt \leq \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|^2_V e^{\lambda t} dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|^2_{V'} e^{\lambda t} dt. \tag{27}$$

З рівності (24), використавши (25) – (27) з $\varepsilon = \beta_1 - \lambda\|\mathcal{B}\|/2$, якщо $\lambda > 0$, і $\varepsilon = \beta_1$ в іншому випадку, отримаємо

$$\|u_k(\tau_2)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_2} + K_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|_V^2 e^{\lambda t} dt \le$$

$$\le C_3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|_{V'}^2 e^{\lambda t} dt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \beta_2(t) e^{\lambda t} dt + \|u_k(\tau_1)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_1}, \tag{28}$$

де $K_2 > 0$ і $C_3 > 0$ — деякі сталі, що залежать лише від β_1, оператора $\mathcal{B}$ і, можливо, λ.

Покладемо

$$M \overset{\text{df}}{=} e^{|\lambda|} C_1(C_3 + 2)\left(1 + \frac{\|\mathcal{B}\|}{K_2}\right).$$

Тепер покажемо, що для довільних $\tau_1, \tau_2 \in S_k$ таких, що $\tau_1 < \tau_2 \le 0$ і $\tau_2 - \tau_1 \le 1$, та λ з умови теореми виконується нерівність

$$\|u_k(\tau_2)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_2} \le \max\left\{\|u_k(\tau_1)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_1},\ M\right\}. \tag{29}$$

Якщо $\|u_k(\tau_2)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_2} \le \|u_k(\tau_1)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_1}$, то нерівність (29) виконується. Тому припустимо, що $\|u_k(\tau_2)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_2} > \|u_k(\tau_1)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_1}$. Тоді з (28) випливає нерівність

$$K_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|_V^2 e^{\lambda t} dt \le C_3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|_{V'}^2 e^{\lambda t} dt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \beta_2(t) e^{\lambda t} dt. \tag{30}$$

Оскільки $\tau_2 - \tau_1 \le 1$, то з (7), врахувавши, що $\max\limits_{t\in[\tau_2-1,\tau_2]} \left\{e^{\lambda t}\right\} \le e^{|\lambda|} e^{\lambda\tau_2}$, отримаємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|_{V'}^2 e^{\lambda t} dt \le \int_{\tau_2-1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|_{V'}^2 e^{\lambda t} dt \le e^{|\lambda|} e^{\lambda\tau_2} \int_{\tau_2-1}^{\tau_2} \|f_k(t)\|_{V'}^2 dt \le C_1 e^{|\lambda|} \tag{31}$$

та

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \beta_2(t) e^{\lambda t} dt \le \int_{\tau_2-1}^{\tau_2} \beta_2(t) e^{\lambda t} dt \le e^{|\lambda|} e^{\lambda\tau_2} \int_{\tau_2-1}^{\tau_2} \beta_2(t) dt \le C_1 e^{|\lambda|}. \tag{32}$$

Звідси та з нерівності (30) дістанемо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|_V^2 e^{\lambda t} dt \le e^{|\lambda|} \frac{C_1(C_3 + 2)}{K_2}. \tag{33}$$

З нерівностей (26), (33) та неперервності функції $t \mapsto \|u_k(t)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda t}$ на $[\tau_1, \tau_2]$ випливає існування точки $\tau_3 \in [\tau_1, \tau_2]$ такої, що

$$\|u_k(\tau_3)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_3} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda t} dt \le \|\mathcal{B}\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|u_k(t)\|_V^2 e^{\lambda t} dt \le e^{|\lambda|} C_1(C_3 + 2) \frac{\|\mathcal{B}\|}{K_2}. \tag{34}$$

Тепер застосуємо нерівність (28) для $\tau_1 = \tau_3$. Використавши при цьому (31) – (34), будемо мати

$$\|u_k(\tau_2)\|_{V_{\mathcal{B}}}^2 e^{\lambda\tau_2} \le e^{|\lambda|} C_1(C_3 + 2)\left(1 + \frac{\|\mathcal{B}\|}{K_2}\right) = M.$$

Отже, нерівність (29) доведено.

Оскільки $u_k(t) = 0$ для майже всіх $t \le -k$, то з (29) випливає оцінка

$$\| u_k(t) \|_{V_{\mathcal{B}}}^2 \le M e^{-\lambda t} \quad \forall\, t \le 0. \tag{35}$$

Покладемо в (33) $\tau_1 = t - 1$, $\tau_2 = t$, де $t \le 0$ — довільне число. Звідси, врахувавши, що $\min\limits_{\tau \in [t-1, t]} \left\{ e^{\lambda \tau} \right\} \ge e^{-|\lambda|} e^{\lambda t}$, отримаємо

$$\int\limits_{t-1}^{t} \| u_k(\tau) \|_V^2 \, d\tau \le e^{|\lambda|} e^{-\lambda t} \int\limits_{t-1}^{t} \| u_k(\tau) \|_V^2 e^{\lambda \tau} d\tau \le \frac{e^{2|\lambda|} C_1 (C_3 + 2)}{K_2} e^{-\lambda t}. \tag{36}$$

З оцінок (28) при $\lambda = 0$ і (35) при $t = 0$, вибравши $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t > 0$, де t — довільне число, дістанемо

$$\| u_k(t) \|_{V_{\mathcal{B}}}^2 + K_2 \int\limits_0^t \| u_k(\tau) \|_V^2 \, d\tau \le C_3 \int\limits_0^t \| f_k(\tau) \|_{V'}^2 \, d\tau + 2 \int\limits_0^t \beta_2(\tau) d\tau + M. \tag{37}$$

З оцінок (35) – (37) і обмеженості послідовності $\{ f_k \}_{k=1}^{+\infty}$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(S; V')$ випливає, що

$$\text{послідовність } \{ u_k \}_{k=1}^{+\infty} \text{ є обмеженою}$$
$$\text{у просторі } L_{\infty,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}}) \cap L_{2,\mathrm{loc}}(S; V), \tag{38}$$

а з (38) і умови 4 — що

$$\text{послідовність } \{ \mathcal{A}(\cdot, u_k(\cdot)) \}_{k=1}^{+\infty} \text{ є обмеженою у просторі } L_{2,\mathrm{loc}}(S; V'). \tag{39}$$

Оскільки оператор $\mathcal{B}\colon V \to V_{\mathcal{B}}$ є лінійним, то його реалізація $\mathcal{B}\colon L_{2,\mathrm{loc}}(S; V) \to L_{2,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}})$ також є лінійним і неперервним оператором (див., наприклад, [11]). Тому з (3) і умови (38) випливає, що

$$\text{послідовність } \{ \mathcal{B} u_k \}_{k=1}^{+\infty} \text{ є обмеженою у просторі } L_{\infty,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}}'). \tag{40}$$

Крок 3 (граничний перехід). Оскільки V — рефлексивний банахів простір, а $V_{\mathcal{B}}'$ — гільбертів простір, то з (38) – (40) випливає, що з послідовності $\{ u_k \}_{k=1}^{+\infty}$ можна вибрати підпослідовність (яку ми знову позначатимемо через $\{ u_k \}_{k=1}^{+\infty}$) таку, що

$$u_k(\cdot) \xrightarrow{k \to \infty} u(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S; V), \tag{41}$$

$$\mathcal{B} u_k(\cdot) \xrightarrow{k \to \infty} \zeta(\cdot) \quad *\text{-слабко в} \quad L_{\infty,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}}'), \tag{42}$$

$$\mathcal{A}(\cdot, u_k(\cdot)) \xrightarrow{k \to \infty} \chi(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S; V'). \tag{43}$$

З (41), враховуючи, що оператор $\mathcal{B}$, будучи неперервним, є слабконеперервним, маємо

$$\mathcal{B} u_k(\cdot) \xrightarrow{k \to \infty} \mathcal{B} u(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}}'). \tag{44}$$

Перейдемо в (20) до границі при $k \to \infty$, врахувавши при цьому (43), (44) і означення функції f_k. В результаті отримаємо

$$(\mathcal{B} u(t))' + \chi(t) = f(t) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(S; V'). \tag{45}$$

Звідси і з леми 2.1 роботи [2] випливає, що $u \in C(S; V_{\mathcal{B}})$. Крім того, з (42) і (44) маємо $\mathcal{B} u(t) = \zeta(t)$ для майже всіх $t \in S$. Тому зі збіжності (42) випливає, що

$$\mathcal{B} u_k(\cdot) \xrightarrow{k \to \infty} \mathcal{B} u(\cdot) \quad *\text{-слабко в} \quad L_{\infty,\mathrm{loc}}(S; V_{\mathcal{B}}'). \tag{46}$$

Отже, теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що

$$\chi(t) \;=\; \mathcal{A}(t, u(t)) \quad \text{в} \quad V' \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{47}$$

Доведемо (47), використавши метод монотонності. Візьмемо довільну функцію $\psi \geq 0$ з $\mathcal{D}(S)$ і для будь-якого $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V)$ позначимо

$$E_k \;=\; \int\limits_S \langle \mathcal{A}(t, u_k(t)) - \mathcal{A}(t, v(t)),\, u_k(t) - v(t) \rangle_V \psi(t)\, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З умови (5) випливає, що $E_k \geq 0$.

Помноживши (20) скалярно на ψu_k та зінтегрувавши отриману рівність по t в S, отримаємо

$$\int\limits_S \left\{ \langle (\mathcal{B} u_k(t))', u_k(t) \rangle_V + \langle \mathcal{A}(t, u_k(t)), u_k(t) \rangle_V \right\} \psi(t)\, dt \;=\; \int\limits_S \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{48}$$

З (48), використавши (21), означення функції f_k і формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int\limits_S \langle \mathcal{A}(t, u_k(t)),\, u_k(t) \rangle_V \psi(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_S \| u_k(t) \|^2_{V_{\mathcal{B}}} \psi'(t)\, dt + \int\limits_S \langle f(t), u_k(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{49}$$

Нехай t_1, t_2 — довільні числа такі, що $\operatorname{supp} \psi' \subset [t_1, t_2] \subset S$. З (41) маємо слабку збіжність до u послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ у просторі $L_2(t_1, t_2; V)$. Звідси на підставі компактності вкладення $V \hookrightarrow V_{\mathcal{B}}$ та леми 2.2 роботи [2] випливає, що з послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ можна виділити підпослідовність, за якою ми збережемо те саме позначення:

$$u_k(\cdot) \xrightarrow{k \to \infty} u(\cdot) \quad \text{сильно в} \quad L_2(t_1, t_2; V_{\mathcal{B}}). \tag{50}$$

З (50) маємо

$$\int\limits_S \| u_k(t) \|^2_{V_{\mathcal{B}}} \psi'(t)\, dt \xrightarrow{k \to \infty} \int\limits_S \| u(t) \|^2_{V_{\mathcal{B}}} \psi'(t)\, dt. \tag{51}$$

Використавши (41) та (51), перейдемо в (49) до границі

$$\int\limits_S \langle \mathcal{A}(t, u_k(t)),\, u_k(t) \rangle_V \psi(t)\, dt \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{2} \int\limits_S \| u(t) \|^2_{V_{\mathcal{B}}} \psi'(t)\, dt + \int\limits_S \langle f(t), u(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{52}$$

Домножимо (45) скалярно на ψu та зінтегруємо отриману рівність по t в S. В результаті дістанемо

$$\int\limits_S \langle \chi(t), u(t) \rangle_V \psi(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_S \| u(t) \|^2_{V_{\mathcal{B}}} \psi'(t)\, dt + \int\limits_S \langle f(t), u(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{53}$$

З (50) та (53) маємо

$$\int\limits_S \langle \mathcal{A}(t, u_k(t)),\, u_k(t) \rangle_V \psi(t)\, dt \xrightarrow{k \to \infty} \int\limits_S \langle \chi(t), u(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{54}$$

Використовуючи (41), (43) та (54), знаходимо

$$0 \;\leq\; \lim_{k \to \infty} E_k \;=\; \int\limits_S \langle \chi(t) - \mathcal{A}(t, v(t)),\, u(t) - v(t) \rangle_V \psi(t)\, dt. \tag{55}$$

Покладемо в (55) $v = u - sw$, де $s > 0$, а $w \in L_{2,\mathrm{loc}}(S; V)$ — довільна функція. В результаті отримаємо

$$\int\limits_S \langle \chi(t) - \mathcal{A}(t, u(t) - sw(t)),\, w(t) \rangle_V \psi(t)\, dt \;\geq\; 0. \tag{56}$$

Спрямувавши в (56) s до 0, на підставі умови 7 дістанемо

$$\int_S \langle \chi(t) - \mathcal{A}(t, u(t)),\ w(t)\rangle_V \psi(t)\,dt \ \geq\ 0.$$

Звідси внаслідок довільності $\psi \geq 0$ з $\mathcal{D}(S)$ і w з $L_{2,\mathrm{loc}}(S; V)$ отримаємо рівність (47).

Оцінка ж розв'язку (8) випливає безпосередньо з оцінок (35), (36), властивості (3), збіжностей (41), (46) та теорем 1 і 9 монографії [21, с. 173, 179].

***Доведення теореми* 3.** Існування єдиного розв'язку u задачі (4) у класі функцій, що задовольняють оцінку (8), випливає з теореми 2. Крім того, з оцінки (8) і того, що $\lambda < 2K_1$, маємо

$$\|u(t)\|^2_{V_{\mathcal{B}}} \ \leq\ C_2 e^{-\lambda t} \ =\ C_2 e^{-2K_1 t} e^{(2K_1 - \lambda)t} \ =\ o[e^{-2K_1 t}] \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \qquad (57)$$

Звідси та з наслідку 1 випливає, що u — єдиний розв'язок задачі (4) у класі функцій, що задовольняють умову (9).

4. Приклад. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $S = \mathbb{R}$. Позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ простір Соболєва, отриманий в результаті замикання простору $\mathcal{D}(\Omega)$ щодо норми $\|w\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 + |w|^2\right) dx\right)^{1/2}$, а через $H^{-1}(\Omega)$ — спряжений до $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ простір. З теореми Релліха – Кондрашова (див. [11, с. 57]) випливає, що вкладення $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ є компактним.

Покладемо $V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, тоді $V' = H^{-1}(\Omega)$. Визначимо сім'ю операторів $\mathcal{A}(t, \cdot)\colon V \to V'$, $t \in \mathbb{R}$, за правилом

$$\langle \mathcal{A}(t, u), v\rangle_V \ =\ \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i}(x) v_{x_j}(x) + a(x,t) u(x) v(x) \right\} dx, \quad u, v \in V,$$

де a_{ij}, $a \in L_\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, $i, j = \overline{1, n}$, — деякі задані функції, що задовольняють умову: для майже всіх $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i \xi_j + a(x,t)\xi_0^2 \ \geq\ \bar{a} \sum_{i=0}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_0 \in \mathbb{R},$$

де $\bar{a} = 0$ — деяка стала.

Також визначимо оператор $\mathcal{B}\colon V \to V'$ за правилом

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle_V \ =\ \int_\Omega b(x) u(x) v(x)\, dx, \quad u, v \in V,$$

де $b \in L_\infty(\Omega)$ — деяка функція така, що $b(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$. Зауважимо, що b може дорівнювати нулю на множині додатної міри.

Припустимо, що $\bar{b} \overset{\mathrm{df}}{=} \|b\|_{L_\infty(\Omega)} > 0$. З означення оператора $\mathcal{B}$, нерівностей Коші – Буняковського і Гельдера випливає, що $\|\mathcal{B}\| \leq \bar{b}$. Крім того, $\|v\|^2_{V_{\mathcal{B}}} \leq \bar{b}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}$ для довільного $v \in L_2(\Omega)$. Звідси і з компактності вкладення $v \hookrightarrow L_2(\Omega)$ маємо компактність вкладення $V \hookrightarrow V_{\mathcal{B}}$.

Нехай $\lambda < 2\bar{a}/\bar{b}$ — довільне число, $f \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ — функція така, що

$$\int\limits_{t-1}^{t}\int\limits_{\Omega}|f(x,\tau)|^2 dx d\tau \;\le\; C_4 e^{-\lambda t}, \quad t \le 0,$$

де $C_4 > 0$ — залежна від f стала, $f(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} f(t)(x)$. Тоді с теореми 3 випливає існування єдиного узагальненого розв'язку $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};V) \bigcap C(\mathbb{R};V_{\mathcal{B}})$ задачі без початкових умов для лінійного еліптико-параболічного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + a(x,t)u \;=\; f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},$$

з однорідною крайовою умовою Діріхле у класі функцій, що задовольняють умову

$$\int\limits_{\Omega} b(x)u^2(x,t)dx \;=\; o\left[\exp\left(-\frac{2\overline{a}t}{\overline{b}}\right)\right] \quad \text{при} \quad t\to-\infty,$$

де $u(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} u(t)(x)$.

1. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3 – 44.
2. *Bokalo M., Dmytryshyn Yu.* Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations // Electron. J. Different. Equat. – 2008. – **2008**, № 4. – P. 1 – 16.
3. *Clark G. W., Showalter R. E.* Fluid flow in a layered medium // Ouart. Appl. Math. – 1994. – **52**, № 4. – P. 777 – 795.
4. *Clark G. W., Showalter R. E.* Two-scale convergence of a model for flow in a partially fissured medium // Electron. J. Different. Equat. – 1999. – **1999**, № 2. – P. 1 – 20.
5. *Showalter R. E., Visarraga D. B.* Double-diffusion models from a highly-heterogeneous medium // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **295**. – P. 191 – 210.
6. *Showalter R. E.* Existence and representation theorems for semilinear Sobolev equation in Banach space // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – **3**, № 3. – P. 527 – 643.
7. *Showalter R. E.* Equations with operators forming a right angle // Pacif. J. Math. – 1973. – **45**, № 1. – P. 357 – 362.
8. *Lagnese J.* Existence, uniqueness and limiting behavior of solutions of a class of differential equations in Banach space // Ibid. – 1974. – **53**, № 2. – P. 473 – 485.
9. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations // Monogr. and Stud. Math. – London etc.: Pitman, 1977. – **1**. – vi + 212 p.
10. *Showalter R. E.* Degenerate evolution equations and applications // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – **23**, № 8. – P. 655 – 677.
11. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations // Math. Surv. and Monogr. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – **49**. – xiv + 278 p.
12. *Мельникова И. В.* Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 892 – 910.
13. *Showalter R. E.* Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – **6**, № 1. – P. 25 – 42.
14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
15. *Showalter R. E.* Singular nonlinear evolution equations // Rocky Mountain J. Math. – 1980. – **10**, № 3. – P. 499 – 507.
16. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
17. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
18. *Bahaj M., Sidki O.* Almost periodic solutions of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces // Electron. J. Different. Equat. – 2002. – **2002**, № 98. – P. 1 – 11.
19. *Hu Z.* Boundedness and Stepanov's almost periodicity of solutions // Ibid. – 2005. – **2005**, № 35. – P. 1 – 7.
20. *Freedman M. A.* Existence of strong solutions to singular nonlinear evolution equations // Pacif. J. Math. – 1985. – **120**, № 2. – P. 331 – 344.
21. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Одержано 23.05.08