К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 515.126, 517.91

Т. В. Будницька (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

КЛАСИФІКАЦІЯ ТОПОЛОГІЧНО СПРЯЖЕНИХ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

We investigate affine maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. We prove the theorem on topological conjugacy of an affine map having at least one fixed point with corresponding linear map. We obtain the classification up to topological conjugacy of affine maps from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and also of those affine maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, that have at least one fixed point and whose linear parts are not periodic.

Рассматриваются аффинные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Доказана теорема о топологической сопряженности аффинного отображения, имеющего хотя бы одну неподвижную точку, с соответствующим линейным отображением. Получена классификация, с точностью до топологической сопряженности, аффинных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а также тех аффинных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, которые имеют хотя бы одну неподвижную точку и чьи линейные части не являются периодическими.

1. Вступ. У роботі розглядаються матриці над полем дійсних чисел.

Подібні $(n \times n)$-матриці A та B будемо позначати $A \overset{l}{\sim} B$. Таким чином, два лінійних відображення $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називають *лінійно спряженими*, якщо існує бієктивне лінійне відображення $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$ (позначатимемо $f \overset{l}{\sim} g$).

Означення 1.1. *Відображення* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *називають топологічно спряженими* (*і позначають* $f \overset{t}{\sim} g$), *якщо існує гомеоморфізм* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *такий, що*

$$g = h \circ f \circ h^{-1}.$$

Проблема топологічної класифікації лінійних відображень з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ давно привертала увагу математиків. Значний вклад у вирішення цього питання зробили N. H. Kuiper та J. W. Robbin [1, 2], які класифікували всі неперіодичні лінійні відображення. Задачу топологічної класифікації періодичних відображень частково розв'язали S. E. Cappell та J. L. Shaneson [3 – 5] та W. C. Hsiang та W. Pardon [6], I. Madsen та M. Rothenberg [7], R. Schultz [8]. Та, незважаючи на це, топологічна класифікація періодичних лінійних відображень ще й сьогодні залишається до кінця не вивченою, а разом з цим залишається не розв'язаною задача топологічної класифікації всіх лінійних відображень.

Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A — $(n \times n)$-матриця, $b \in \mathbb{R}^n$ — фіксований вектор.

Відображення вигляду $f(x) = Ax + b$ називають *афінним відображенням*, а матрицю A — *лінійною частиною* відображення f.

Проблема топологічної класифікації афінних відображень залишається відкритою. Дослідженню цього питання й присвячено дану статтю, в якій отримано класифікацію, з точністю до топологічної спряжености, частини афінних відображень з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, а також всіх афінних відображень з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

2. Топологічна класифікація лінійних відображень. Для класифікації афінних відображень, з точністю до топологічної спряженості, використовується аналогічна класифікація лінійних відображень, тому нагадаємо деякі вже відомі результати.

Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення. Тоді $\mathbb{R}^n$ можна розкласти в пряму суму своїх f-інваріантних підпросторів:

$$\mathbb{R}^n = W^+(f) \oplus W^-(f) \oplus W^\infty(f) \oplus W^0(f).$$

Визначимо відображення $f_\alpha = f|_{W^\alpha(f)}$, $\alpha = +, -, \infty, 0$, таким чином:

Відображення	Характеристичні числа λ відображення
f_+	$0 < \lvert\lambda\rvert < 1$
f_-	$\lvert\lambda\rvert > 1$
f_∞	$\lambda = 0$
f_0	$\lvert\lambda\rvert = 1$

Позначимо через $\dim(f_\alpha)$ розмірність $W^\alpha(f)$, а через $\operatorname{or}(f)$ знак визначника матриці, що відповідає бієктивному відображенню f; якщо $\operatorname{or}(f) = +1$, то f зберігає орієнтацію, якщо $\operatorname{or}(f) = -1$, то f орієнтацію не зберігає [1, 2].

Відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називають *періодичним*, якщо існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $f^k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Найменше таке число k називається *періодом* відображення f.

Теорема 2.1 [1, 2] дає топологічну класифікацію неперіодичних лінійних відображень.

Теорема 2.1. *Нехай $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — лінійні відображення, які не є періодичними. Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли* $\dim(f_+) = \dim(g_+)$, $\operatorname{or}(f_+) = \operatorname{or}(g_+)$, $\dim(f_-) = \dim(g_-)$, $\operatorname{or}(f_-) = \operatorname{or}(g_-)$, $f_\infty \overset{l}{\sim} g_\infty$, $f_0 \overset{l}{\sim} g_0$.

Відомо, що якщо $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — лінійне відображення, то існує базис простору $\mathbb{R}^n$, в якому матриця відображення f може бути зведена до дійсної канонічної форми [9], а необхідною та достатньою умовою подібності двох матриць є рівність їхніх дійсних канонічних форм.

Тобто, якщо $f(x) = Ax$, то, звівши матрицю A до дійсної канонічної форми A', згрупуємо блоки цієї матриці так, щоб в результаті вона мала вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A_+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A_\infty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{A_0} \end{pmatrix},$$

де матриці A_α, $\alpha = +, -, \infty, 0$, визначено таким чином:

Матриця	Характеристичні числа λ матриці
A_+	$0 < \lvert\lambda\rvert < 1$
A_-	$\lvert\lambda\rvert > 1$
A_∞	$\lambda = 0$
A_0	$\lvert\lambda\rvert = 1$

Тоді теорему 2.1 можна сформулювати таким чином.

Теорема 2.1′. *Нехай* $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *де* $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ *— лінійні відображення, які не є періодичними. Відображення* f *і* g *топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+)$, $\operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+))$, $\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-)$, $\operatorname{sign}(\det(A_-)) = \operatorname{sign}(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

***Зауваження* 2.1.** Варто наголосити на тому, що, використовуючи теорему 2.1 (або теорему 2.1′), можна класифікувати лише неперіодичні відображення.

Таким чином, топологічна класифікація всіх лінійних відображень зводиться до класифікації періодичних лінійних відображень. У роботах [1, 2] було зроблено припущення, що для класу періодичних лінійних відображень топологічна спряженість означає лінійну спряженість, та доведено його для випадків, коли період відображень $s = 1, 2, 3, 4$ або 6 (тобто для матриць, усі власні числа яких є s-ми коренями з 1). Пізніше було знайдено й інші періоди та умови, для яких це припущення було істинним [3 – 8]. Але S. E. Cappell та J. L. Shaneson [10], побудувавши контрприклад, довели хибність такого припущення для довільного періоду відображення.

Топологічна класифікація періодичних лінійних відображень залишається не завершеною, а отже, залишається й не розв'язаною задача топологічної класифікації всіх лінійних відображень.

3. Топологічна класифікація афінних відображень. Для кращого розуміння суті задачі, що вивчається, розглянемо спочатку випадок $n = 1$. Для лінійних відображень має місце таке твердження.

Твердження 3.1 [1]. *Нехай* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, *де* $a \in \mathbb{R}$ *— лінійне відображення.*

Існують 7 *класів топологічно спряжених лінійних відображень. Три класи визначаються числами* $a = 0, 1, -1$, *а інші — відкритими інтервалами між числами* $0, 1$ *та* -1 *на* $\mathbb{R}$.

Тобто якщо $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, *де* $a, c \in \mathbb{R}$, *то* $f \overset{t}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли* a *та* c *або одночасно належать до однієї з компонент* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, *або одночасно дорівнюють* $0, 1$ *або* -1.

Твердження 3.2 дає необхідні та достатні умови топологічної спряженості двох афінних відображень з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Твердження 3.2. *Нехай* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, *де* $a, b \in \mathbb{R}$ *— афінне відображення.*

Існують 8 *класів топологічно спряжених афінних відображень. Два класи визначаються числами* $a = 0, -1$, *два класи — парами чисел* $a = 1$, $b = 0$ *та* $a = 1$, $b \neq 0$, *а інші — відкритими інтервалами між числами* $0, 1$ *та* -1 *на* $\mathbb{R}$.

Тобто якщо $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, *де* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *то* $f \overset{t}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли* a *та* c *або одночасно належать до однієї з компонент* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, *або одночасно дорівнюють* $0, 1$ *або* -1. *Якщо* $a = c = 1$, *то* b *та* d *або одночасно дорівнюють* 0, *або одночасно відмінні від* 0.

Доведення. Топологічно спряжені відображення мають однакові топологічні властивості. Таким чином, наведемо ті топологічні властивості, які розділяють множину відображень вигляду $f(x) = ax + b$, де $a, b \in \boldsymbol{R}$, на 8 класів та діють із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = b \equiv \text{const}$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$;

2) f — тотожне відображення тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b = 0$;

3) f не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b \neq 0$;

4) f^2 — тотожне відображення, а f не є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли $a = -1$;

5) f зберігає орієнтацію тоді і тільки тоді, коли $a > 0$;

6) $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = \dfrac{b}{1-a} \in \mathbb{R}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $|a| < 1$.

Властивості 5 та 6 породжують розбиття $\mathbb{R}$ на 4 інтервали, а властивості 1 – 4 — точки $0, 1$ та -1 між ними. Враховуючи те, що числу $a = 1$ при $b = 0$ та $b \neq 0$ відповідають два різних класи топологічно спряжених афінних відображень (це випливає з властивостей 2 та 3), в результаті отримуємо 8 класів топологічно спряжених афінних відображень.

Відображення $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, та $g(x) = cx + d$, $c \neq 1$, $d \in \mathbb{R}$, де a та c або одночасно належать до однієї з компонент $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, або одночасно дорівнюють 0 або -1, є топологічно спряженими, бо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$, де

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{1-c}, & x = \dfrac{b}{1-a}, \\ \left(x - \dfrac{b}{1-a}\right)\left|x - \dfrac{b}{1-a}\right|^{l-1} + \dfrac{d}{1-c}, \quad |a|^l = |c|, & x \neq \dfrac{b}{1-a}. \end{cases}$$

Відображення $f(x) = x + b$, $b \neq 0$, та $g(x) = x + d$, $d \neq 0$, топологічно спряжені, оскільки існує $h(x) = \dfrac{d}{b}x + m$, $m \in \mathbb{R}$, таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Твердження 3.2 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Якщо в твердженні 3.2 розглянути відображення $f(x) = ax + b$, де $a \in \boldsymbol{R}$, $b = 0$, то отримаємо твердження 3.1, що є цілком природним, адже множина всіх лінійних відображень є підмножиною всіх афінних відображень.

Зауважимо, що в монографії [11] наведено розв'язки функціонального рівняння $h \circ f = g \circ h$ для широкого класу відображень $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h — невідоме відображення з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

У цій роботі розпочато топологічну класифікацію афінних відображень з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, яка ідейно є складнішою, ніж у випадку $n = 1$. Вона ґрунтується на існуванні нерухомих точок афінного відображення. Для доведення основної теореми сформулюємо деякі допоміжні результати.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ називають *нерухомою* точкою відображення $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, якщо $f(x) = x$.

Лема 3.1. *Нехай відображення* $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *такі, що* $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Ax$, $F = \{\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,|\, g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}\}$.

Якщо $f \overset{t}{\sim} g$, *то існує гомеоморфізм* $h \in F$ *такий, що* $h(q) = 0$, *де* q — *нерухома точка відображення f.*

Доведення. Відображення f і g топологічно спряжені, тому існує гомеоморфізм ψ такий, що $g = = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$ (тобто $\psi^{-1} \circ g = f \circ \psi^{-1}$).

Визначимо h так: $y = h(x) = \psi(x) - \psi(q)$ (тому $h^{-1}(y) = \psi^{-1}(y + \psi(q))$).

Розглянемо $h \circ f \circ h^{-1}(y) = h \circ f \circ \psi^{-1}(y + \psi(q)) = h \circ \psi^{-1} \circ g(y + \psi(q)) =$ $= h(\psi^{-1} \circ g(y + \psi(q))) = \psi(\psi^{-1}[g(y + \psi(q))]) - \psi(q) = g(y + \psi(q)) - \psi(q) =$ $= g(y) + g \circ \psi(q) - \psi(q) = g(y) + \psi \circ f(q) - \psi(q) = g(y) + \psi(q) - \psi(q) = g(y)$.

Лему 3.1 доведено.

Теорема 3.1 дає необхідні та достатні умови для топологічної спряженості афінного відображення та відповідного лінійного.

Теорема 3.1. *Нехай відображення* $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *такі, що* $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Ax$. *Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли існує* $q \in \mathbb{R}^n$ *таке, що* $f(q) = q$.

Доведення. *Необхідність.* Відображення $f(x) = Ax + b \overset{t}{\sim} g(x) = Ax$, тому відображення f та g мають однакову кількість нерухомих точок.

Оскільки $g(0) = 0$, то $g(x) = Ax$ має принаймні одну нерухому точку. Отже, $f(x) = Ax + b$ теж має принаймні одну нерухому точку, бо інакше f, g не топологічно спряжені.

Достатність. За умовою існує точка $q \in \mathbb{R}^n$ така, що $f(q) = q = Aq + b$. Тоді $f \overset{t}{\sim} g$, бо існує гомеоморфізм $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = x + q$, такий, що $f = h \circ$ $\circ\, g \circ h^{-1}$.

Теорему 3.1 доведено.

Дамо критерій топологічної спряженості афінних відображень, що мають хоча б по одній нерухомій точці та лінійні частини яких не є періодичними.

Теорема 3.2. *Нехай* $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *де* $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Cx + d$ — *такі відображення, що*:

1) *існують* $q, \alpha \in \mathbb{R}^n$ *такі, що* $f(q) = q$ *та* $g(\alpha) = \alpha$;

2) *не існує* $k, l \in \mathbb{N}$ *таких, що* $A^k = E$, $C^l = E$.

Відображення f і g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank}(A_+) =$ $= \operatorname{rank}(C_+)$, $\operatorname{sign}(\det(A_+)) = \operatorname{sign}(\det(C_+))$, $\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-)$, $\operatorname{sign}(\det(A_-)) =$ $= \operatorname{sign}(\det(C_-))$, $A_\infty = C_\infty$, $A_0 = C_0$.

Доведення. За умовою теореми відображення f та g мають нерухомі точки q та α відповідно. Тому, використовуючи теорему 3.1, маємо

$$f(x) = Ax + b \overset{t}{\sim} r(x) = Ax,$$

$$g(x) = Cx + d \overset{t}{\sim} s(x) = Cx.$$

Застосовуючи для відображень $r(x) = Ax$ та $s(x) = Cx$ теорему 2.1′, отримуємо необхідний результат.

Теорему 3.2 доведено.

Отже, необхідними та достатніми умовами топологічної спряженості двох афінних відображень, що мають хоча б по одній нерухомій точці, є необхідні та достатні умови топологічної спряженості їхніх лінійних частин.

***Зауваження* 3.2.** Для топологічної класифікації періодичних лінійних відображень існують деякі часткові результати, а саме знайдено періоди та обмеження на матриці, що відповідають лінійним відображенням, при яких топологічна спряженість буде означати лінійну спряженість [1 – 8].

Використовуючи цей факт, звичайно, можна класифікувати частину тих афінних відображень, що мають хоча б по одній нерухомій точці та лінійні частини яких є періодичними й задовольняють ті часткові випадки, про які в цьому зауваженні йшлося вище. Адже, використовуючи теорему 3.1, можна зробити висновок, що такі афінні відображення будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли дійсні канонічні форми їхніх лінійних частин збігаються.

1. *Kuiper N. H., Robbin J. W.* Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. – 1973. – **19**. – P. 83 – 106.
2. *Robbin J. W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – **78**, № 6. – P. 923 – 952.
3. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Nonlinear similarity of matrices // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. – 1979. – **1**, № 6. – P. 899 – 902.
4. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Non-linear similarity // Ann. Math. – 1981. – **113**. – P. 315 – 355.
5. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Nonlinear similarity and differentiability // Communs Pure and Appl. Math. – 1985. – **38**. – P. 697 – 706.
6. *Hsiang W. C., Pardon W.* When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent // Invent. Math. – 1982. – **68**. – P. 275 – 316.
7. *Madsen I., Rothenberg M.* Classifying G spheres // Bull. Amer. Math. Soc. New Ser. – 1982. – **7**, № 1. – P. 223 – 226.
8. *Schultz R.* On the topological classification of linear representations // Topology. – 1977. – **16**. – P. 263 – 269.
9. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория дииамических систем: Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
10. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Linear algebra and topology // Bull. Amer. Math. Soc. New Ser. – 1979. – **1**, № 4. – P. 685 – 687.
11. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 119 с.

Одержано 18.02.08,
після доопрацювання — 16.10.08