УДК 512.544

О. Ю. Дашкова (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДУЛЕЙ НАД ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

We study the $\mathbf{Z}G$-module A in the case where a group G is locally soluble and satisfies the condition $\min-\mathrm{naz}$, and its cocentralizer in A is not an artinian $\mathbf{Z}$-module. We prove that under above-mentioned conditions, the group G is soluble. The structure of the group G is studied in more details in the case where this group is not the Chernikov group.

Досліджено $\mathbf{Z}G$-модуль A у випадку, коли група G є локально розв'язною і задовольняє умову $\min-\mathrm{naz}$, а її коцентралізатор в A не є артиновим $\mathbf{Z}$-модулем. Доведено, що при виконанні вказаних умов група G є розв'язною. Будову групи G вивчено більш детально у випадку, коли вона не є черніковською.

1. Введение. Пусть F — поле, A — векторное пространство над полем F, $GL(F,A)$ — группа всех F-автоморфизмов векторного пространства A. Группа $GL(F,A)$ и все ее подгруппы называются линейными группами. В случае, когда векторное пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, группа $GL(F,A)$ исследовалась совсем мало.

Если H — подгруппа группы $GL(F,A)$, то H реально действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Если размерность $\dim_F(A/C_A(H))$ конечна (бесконечна), говорят, что H имеет конечную (бесконечную) центральную размерность. Это определение впервые было введено в [1]. В [2] изучались линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, у которых любая собственная подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность. В [1] изучались подгруппы G группы $GL(F,A)$, которые обладают тем свойством, что семейство всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Если G — подгруппа группы $GL(F,A)$, то A может быть рассмотрено как FG-модуль. Обобщением этой ситуации является случай RG-модуля, где R — коммутативное кольцо, достаточно близкое к полю (область целостности, дедекиндова область, область главных идеалов и т. д.). Одним из обобщений конечномерного векторного пространства являются R-модули с условием минимальности (артиновы модули). В настоящей работе исследуется $\mathbf{Z}G$-модуль A такой, что фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. В этом случае будем говорить, что коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Обозначим символом $L_{\mathrm{naz}}(G)$ семейство всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями. Если $L_{\mathrm{naz}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы 1.1 и 1.2.

Теорема 1.1. *Пусть G — локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию* $\min-\mathrm{naz}$. *Если существует $\mathbf{Z}G$-модуль A такой, что коцентрализатор G в A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то G является разрешимой.*

Теорема 1.2. *Пусть G и A — те же, что и в теореме 1.1. Тогда G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H такую, что фактор-группа G/H черниковская.*

2. Предварительные результаты. Приведем некоторые элементарные факты о $\mathbf{Z}G$-модулях, которые будут использоваться в дальнейшем. Отметим, что если $K \leq H \leq G$, и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Если $U, V \leq G$ такие, что их коцентрализаторы в модуле A являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями, то фактор-модуль $A/(C_A(U) \cap C_A(V))$ также является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle U, V \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$. Если $H_1 > > H_2 > H_3 > \ldots$ — бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы G, то существует натуральное число n такое, что коцентрализатор подгруппы H_n в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Кроме того, если N — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор подгруппы N в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то фактор-группа G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Приведем следующие три леммы.

Лемма 2.1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль. Предположим, что G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$, X, H — подгруппы группы G и Λ — множество индексов, для которых выполняются следующие условия*:

i) $X = Dr_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, *где* $1 \neq X_\lambda$ — H-*инвариантная подгруппа* X *для каждого* $\lambda \in \Lambda$;

ii) $H \cap X \leq Dr_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$ *для некоторого подмножества* Γ *из* Λ.

Если множество $\Omega = \Lambda \setminus \Gamma$ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.

Доказательство. Предположим, что множество Ω бесконечно и $\Omega_1 \supsetneq \Omega_2 \supsetneq \ldots$ — строго убывающий ряд подмножеств множества Ω. Поскольку $H \cap Dr_{\lambda \in \Omega} X_\lambda = 1$, ряд подгрупп $\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_1 \rangle > \langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_2 \rangle > \ldots$ строго убывает. Отсюда следует, что для некоторого натурального числа d коцентрализатор подгруппы $\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_d \rangle$ является артиновым. Следовательно, коцентрализатор подгруппы H также является артиновым.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$ и H, K — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа H. Предположим, что существует множество индексов Λ и подгруппы H_λ группы G такие, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda / K$ и множество Λ бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.*

Доказательство. Предположим, что множество Λ бесконечно. Пусть Γ и Ω — бесконечные непересекающиеся подмножества множества Λ такие, что $\Lambda = \Gamma \cup \Omega$. Пусть $U/K = Dr_{\lambda \in \Gamma} H_\lambda / K$, $V/K = Dr_{\lambda \in \Omega} H_\lambda / K$ и $\Gamma_1 \supsetneq \Gamma_2 \supsetneq \ldots$ — строго убывающий ряд подмножеств множества Γ. В результате получаем бесконечный убывающий ряд подгрупп

$$\langle U, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_1 \rangle > \langle U, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_2 \rangle > \ldots .$$

Из условия $\min-\mathrm{naz}$ следует, что коцентрализатор подгруппы U в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Аналогично получаем, что коцентрализатор подгруппы V в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Из равенства $H = UV$ следует, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A также является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{naz}$. *Если элемент $g \in G$ имеет бесконечный порядок, то коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.*

Доказательство. Пусть p и q — различные простые числа, большие 3, и $u = g^p$, $v = g^q$. Тогда существует бесконечный убывающий ряд подгрупп $\langle u \rangle > \langle u^2 \rangle > \langle u^4 \rangle > \ldots$. Из условия $\min-\mathrm{naz}$ вытекает, что существует натуральное число k, для которого коцентрализатор подгруппы $\langle u^{2^k} \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Аналогично, существует натуральное число l, для которого коцентрализатор подгруппы $< v^{3^l} >$ в модуле A также является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle = \langle u^{2^k} \rangle \langle v^{3^l} \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма доказана.

Следующий результат дает важную информацию о строении фактор-группы по ее коммутанту в случае выполнения условия $\min-\mathrm{naz}$.

Лемма 2.4. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{naz}$. *Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то фактор-группа G/G' является черниковской группой.*

Доказательство. Предположим, что фактор-группа G/G' не является черниковской группой. Обозначим через S семейство подгрупп $H \leq G$ таких, что фактор-группа H/H' не является черниковской и коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку $G \in S$, то $S \neq \varnothing$. Так как множество S удовлетворяет условию минимальности, оно содержит минимальный элемент, обозначим его через D. Если U и V — собственные подгруппы группы D такие, что $D = UV$ и $U \cap V = D'$, то по крайней мере одна из подгрупп, например U, такова, что ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Из выбора подгруппы D следует, что фактор-группа U/U' черниковская. Отсюда и из изоморфизма $U/D' \simeq (U/U')/(D'/U')$ следует, что фактор-группа U/D' также является черниковской. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, абелева фактор-группа D/U также является черниковской. Следовательно, фактор-группа D/D' является черниковской. Противоречие с выбором подгруппы D. Отсюда вытекает, что фактор-группу D/D' нельзя представить в виде произведения двух собственных подгрупп. Следовательно, фактор-группа D/D' изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Противоречие.

Лемма доказана.

Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$. Символом $AD(G)$ обозначим множество элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда следует, что $AD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Лемма 2.5. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{naz}$ *и ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G является периодической, либо $G = AD(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не является периодической и $G \neq AD(G)$. Обозначим через S семейство подгрупп $H \leq G$ таких, что H не является периодической и $H \neq AD(H)$. S не является пустым. Если $H \neq AD(H)$, то существует элемент $h \in H$, для которого фактор-модуль $A/C_A(h)$ не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, $S \subseteq \subseteq L_{\mathrm{naz}}(G)$, и поэтому S удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент множества S и $L = AD(D)$. Отметим, что $L \neq 1$, так как D не является периодической подгруппой. Если $L \leq S \leq D$ и $S \neq D$, то $S = AD(S)$, и поэтому $S \leq L$. Следовательно, D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Пусть $x \in D \setminus L$. Если элемент a имеет бесконечный порядок, то из выбора D следует, что $\langle x, a\rangle = D$. Отсюда вытекает, что L конечно порождена, и поскольку $L = AD(L)$, фактор-модуль $A/C_A(L)$ является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку подгруппа L нормальна в группе D, $C = C_A(L)$ является $\mathbf{Z}D$-подмодулем модуля A. Если $R = C_D(A/C)$, то R — нормальная подгруппа группы D, и фактор-группа D/R изоморфна подгруппе группы $GL(r, M)$, где M является конечной прямой суммой колец Z_{p^∞} целых p-адических чисел, возможно, по различным простым числам p. Следовательно, фактор-группа D/R финитно аппроксимируема. Пусть U — нормальная подгруппа конечного индекса группы D. Подгруппа U не является периодической, и поэтому подгруппа $\langle U, x\rangle$ также непериодическая и $\langle U, x\rangle \neq AD\big(\langle U, x\rangle\big)$. Из выбора D следует, что $D = \langle U, x\rangle$, и поэтому фактор-группа D/U абелева. Если E — конечный резидуал группы D, то фактор-группа D/E абелева. Отсюда с учетом включения $E \leq R$ вытекает, что фактор-группа D/R также абелева. Следовательно, фактор-группа $D/(R \cap L)$ абелева. Подгруппа $R \cap L$ является подгруппой стабилизатора ряда длины 2, и поэтому она абелева. Отсюда следует, что D является конечнопорожденной метабелевой группой. По теореме Ф. Холла (теорема 9.51 [3]) группа D финитно аппроксимируема. Как и ранее, устанавливаем, что D абелева. Поскольку $D = U\langle x\rangle$ для любой подгруппы U конечного индекса, группа D — бесконечная циклическая. Согласно лемме 2.3, $D = AD(D)$. Противоречие с выбором подгруппы D.

Лемма доказана.

3. Локально разрешимые группы с условием $\mathbf{min - naz}$. Если группа G локально разрешима и фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то фактор-группа $G/C_G(A/C_A(G))$ изоморфна локально разрешимой подгруппе группы $GL(r, M)$, где M является конечной прямой суммой колец $\mathbf{Z_{p^\infty}}$ целых p-адических чисел, возможно, по различным простым числам p. Поскольку M является целостным кольцом, его можно вложить в поле F. Отсюда следует, что фактор-группа $G/C_G(A/C_A(G))$ изоморфна некоторой локально разрешимой подгруппе линейной группы $GL(r, F)$. Следовательно, согласно следствию 3.8 [4], фактор-группа $G/C_G(A/C_A(G))$ разрешима, и, поскольку централизатор $C_G(A/C_A(G))$ абелев, отсюда следует разрешимость группы G. Поэтому при изучении локально разрешимых групп с условием $\mathrm{min} - \mathrm{naz}$ необходимо сосредоточить внимание на исследовании локально разрешимых групп G, для которых фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма 3.1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G периодическая, локально разрешимая, удовлетворяет условию $\mathrm{min} - \mathrm{naz}$ и ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо $G = AD(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не удовлетворяет условию минимальности и $G \neq AD(G)$. Обозначим через S семейство подгрупп $H \leq G$ таких, что H не удовлетворяет условию минимальности и $H \neq AD(H)$. Тогда $S \neq \varnothing$ и удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент S и $L = AD(D)$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы D:

$$H_1 > H_2 > H_3 > \ldots .$$

Поскольку группа D удовлетворяет условию $\min - \mathrm{naz}$, существует натуральное число d такое, что коцентрализатор подгруппы H_d в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, $H_d \leq L$, и поэтому L не удовлетворяет условию минимальности. Отсюда вытекает, что если $x \in D \setminus L$, то $\langle x, L\rangle = D$ в силу выбора подгруппы D. Следовательно, фактор-группа D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Заменяя x, если это необходимо, подходящей степенью, можно положить, что x имеет порядок q^r для некоторого натурального числа r. Так как группа D не является черниковской, согласно теореме Д. И. Зайцева [5], D содержит $\langle x\rangle$-инвариантную абелеву подгруппу $B = Dr_{n\in\mathbf{N}}\langle b_n\rangle$, и можно считать, что элементы b_n имеют простые порядки для каждого $n \in \mathbf{N}$. Пусть $1 \neq c_1 \in B$ и $C_1 = \langle c_1\rangle^{\langle x\rangle}$. Тогда C_1 конечна и существует подгруппа E_1 такая, что $B = C_1 \times E_1$. Пусть $U_1 = core_{\langle x\rangle}E_1$. Тогда U_1 имеет конечный индекс в B. Если $1 \neq c_2 \in U_1$ и $C_2 = \langle c_2\rangle^{\langle x\rangle}$, то C_2 — конечная $\langle x\rangle$-инвариантная подгруппа и $\langle C_1, C_2\rangle = C_1 \times C_2$. Продолжая это построение, можно построить семейство подгрупп $\{C_n \mid n \in \mathbf{N}\} = Dr_{n\in\mathbf{N}}C_n$. Из леммы 2.1 следует, что $x \in L$. Противоречие.

Лемма доказана.

Из лемм 2.5 и 3.1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию* $\min - \mathrm{naz}$ *и ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо $G = AD(G)$.*

Лемма 3.2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию* $\min - \mathrm{naz}$ *и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G разрешима, либо G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп $1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_\omega = \cup_{n\in\mathbf{N}}S_n \leq G$ такой, что коцентрализатор подгруппы S_n в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, факторы S_{n+1}/S_n абелевы для $n \geq 0$, а фактор-группа G/S_ω — разрешимая черниковская группа.*

Доказательство. Покажем сначала, что группа G гиперабелева. Для этого достаточно показать, что каждый нетривиальный гомоморфный образ G содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу.

Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Предположим сначала, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, она является черниковской и поэтому имеет нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. Рассмотрим теперь случай, когда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. По теореме А. И. Мальцева (см., например, следствие к теореме 8.23 [3]), G/H имеет нормальную систему с абелевыми факторами:

$$S = \big\{\Lambda_\sigma/H,\ V_\sigma/H \mid \sigma \in \Sigma\big\}.$$

Пусть Σ_1 — подмножество, состоящее из тех σ, для которых коцентрализаторы Λ_σ не являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями, Σ_2 — соответствующее подмножество для V_σ. Поскольку G удовлетворяет условию $\min-\mathrm{naz}$, множества $\{\Lambda_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_1\}$ и $\{V_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_2\}$ имеют минимальные элементы. Обозначим их Λ_μ и V_ν соответственно. Ранее отмечалось, что локально разрешимые группы, коцентрализаторы которых в модуле A являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями, разрешимы. Следовательно, Λ_σ, $\sigma < \mu$, и V_σ, $\sigma < \nu$, разрешимы. Отсюда вытекает, что фактор-группа G/H содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. Следовательно, группа G гиперабелева.

Пусть $1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_\alpha \leq \ldots \leq G$ — возрастающий нормальный ряд с абелевыми факторами и α — наименьшее порядковое число, для которого коцентрализатор подгруппы H_α в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда, как и ранее, подгруппа H_β разрешима для всех $\beta < \alpha$. Кроме того, фактор-группа G/H_α удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и поэтому является разрешимой черниковской группой.

Предположим сначала, что α — непредельное порядковое число. Отсюда следует, что подгруппа H_α разрешима, и поэтому разрешима группа G. Предположим теперь, что α — предельное порядковое число и группа G не является разрешимой. Для каждого положительного целого числа d существует порядковое число β_d такое, что $\beta_d < \alpha$, H_{β_d} имеет ступень разрешимости, не превышающую d. Более того, можно считать, что $\beta_i < \beta_{i+1}$ для каждого положительного целого числа i. Для каждого i положим $T_i = H_{\beta_i}$. Поэтому группа G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп $1 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq G$. Подгруппа $T_\omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} T_n$ не является разрешимой, и поэтому $T_\omega = H_\alpha$. Нужный ряд $1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_\omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} S_n \leq G$ может быть получен уплотнением ряда $1 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_\omega \leq G$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{naz}$, *коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем и $G = AD(G)$. Тогда фактор-группа $G/G^{\mathfrak{F}}$ конечна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть фактор-группа $G/G^{\mathfrak{F}}$ бесконечна. Тогда группа G имеет бесконечный убывающий ряд нормальных подгрупп $G \geq N_1 \geq N_2 \geq \ldots$ такой, что фактор-группы G/N_i конечны для каждого номера i. Следовательно, существует номер k, для которого фактор-группа G/N_k конечна, и коцентрализатор подгруппы N_k в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку $G = AD(G)$, можно выбрать подгруппу H такую, что $H = AD(H)$ и $G = HN_k$. Следовательно, коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию* $\min-\mathrm{naz}$ *и ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Если G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп $1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots \leq \cup_{n\geq 1} S_n = G$ такой, что коцентрализатор каждой подгруппы S_n в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем и каждый фактор S_{n+1}/S_n абелев, то группа G разрешима.*

Доказательство. Поскольку фактор-модуль $A/C_A(S_k)$ является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, существует конечный ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_{n(k)} = C_A(S_k)$, каждый фактор которого является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем. Поскольку коцентрализатор подгруппы S_{k+1} в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, можно продолжить построенный ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_{n(k)} \geq \ldots \geq A_{n(k+1)} = C_A(S_{k+1})$, каждый фактор которого является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем. Продолжая это построение, получаем ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_\omega = C_A(G)$, каждый фактор которого является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем.

Пусть $H = \cap_{j\geq 0} C_G(A_j/A_{j+1})$. Согласно лемме 16.19 [6], для каждого j фактор-группа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ почти абелева. Поскольку G/H вкладывается в декартово произведение фактор-групп $G/C_G(A_j/A_{j+1})$, G/H является расширением абелевой группы с помощью финитно аппроксимируемой. Кроме того, группа G является объединением подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A являются артиновыми $\mathbf{Z}$-модулями. Следовательно, $G = AD(G)$. По лемме 3.3 фактор-группа G/H почти абелева. Пусть K/H — нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H такая, что фактор-группа G/K конечна. Так как $G = AD(G)$, коцентрализатор подгруппы K в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Если коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, то, поскольку подгруппа H локально разрешима, фактор-группа $H/C_H(A/C_A(G))$ изоморфна локально разрешимой подгруппе группы $GL(r, M)$, где M является конечной прямой суммой колец $\mathbf{Z_{p^\infty}}$ целых p-адических чисел, возможно, по различным простым числам p. Поскольку M является целостным кольцом, его можно вложить в поле F. Отсюда следует, что фактор-группа $H/C_H(A/C_A(H))$ изоморфна некоторой локально разрешимой подгруппе линейной группы $GL(r, F)$. Согласно следствию 3.8 [4], фактор-группа $H/C_H(A/C_A(H))$ разрешима. Поскольку подгруппа $C_H(A/C_A(H))$ является подгруппой стабилизатора ряда длины 2, она абелева. Следовательно, H разрешима, и поэтому разрешима группа G.

Рассмотрим теперь случай, когда коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Покажем, что и в этом случае подгруппа H разрешима. Положим $L_j = C_H(A/A_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $H \neq L_j$ для некоторого j. Предположим сначала, что существует номер t, для которого фактор-группа H/L_t бесконечна. Тогда найдется номер $k \geq j$, $k \geq t$, для которого среди факторов ряда $A/A_k = A_0/A_k \geq A_1/A_k \geq A_2/A_k \geq \ldots \geq A_j/A_k \geq \ldots \geq A_k/A_k$ есть бесконечные. Тогда в силу результатов главы 8 [7] H имеет нильпотентный непериодический образ. Отсюда следует, что в H можно выбрать нормальную подгруппу H_1, для которой фактор-группа H/H_1 — нильпотентная непериодическая группа, и поэтому найдется нормальная подгруппа H_2, для которой фактор-группа H/H_2 — абелева группа без кручения. Противоречие с леммой 2.4. Следовательно, $H = L_j$ для любого номера j, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть теперь для любого номера j, $j = 1, 2, \ldots$, фактор-группа H/L_j конечна. Предположим, что существует номер j, для которого коцентрализатор подгруппы L_j в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Пусть j — наименьший номер с указанным свойством, и поэтому коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку фактор-группа L_{j-1}/L_j конечна и $G = AD(G)$, коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие. Следовательно, коцентрализатор каждой подгруппы L_j в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку H удовлетворяет условию $\min - \mathrm{naz}$, существует номер m, для которого $L_j = L_m$ для всех $j \geq m$. Отсюда с учетом выбора L_j следует, что подгруппа L_m разрешима. Так как фактор-группа H/L_m конечна, H также разрешима.

Лемма доказана.

Из полученных результатов вытекает справедливость теоремы 1.1.

***Доказательство теоремы* 1.2.** Отметим, что по теореме 1.1 группа G разрешима. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является черниковской.

Пусть $G = D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \ldots \geq D_n = 1$ — произвольный ряд подгруппы S. Согласно лемме 2.4, существует номер m такой, что коцентрализатор подгруппы D_m в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, а коцентрализатор подгруппы D_{m+1} в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. По лемме 2.4 фактор-группы D_i/D_{j+1}, $i = 0, 1, \ldots, m$, являются черниковскими. Пусть $U = D_{m+1}$, тогда фактор-группа G/U черниковская. Положим $C = C_A(U)$. C является $\mathbf{Z}G$-подмодулем модуля A. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, фактор-модуль A/C является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем, и поэтому существует ряд подмодулей

$$0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_t = A,$$

у которого каждый фактор C_{i+1}/C_i, $i = 1, \ldots, t-1$, является либо конечным, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем. Отсюда с учетом леммы 16.19 [6] следует, что фактор-группы $G/C_G(C_{i+1}/C_i)$, $i = 1, \ldots, t-1$, почти абелевы. Поскольку фактор-группа G/U черниковская и $U \leq C_G(C_1)$, фактор-группа $G/C_G(C_1)$ также является черниковской. Следовательно, $G/C_G(C_1)$ — почти абелева группа. Пусть $H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap \ldots \cap C_G(C_t/C_{t-1})$. Отметим, что фактор-группа G/H почти абелева. Обозначим через V/H нормальную абелеву подгруппу фактор-группы G/H такую, что фактор-группа G/V конечна. С учетом теоремы 3.1 получаем, что коцентрализатор подгруппы V в модуле A не является артиновым $\mathbf{Z}$-модулем. По лемме 2.4 фактор-группа V/H черниковская. Следовательно, G/H также черниковская. Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_t = A$. Следовательно, H нильпотентна.

Теорема доказана.

1. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, № 1. – P. 172 – 186.
2. *Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – **208**, № 3. – P. 785 – 795.
3. *Robinson D. J. R.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. – Berlin etc.: Springer, 1972. – Vols 1, 2. – 464 p.
4. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – New York etc.: Springer, 1973. – 229 p.
5. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 6. – С. 1250 – 1253.
6. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel etc.: Birkhäuser, 2007. – 248 p.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1973. – Т. 1. – 229 с.

Получено 08.04.08,
после доработки — 11.07.08