УДК 519.21

Я. М. Хусанбаев
(Ин-т математики и информ. технологий АН Республики Узбекистан, Ташкент)

ПОЧТИ КРИТИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Almost critical branching processes with infinitely increasing immigration are considered and functional limit theorems for these processes are proved.

Розглянуто майже критичні розгалужені процеси з іміграцією, що нескінченно зростає, і для таких процесів доведено функціональні граничні теореми.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\right\}$ — независимые совокупности независимых неотрицательных целочисленных и одинаково распределенных случайных величин. Последовательность случайных величин $X_k^{(n)}$, $k \geq 0$, определим следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0^{(n)} = 0, \qquad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Так определенные процессы часто возникают в задачах теории ветвящихся процессов (см., например, [1] и приведенную в ней библиографию) и называются ветвящимися процессами с иммиграцией. Если интерпретировать величину $\xi_{k,j}^{(n)}$ как число потомков j-й частицы некоторой популяции частиц в $(k-1)$-м поколении, а величину $\varepsilon_k^{(n)}$ как число частиц, иммигрирующих в популяцию в k-м поколении, то величина $X_k^{(n)}$ будет представлять собой общее число частиц популяции в k-м поколении.

Определим случайный ступенчатый процесс $X_n(t)$, $t \geq 0$, положив $X_n(t) = X_{[nt]}^{(n)}$, $t \geq 0$, где знак $[a]$ означает целую часть числа a. Ясно, что траектория процесса X_n принадлежит пространству Скорохода $D[0, \infty)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)}\right)^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)}\right)^2 < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем следующие обозначения:

$$m_n = \mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \qquad \sigma_n^2 = \mathbf{var}\,\xi_{1,1}^{(n)}, \qquad \lambda_n = \mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)}, \qquad b_n^2 = \mathbf{var}\,\varepsilon_1^{(n)}.$$

В работе [2] рассмотрен случай, когда $m_n = 1 + \alpha/n \to 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (почти критический случай) и $\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а среднее значение и дисперсия иммиграции $\varepsilon_k^{(n)}$ при $n \to \infty$ сходятся к конечным величинам. Доказано, что в этом случае процесс $n^{-1} X_n(t)$ слабо сходится в пространстве $D[0, \infty)$ к детерминированному процессу, и получена функциональная предельная теорема для $n^{-1/2}(X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t))$, $t \geq 0$. В работе [3] исследованы достаточные условия сходимости процессов $X_n(t)$ (с соответствующей нормировкой) к детерминированному процессу при различных условиях на поведение величин m_n, λ_n, σ_n^2 и b_n^2.

В данной работе рассматривается почти критический случай, в котором иммиграция в популяцию в среднем бесконечно увеличивается ($\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$), и исследуется скорость роста случайного процесса X_n при $n \to \infty$, а также изучается асимптотическое поведение $X_n - \mathbf{E}X_n$ (соответствующим образом нормированных) при $n \to \infty$. Всюду в дальнейшем $T > 0$, $\gamma > 1$ — фиксированные числа, знак $I(A)$ будет обозначать индикатор события A.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

A) $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *где* d_n — *последовательность положительных чисел такая, что* $\beta_n = n d_n^{-1} \to \beta < \infty$ *при* $n \to \infty$;

B) $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0$ *при* $n \to \infty$;

C) $n^{1-\gamma} \lambda_n \to \lambda \geq 0$ *при* $n \to \infty$;

D) $n^{1-2\gamma} b_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{X_n(t)}{n^\gamma} - \mu(t) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где процесс μ *является решением уравнения*

$$d\mu(t) = (\lambda + \beta\alpha\mu(t))\,dt$$

с начальным условием $\mu(0) = 0$. *Здесь знак* $\xrightarrow{P}$ *означает сходимость по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A, B *и* C *теоремы* 1, *причем* $\sigma^2 > 0$, *и следующие условия*:

E) $n^{-\gamma} b_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$;

F) *для любого* $\theta > 0$

$$\mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left| \xi_{1,1}^{(n)} - m_n \right| > \theta n^{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда при $n \to \infty$ *имеет место слабая сходимость*

$$\frac{X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t)}{n^{(1+\gamma)/2}}, \quad t \in [0, T] \to \int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)} \sqrt{\rho(s)}\, dW(s), \quad t \in [0, T],$$

в пространстве Скорохода $D[0, T]$, *где* W — *стандартный винеровский процесс*, $\rho(t) = \lambda\sigma^2 \int_0^t e^{\beta\alpha s}\, ds$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A *и* C *теоремы* 1. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

K) $n\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$ *при* $n \to \infty$; *L*: $n^{1-\gamma} b_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$;

M) $n\mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right| > \theta n^{\gamma/2}\right) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\theta > 0$.

Тогда при $n \to \infty$ *имеет место слабая сходимость*

$$\frac{X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t)}{n^{\gamma/2}}, \quad t \in [0, T] \to \int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)} \sqrt{\rho(s)}\, dW(s), \quad t \in [0, T],$$

в пространстве Скорохода $D[0, T]$, *где функция* ρ *имеет тот же вид, что и в теореме* 2.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A *и* C *теоремы* 1. *Пусть* $n\sigma_n^2 \to 0$ *и* $n^{1-\gamma} b_n^2 \to b^2 > 0$ *при* $n \to \infty$. *Если, кроме того, для любого* $\theta > 0$

$$n^{1-\gamma}\, \mathbf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \theta n^{\gamma/2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$, *то имеет место слабая сходимость*

$$\frac{X_n(t) - \mathbf{E}X_n(t)}{n^{\gamma/2}}, \quad t \in [0, T] \to b\int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)}\, dW(s), \quad t \in [0, T],$$

в пространстве Скорохода $D[0, T]$.

***Доказательство теоремы* 1.** Нетрудно видеть, что

$$X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + (m_n - 1)X_{k-1}^{(n)} + \lambda_n + M_k^{(n)}, \tag{1}$$

где $M_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right) + \varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n$. Разделяя почленно соотношение (1) на n^γ и обозначая $\eta_{nk} = X_k^{(n)} / n^\gamma$, в силу условия A получаем

$$\eta_{nk} = \eta_{nk-1} + \left(\beta_n\alpha\eta_{nk-1} + n^{1-\gamma}\lambda_n\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{n^\gamma} M_k^{(n)}. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_k^{(n)}$ σ-алгебру, порожденную величинами $X_1^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)}$. Нетрудно видеть, что $M_k^{(n)}, k \geq 1$, образует квадратично-интегрируемую мартингал-разность относительно потока $\mathcal{F}_k^{(n)}, k \geq 1$. Тогда в силу неравенства Дуба для мартингалов при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n^\gamma} \sup_{0 \le t \le T} \left|\sum_{k=1}^{[nt]} M_k^{(n)}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nT]} \mathbf{E}\left(M_k^{(n)}\right)^2. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, которая является частью леммы 2.1 из [2].

Лемма. *Если* $m_n \neq 1$, *то для всех* $k \geq 1$

$$\mathbf{E}X_k^{(n)} = \frac{m_n^k - 1}{m_n - 1}\lambda_n,$$

и если $m_n = 1$, *то* $\mathbf{E}X_k^{(n)} = k\lambda_n$. *Кроме того,*

$$\mathbf{E}\left(\left(M_k^{(n)}\right)^2 / \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = \sigma_n^2 X_{k-1}^{(n)} + b_n^2.$$

Пусть $\alpha\beta \neq 0$. Тогда, применяя лемму и соотношение $m_n^{[nt]} \sim e^{\beta_n\alpha t}$ при $n \to \infty$, согласно условиям теоремы получаем

$$\frac{1}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^{(n)}\right)^2 = \frac{\lambda_n\sigma_n^2}{n^{2\gamma}(m_n - 1)}\left(\frac{m_n^{[nt]} - 1}{m_n - 1} - [nt]\right) + \frac{[nt]}{n^{2\gamma}} b_n^2 \sim$$

$$\sim \frac{1}{n^{\gamma-1}} \frac{\lambda\sigma^2}{\alpha\beta^2}\left(\frac{e^{\beta\alpha t} - 1}{\alpha} - \beta t\right) + n^{1-2\gamma} b_n^2 t \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Если $\alpha = 0$, то, снова применяя лемму, находим

$$\frac{1}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^{(n)}\right)^2 = \frac{([nt] - 1)[nt]}{2n^{2\gamma}} \lambda_n\sigma_n^2 + \frac{[nt]}{n^{2\gamma}} b_n^2 \to 0 \tag{5}$$

при $n \to \infty$. Далее, если $\beta = 0$, то, учитывая, что

$$m_n^{[nt]} = 1 + \beta_n\alpha t + \frac{1}{2}(\beta_n\alpha t)^2 + o\left(\beta_n^2\right),$$

как в (4), имеем

$$\frac{1}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(M_k^{(n)}\right)^2 \sim \frac{1}{n^{\gamma-1}} \frac{\lambda\sigma^2 t^2}{2} + n^{1-2\gamma} b_n^2 t \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда и из (3) – (5) следует, что

$$\frac{1}{n^{\gamma}} \sup_{0 \le t \le T} \left| \sum_{k=1}^{[nt]} M_k^{(n)} \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда из (2) и теоремы 3.1 [5] получаем

$$\max_{1 \le k \le [nT]} |\eta_{nk} - Z_{nk}| \xrightarrow{P} 0 \tag{6}$$

при $n \to \infty$, где величины Z_{nk} удовлетворяют соотношению

$$Z_{nk} = Z_{nk-1} + \left(\beta_n \alpha Z_{nk-1} + n^{1-\gamma} \lambda_n\right) \cdot \frac{1}{n}.$$

Далее, согласно условиям A и C и в силу теоремы 3.2 [5] имеем

$$\sup_{0 \le t \le T} |Z_n(t) - \mu(t)| = \max_{1 \le k \le nT} \left| Z_{nk} - \mu\left(\frac{k}{n}\right) \right| \xrightarrow{P} 0$$

при $n \to \infty$, где $Z_n(t) = Z_{n[nt]}$. Теперь отсюда с учетом (6) следует, что

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \frac{X_n(t)}{n^{\gamma}} - \mu(t) \right| \le \max_{1 \le k \le nT} |\eta_{nk} - Z_{nk}| + \max_{1 \le k \le nT} \left| Z_{nk} - \mu\left(\frac{k}{n}\right) \right| \xrightarrow{P} 0$$

при $n \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы 1.

***Доказательство теоремы* 2.** Согласно неравенству Колмогорова для независимых случайных величин и в силу условия E для любого $\theta > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \le t \le T} \left| \sum_{k=1}^{[nt]} \left(\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n\right) \right| > \theta n^{(1+\gamma)/2} \right) = \frac{[nT]}{\theta^2 n^{1+\gamma}} b_n^2 \sim \theta^{-2} T n^{-\gamma} b_n^2 \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n\right) \right| \xrightarrow{P} 0 \tag{7}$$

при $n \to \infty$. Теперь докажем, что

$$n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right) \to W(T(t)) \tag{8}$$

при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D[0, T]$, где $T(t) = \int_0^t \rho(s)\, ds$. Пусть $x_n \in D[0, T]$ такие, что $\sup\limits_{0 \le t \le T} |x_n(t) - \mu(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. Сначала покажем, что

$$\Phi_n(t, x_n) = n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{j=1}^{\left[n^{\gamma} x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right) \to W(T(t)) \tag{9}$$

при $n \to \infty$ слабо в пространстве Скорохода $D[0, T]$. Действительно, пусть $\tilde{\xi}_{nk}$ — независимые случайные величины, имеющие такое распределение, что и $\xi_{1,1}^{(n)} - m_n$. Ясно, что

$$n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{j=1}^{\left[n^{\gamma} x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]} \left(\xi_{k,j}^{(n)} - m_n\right) \overset{\text{d.f}}{=} n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{j=1}^{\sum_{k=1}^{[nt]} \left[n^{\gamma} x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]} \tilde{\xi}_{n,j},$$

где знак $\overset{\text{d.f}}{=}$ означает совпадение по распределению. Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{n^{1+\gamma}}\left|\sum_{k=1}^{[nt]}\left(\left[n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]-n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{[nt]}{n^{1+\gamma}} \to 0 \tag{10}$$

при $n \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\left[n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] \sim n^{1+\gamma}\int_0^{[nt]/n} x_n(s)\,ds \sim n^{1+\gamma}\int_0^t \mu(s)\,ds \tag{11}$$

при $n \to \infty$. Отсюда легко получаем

$$\mathbf{var}\, n^{-\frac{1+\gamma}{2}} \sum_{j=1}^{\sum_{k=1}^{[nt]}\left[n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]} \tilde{\xi}_{n,j} =$$

$$= \frac{\sigma_n^2}{n^{1+\gamma}}\sum_{k=1}^{[nt]}\left[n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] \to \sigma^2\int_0^t \mu(s)\,ds = \int_0^t \rho(s)\,ds. \tag{12}$$

Поскольку величины $\tilde{\xi}_{n,k}$ одинаково распределены по k, учитывая (11), имеем

$$n^{-1-\gamma} \sum_{j=1}^{\sum_{k=1}^{[nt]}\left[n^\gamma x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]} \mathbf{E}\left(\tilde{\xi}_{n,j}\right)^2 I\left(\left|\tilde{\xi}_{n,j}\right| > \theta n^{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \sim$$

$$\sim \int_0^t \mu(s)\,ds \cdot \mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right)^2 I\left(\left|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right| > \theta n^{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$, согласно условию F. Значит, выполнено условие Линдеберга для $\tilde{\xi}_{n,k}$. Тогда отсюда и из (12), согласно функциональной центральной предельной теореме (см., например, [5]), получаем (9). Далее, применяя неравенство Колмогорова и учитывая (10), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\Phi_n(t, x_n) - \Phi_n(t,\mu)\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_n^2 [nT] n^\gamma}{\varepsilon^2 n^{1+\gamma}} \sup_{0\le t\le T}\left|x_n(t) - \mu(t)\right| \sim \frac{\sigma^2 T}{\varepsilon^2}\sup_{0\le t\le T}\left|x_n(t)-\mu(t)\right| \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\Phi_n\left(t, \frac{X_n}{n^\gamma}\right) - \Phi_n(t,\mu)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma_n^2 T}{\varepsilon^2}\delta + \mathbf{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{X_n(t)}{n^\gamma} - \mu(t)\right| > \delta\right).$$

Выбором δ первый член в последней сумме можно сделать сколь угодно малым, а второй член, согласно теореме 1, стремится к нулю. Теперь отсюда и из (9), леммы 8 из [6, с. 19] получаем (8). В свою очередь, из (7) и (8) с учетом леммы 8 из [6, с. 19] получаем слабую сходимость

$$M_n(t) = n^{-\frac{1+\gamma}{2}}\sum_{k=1}^{[nT]} M_k^{(n)} \to M(t) = W(T(t)) \tag{13}$$

при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D[0, T]$. Далее, нетрудно видеть, что

$$X_k^{(n)} - \mathbf{E}X_k^{(n)} = m_n\left(X_{k-1}^{(n)} - \mathbf{E}X_{k-1}^{(n)}\right) + M_k^{(n)}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$X_k^{(n)} - \mathbf{E}X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} m_n^{k-j} M_j^{(n)}.$$

Тогда

$$n^{-\frac{1+\gamma}{2}}\left(X_n(t)-\mathbf{E}X_n(t)\right) = n^{-\frac{1+\gamma}{2}}\sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{[nt]-j}M_j^{(n)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{[nt]} m_n^{[nt]-j}\left(M_n\left(\frac{j}{n}\right)-M_n\left(\frac{j-1}{n}\right)\right) = \int_0^{[nt]/n} e^{\alpha_n\left(\frac{[nt]}{n}-s\right)}dM_n(s),$$

где $\alpha_n = n\log m_n \to \beta\alpha$ при $n\to\infty$. Последнее соотношение запишем в виде

$$n^{-\frac{1+\gamma}{2}}\left(X_n(t)-\mathbf{E}X_n(t)\right) = M_n\left(\frac{[nt]}{n}\right) + \alpha_n\int_0^{[nt]/n} e^{\alpha_n\left(\frac{[nt]}{n}-s\right)}M_n(s)\,ds.$$

Отсюда и из (13), применяя теорему о непрерывном отображении [7], получаем слабую сходимость в $D[0,T]$ при $n\to\infty$

$$n^{-\frac{1+\gamma}{2}}\left(X_n(t)-\mathbf{E}X_n(t)\right) \to Y(t), \tag{14}$$

где

$$Y(t) = M(t) + \beta\alpha\int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)}M(s)\,ds.$$

Применив формулу Ито [8], нетрудно убедиться в том, что процесс Y удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t) = \beta\alpha Y(t)\,dt + dM(t).$$

По формуле замены переменных

$$dM(t) = \sqrt{\rho(t)}\,dW(t).$$

Значит, процесс Y удовлетворяет уравнению

$$dY(t) = \beta\alpha Y(t)\,dt + \sqrt{\rho(t)}\,dW(t).$$

Известно [8], что решение последнего уравнения имеет вид

$$Y(t) = \int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)}\sqrt{\rho(s)}\,dW(s).$$

Теперь отсюда с учетом (14) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, поэтому мы его опускаем.

***Доказательство теоремы* 4.** Нетрудно видеть, что выполнены все условия теоремы 1.

Рассуждая, как при получении (4) и (5), нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbf{var}\, n^{-\gamma/2}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}}\left(\xi_{k,j}^{(n)}-m_n\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда, применяя неравенство Дуба для мартингалов, получаем

$$\sup_{0\le t\le T}\left|n^{-\gamma/2}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}}\left(\xi_{k,j}^{(n)}-m_n\right)\right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{15}$$

Далее, учитывая независимость и одинаковую распределенность величин $\varepsilon_k^{(n)}$, находим

$$\mathbf{var}\, n^{-\gamma/2} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n \right) = \frac{[nt]}{n^{\gamma}} b_n^2 \to tb^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь проверим условие Линдеберга для $\varepsilon_k^{(n)}$. Имеем

$$n^{-\gamma/2} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n\right| > \theta n^{\gamma/2}\right) =$$

$$= tn^{1-\gamma} \mathbf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right)^2 I\left(\left|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n\right| > \theta n^{\gamma/2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ согласно условию теоремы. Значит, из функциональной центральной предельной теоремы для независимых случайных величин [5] следует, что

$$n^{-\gamma/2} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(\varepsilon_k^{(n)} - \lambda_n \right) \to W\left(b^2 t\right), \quad n \to \infty,$$

слабо в пространстве $D[0, T]$. Отсюда и из (15) согласно лемме 8 [6, с. 19] получаем

$$n^{-\gamma/2} \sum_{k=1}^{[nt]} M_k^{(n)} \to W\left(b^2 t\right), \quad n \to \infty,$$

слабо в пространстве $D[0, T]$.

Нетрудно видеть, что

$$Z_{nk} = Z_{nk-1} + \beta_n \alpha Z_{nk-1} \cdot \frac{1}{n} + n^{-\gamma/2} M_k^{(n)},$$

где $Z_{nk} = n^{-\gamma/2} \left(X_k^{(n)} - \mathbf{E} X_k^{(n)} \right)$. Применяя теорему 3.5 [5], получаем, что процесс $Z_{nt} = Z_{n[nt]}$ слабо сходится в $D[0, T]$ к решению линейного стохастического дифференциального уравнения

$$dZ(t) = \beta\alpha Z(t)\, dt + b\, dW(t).$$

Из [8, с. 222] известно, что последнее уравнение имеет решение вида

$$Z(t) = b \int_0^t e^{\beta\alpha(t-s)}\, dW(s).$$

Теорема 4 доказана.

1. *Haccou P., Jagers P., Vatutin V. A.* Branching processes variation, growth and extinction of populations. – Cambridge Univ. Press, 2005. – 317 p.
2. *Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M. C. A.* Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the means // Adv. Appl. Probab. – 2005. – **37**. – P. 523 – 538.
3. *Хусанбаев Я. М.* Об асимптотических свойствах процесса Гальтона – Ватсона с иммиграцией // Узб. мат. журн. – 2007. – № 2. – С. 119 – 127.
4. *Хусанбаев Я. М.* О флуктуации ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона с иммиграцией // Там же. – 2008. – № 1.
5. *Анисимов В. В., Лебедев Е. А.* Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. – Киев: Либідь, 1992. – 208 с.
6. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. – Киев: Вища шк., 1974. – 318 с.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
8. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Получено 29.01.08