УДК 517.5

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

For a function analytic in a compact domain and continuous in its closure, it is proved that the module of continuity on a boundary of the domain coincides with the module of continuity in its closure.

Доведено, що для функції, аналітичної в компактній області і неперервної в її замиканні, модулі неперервності на межі області і в її замиканні збігаються між собою.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^p$ — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, и $f\colon K \to \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, — непрерывное отображение. Как уже принято, модулем непрерывности отображения f называется функция $\omega_K(f,\delta) = \omega_K(\delta)$, $\delta \in [0, \operatorname{diam} K]$, определяемая следующим образом:

$$\omega_K(\delta) = \max_{x_1, x_2 \in K} \left| f(x_1) - f(x_2) \right|$$

при всех x_1, x_2 таких, что $|x_1 - x_2| \leq \delta$.

Известно [1], что такая функция монотонно не убывает, полуаддитивна сверху, т. е.

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2),$$

и непрерывна на отрезке $[0, \operatorname{diam} K]$, причем $\omega(0) = 0$.

Если отображение f определено на некотором множестве, то в определении модуля непрерывности следует взять вместо максимума точную верхнюю грань.

Во многих исследованиях непрерывных отображений чаще рассматривают не сами модули непрерывности, а их более простые мажоранты, позволяющие достигать определенных результатов. Например, если мажорантой для $\omega(f,\delta)$ является функция $\omega^*(\delta) = L\delta$, то отсюда следует, что само отображение f липшицево, с константой L, что имеют место всевозможные интегральные представления, связанные с ним, и т. д. Короче, для многих целей рассмотрение таких мажорант оказывается достаточным.

В настоящей статье будем рассматривать следующую ситуацию: даны область $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$, функция $f(z)$, аналитическая в $\mathcal{G}$, которая непрерывно продолжается на границу $\partial\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{G}$. Ставится вопрос: как связаны между собой модули непрерывности функций $f\,|_{\partial\mathcal{G}}$ и $f\,|_{\overline{\mathcal{G}}}$?

Что касается рассмотрения мажоранты этих модулей, то здесь получено много результатов (см., например, [2]).

Нашей же целью является сравнение „чистых” модулей на границе множества $\mathcal{G}$ и на его замыкании. Мы покажем, что эти модули всегда совпадают.

Приведем несколько общих утверждений о модулях непрерывности.

Пусть в некоторой замкнутой области $\overline{\mathcal{G}} \subset \mathbb{R}^p$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$ отображения $f\colon \overline{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}^q$ имеет конечное производное число L в точке $\delta = 0$ (это еще не производная!). Тогда для соответствующей последовательности $\delta_n > 0$ имеем

$$\frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n} \geq \frac{|f(x+\xi_n) - f(x)|}{\delta_n}, \quad |\xi_n| = \delta_n.$$

Но тогда (см. [3]) отображение f будет локально липшицевым с константой L, и если $\overline{\mathcal{G}}$ выпукла, то f липшицева во всей области.

Фактически именно отсюда следует такая теорема.

Теорема 1. *Если $\mathcal{G}$ — выпуклая область в $\mathbb{R}^p$, то либо $\omega'(0) = +\infty$, либо $\omega'(0) = L$. В последнем случае f липшицево, мажорантой для $\omega(\delta)$ является $L\delta$ и сама функция $\omega(\delta)$ липшицева с константой L.*

Последнее утверждение следует из свойства полуаддитивности

$$\omega(\delta + \Delta\delta) \leq \omega(\delta) + \omega(\Delta\delta)$$

и

$$\frac{\omega(\delta + \Delta\delta) - \omega(\delta)}{\Delta\delta} \leq \frac{\omega\Delta\delta}{\Delta\delta}.$$

Приведем еще одно утверждение.

Назовем функцию $f\colon K \to \mathbb{R}^q$ нигде не постоянной, если ни на какой открытой порции K не выполняется равенство $f = \mathrm{const}$.

Теорема 2. *Если $K \subset \mathbb{R}^p$, $f\colon K \to \mathbb{R}^q$ — нигде не постоянная функция и для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ отображения f выполняется*

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \left| \frac{\ln \omega(\delta)}{\ln \delta} \right| > p,$$

то образ $f(K) \subset \mathbb{R}^q$ имеет длину нуль (*т. е.* 1*-мера Хаусдорфа его равна нулю*).

Отметим, что условие непостоянства здесь нужно только для конечности $\ln \omega(\delta)$.

Доказательство. Обозначим через $A_\varepsilon(K)$ совокупность всевозможных ε-сетей $\mathcal{E}$ компакта K. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим число

$$N_\varepsilon(K) = \min\big\{ \operatorname{card} \mathcal{E} \colon \mathcal{E} \in A_\varepsilon(K) \big\}.$$

Воспользуемся известными неравенствами [4]

$$N_{2\varepsilon}(K) \leq \mathcal{L}^p(K_\varepsilon) / \mathcal{L}^p(B, \varepsilon) \leq 15^p N_{2\varepsilon}(K), \tag{1}$$

где K_ε — ε-окрестность $K, (B, \varepsilon)$ — шар радиуса ε, $\mathcal{L}^p$ — лебегова мера.

Пусть для последовательности $\{\delta_n\}$, $\delta_n \to 0$, выполняется

$$\frac{\ln \omega(\delta_n)}{\ln \delta_n} \geq p + \eta, \quad \eta > 0;$$

рассмотрим последовательность $\mathcal{E}_n$ („минимальных”) $\dfrac{\delta_n}{2}$-сетей компакта K.

По определению, шары $B\left(x, \dfrac{\delta_n}{2}\right)$, $x \in \mathcal{E}_n$, покрывают все K и число их равно N_{δ_n}. В каждом из этих шаров выберем пару точек x', x'' так, чтобы

$$\big| f(x') - f(x'') \big| = \operatorname{diam} f(K \cap B);$$

поскольку $|x' - x''| \leq \delta_n$, то $|f(x') - f(x'')| \leq \omega(\delta_n)$.

Далее,

$$\frac{\ln \dfrac{1}{\omega(\delta_n)}}{\ln \dfrac{1}{\delta_n}} \geq p + \eta, \qquad \ln \frac{1}{\omega(\delta_n)} \geq (p + \eta) \ln \frac{1}{\delta_n},$$

$$\frac{1}{\omega(\delta_n)} \geq \frac{1}{\delta_n^{p+\eta}}, \quad \omega(\delta_n) \leq \delta_n^{p+\eta},$$

т. е. $\left|f(x') - f(x'')\right| \leq \delta_n^{p+\eta}$.

Итак, образ каждой порции $K \cap B$ имеет диаметр $\leq 2\delta_n^{p+\eta}$; число этих порций равно N_{δ_n}. Неравенство (1) принимает здесь вид

$$N_{\delta_n} \leq \mathcal{L}^p\left(K_{\delta_n/2}\right) \big/ \mathcal{L}^p\left(B, \frac{\delta_n}{2}\right) \leq 15^p N_{\delta_n}.$$

Сумма всех этих диаметров оценивается так:

$$\sum |f(x') - f(x'')| \leq \sum_{N_{\delta_n}} \delta_n^{p+\eta} = \delta_n^\eta \cdot C \sum \mathcal{L}^p\left(B, \frac{\delta_n}{2}\right) \leq \delta_n^\eta \cdot C_1 \cdot \mathcal{L}^p\left(K_{\delta_n/2}\right),$$

где C, C_1 — абсолютные константы, а $\mathcal{L}^p\left(K_{\delta_n/2}\right)$, конечно, ограничены сверху; так как η — фиксированное, а $\delta_n \to 0$, отсюда и следует наше утверждение.

Отсюда, конечно, легко следует, что величина

$$\frac{\ln \omega(\delta)}{\ln \delta}$$

для любого компакта K ограничена сверху (грубо говоря, размерностью этого компакта).

Интересно сопоставить наш результат с известным метрическим определением размерности [5]: это нижняя грань $\underline{\lim}\left(-\frac{\ln N_\varepsilon(K)}{\ln \varepsilon}\right)$, взятая для всех метрик компакта K. Теорема 2 и привела нас при доказательстве к компактам нулевой размерности.

Перейдем теперь к теме, связанной с аналитическими функциями.

Определим сначала локальный модуль непрерывности $\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; z_0, \delta)$ непрерывной в $\overline{\mathcal{G}}$ функции $f(z)$ в точке $z_0 \in \overline{\mathcal{G}}$ как

$$\max_{|z-z_0| \leq \delta z \in \overline{\mathcal{G}}} \left|f(z) - f(z_0)\right|.$$

Приведем прежде всего одну лемму [2].

Лема. *Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное открытое множество и $f(z) \neq \mathrm{const}$ — функция, непрерывная в $\overline{\mathcal{G}}$ и аналитическая в $\mathcal{G}$. Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется точка z_0, являющаяся граничной точкой одной из компонент множества $\mathcal{G}$, для которой*

$$\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; z_0, \delta) = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; \delta).$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и предположим, что $\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; \delta) > 0$. Тогда существуют конечные точки z_1, $z_2 \in \overline{\mathcal{G}}$ такие, что $|z_1 - z_2| \leq \delta$ и

$$\left|f(z_1) - f(z_2)\right| = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; \delta). \tag{2}$$

Доказательство должно быть продолжено лишь в случае, когда каждая из точек z_1, z_2 принадлежит множеству $\mathcal{G}$.

В этом случае при некотором $\rho > 0$ круги $\{z\colon |z - z_1| < \rho\}$ и $\{z\colon |z - z_2| < \rho\}$ лежат в $\mathcal{G}$. Выберем среди этих ρ максимальное конечное значение ρ_0. В круге $\{\zeta\colon |\zeta| \leq \rho_0\}$

$$\big|f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)\big| \le \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f;\delta), \tag{3}$$

а в силу (2) и (3)

$$\big|f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)\big| = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f;\delta) \quad \forall\zeta, \quad |\zeta|\le\rho_0. \tag{4}$$

Поскольку при некотором ζ_0, $|\zeta| = \rho_0$, хотя бы одна из точек $\zeta + z_1$ и $\zeta + z_2$ является граничной для какой-то из компонент множества $\mathcal{G}$, из (4) следует утверждение леммы.

Приведем определенное дополнение к проведенному доказательству.

Рассмотрим опять случай, когда пара „экстремальных" точек z_1, z_2 принадлежат области аналитичности $\mathcal{G}$.

Прежде всего, так как функция $f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2)$ достигает максимума своего модуля внутри круга $|\zeta|\le\rho_0$, она является там константой:

$$f(\zeta+z_1)-f(\zeta+z_2) = \omega(\delta)e^{i\alpha} \quad (\alpha - \text{постоянное}).$$

Это равенство означает, что в кругах $|\zeta - z_1| \le \rho_0$, $|\zeta - z_2| \le \rho_0$ из области $\mathcal{G}$ соответствующие значения функции f отличаются сдвигом на постоянный вектор. Но поскольку $f(z)$ аналитична во всей области $\mathcal{G}$, данное равенство выполняется в более широком открытом множестве, содержащем эти круги.

Его легко определить; для этого удобнее будет ввести в z-плоскости вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z+\zeta) - f(z), \quad \zeta = z_2 - z_1.$$

Искомое множество есть пересечение $\mathcal{G}\cap\mathcal{G}_{-\zeta}$, где через $\mathcal{G}_{-\zeta}$ обозначен сдвиг области $\mathcal{G}$ на вектор $-\zeta$.

Мы рассмотрим внешний граничный континуум области $\mathcal{G}$: по определению, это граница (односвязной, конечно) неограниченной компоненты дополнения $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{G}}$. Нетрудно показать, что внешние граничные континуумы областей $\overline{\mathcal{G}}$ и $\overline{\mathcal{G}}_{-\zeta}$ пересекаются; это следует из того, что пересечение $\overline{\mathcal{G}}\cap\overline{\mathcal{G}}_{-\zeta}$ непусто: оно содержит, например, точку z_1.

Возьмем точку пересечения из $\partial\mathcal{G}\cap\partial\mathcal{G}_{-\zeta}$; ей соответствуют две граничные точки z_1', z_2' первоначальной области $\mathcal{G}$ такие, что $|z_1' - z_2'| \le \delta$ и

$$f(z_1') - f(z_2') = \omega(\delta)e^{i\alpha}$$

в силу постоянства функции $\varphi(z)$ в $\overline{\mathcal{G}}\cap\overline{\mathcal{G}}_{-\zeta}$.

Итак, если значение модуля непрерывности аналитической функции достигается внутри области, то оно достигается и на ее границе.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G}\subset\mathbb{C}$ — ограниченная область и $f(z)\ne\mathrm{const}$ — функция, непрерывная в $\overline{\mathcal{G}}$ и аналитическая в $\mathcal{G}$. Тогда для каждого $\delta>0$*

$$\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f;\delta) = \omega_{\partial\mathcal{G}}(f;\delta).$$

Это равенство можно заменить (конечно, равносильным ему) неравенством, которое хорошо сочетается с классическим принципом максимума, а именно,

$$\omega_{\mathcal{G}}(f;\delta) \le \omega_{\partial\mathcal{G}}(f;\delta).$$

Здесь используются уже „вживую” сами модули непрерывности как функции от δ, а не привычные до сих пор их мажоранты. И типичная с ними формулировка такая: если $\omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta)$ имеет мажоранту $\omega(\delta)$: $\omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta) \leq \omega(\delta)$, то и $\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(\delta) \leq \omega(\delta)$, а модули непрерывности $\omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta)$, $\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(\delta)$ как функции от δ, со своими индивидуальными значениями, как бы и ни при чем . . .

Доказательство теоремы. Итак, имеем непрерывную в замыкании $\overline{\mathcal{G}}$ функцию $f(z)$, аналитическую в $\mathcal{G}$. Для удобства сразу продолжим ее на всю плоскость по непрерывности.

Возьмем произвольное $\delta < \operatorname{diam}\overline{\mathcal{G}}$ и, по лемме, точку z_0 на границе $\partial\mathcal{G}_0$, для которой

$$\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; z_0, \delta) = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; \delta).$$

Доказательство проведем сначала для случая односвязной области $\mathcal{G}$.

Предположим, вопреки данному утверждению, что

$$\omega_{\partial\mathcal{G}}(f; \delta) < \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; \delta);$$

это, конечно, верно и отдельно для $\mathcal{G}$. Это означает, что в δ-окрестности $U_\delta(z)$ каждой граничной точки $z \in \partial\mathcal{G}_0$ выполняется неравенство

$$\bigl|f(z') - f(z)\bigr| \leq \omega_1' = \omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta) < \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(\delta) = \omega$$

для всех $z' \in \partial\mathcal{G}_0 \cap U_\delta(z)$.

В то же время в круге $|z - z_0| \leq \delta$ в некоторой точке $\tilde{z} \notin \partial\mathcal{G}$ (очевидно, на окружности $|z - z_0| = \delta$) достигается $\max\limits_{z\in\overline{U}_\delta} \bigl|f(z) - f(z_0)\bigr| = \omega(\delta) = \omega$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы еще $\omega_1 < \omega - \varepsilon = \omega_0$. Рассмотрим множество

$$g = \bigl\{z\colon\ |f(z) - f(z_0)| > \omega_0\bigr\}.$$

Очевидно, что $\tilde{z} \in g$.

Открытое множество g (на плоскости, а не только в $\overline{\mathcal{G}}$ — ведь f непрерывна на всей плоскости) не может быть компактным в $\mathcal{G}$, как и множество $|\psi(z)| > C$ для любой аналитической функции $\psi(z)$, $z \in \mathcal{G}$. Поэтому найдется целая открытая порция (напомним, связной) границы $\partial\mathcal{G}$, принадлежащая g. Выберем на ней произвольную точку ζ_0:

$$|f(\zeta_0) - f(z_0)| > \omega_0.$$

(Ясно при этом, что $|\zeta_0 - z_0| > \delta$.)

Далее, выбираем на границе $\partial\mathcal{G}$ цепочку точек

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n = \zeta_0 \tag{5}$$

со взаимными расстояниями $|z_k - z_{k-1}|$, не превышающими δ, чтобы выполнялось

$$|\Delta f_k| = |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq \omega_1 \quad (< \omega_0)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Легко видеть, что на граничном континууме $\partial\mathcal{G}$ любые две точки можно „соединить” цепочкой его точек, так сказать, вершин ломаной, длины звеньев которой не превышают фиксированного $\delta > 0$. При этом ломаная может иметь много самопересечений.

Итак, построена цепочка (5) точек $z_k \in \partial\mathcal{G}$ со свойствами

$$\begin{aligned} &|\Delta f_k| = |f(z_k) - f(z_{k-1})| < \omega_1, \quad k = 1, \ldots, n, \\ &|f(z_n) - f(z_0)| > \omega_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Приведем теперь одно построение.

Пусть заданы на плоскости $n+1$ точка

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n$$

и некоторая функция $f(z)$. Рассмотрим n разностей $f(z_k) - f(z_{k-1}) = \Delta f_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и „последнюю” $f(z_n) - f(z_0)$. Построим новую функцию $F(z)$, для которой соответствующие разности кратны разностям для $f(z)$:

$$\Delta F_k = \frac{\omega_1}{\omega_0} \Delta f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{и} \quad F(z_n) - F(z_0) = \frac{\omega_0}{\omega_1} \big[f(z_n) - f(z_0) \big].$$

Обозначим через $p(z)$ полином Лагранжа, у которого $p_0 = p(z_0) = \dfrac{\omega_0}{\omega_1}$ и $p(z_k) = p(z_k) - p(z_{k-1}) = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$, а через $q(z)$ — полином, для которого $q(z_0) = 0$ и при $k,\ 1 \le k < n$,

$$q_k = q_{k-1} + \frac{\omega_1}{\omega_0} f_{k-1} + \Delta f_k \left[(k-1) \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right],$$

а при $k = n$

$$q_n = q(z_n) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} f(z_n).$$

Ясно, что при этом $p_k = k \dfrac{\omega_1}{\omega_0} + \dfrac{\omega_0}{\omega_1},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что функция $F(z) = f(z) p(z) - q(z)$ решает нашу задачу. Действительно, для каждого $k = 2, 3, \ldots, n-1$ имеем

$$\Delta F_k = f(z_k) p(z_k) - f(z_{k-1}) p(z_{k-1}) - [q(z_k) - q(z_{k-1})] =$$

$$= \Delta f_k p_k + f_{k-1} \Delta p_k - [q_k) - q_{k-1}] = \frac{\omega_1}{\omega_0} \Delta f_k.$$

Далее, для $k = 1$

$$\Delta F_1 = f(z_1) p(z_k) - f(z_0) p(z_0) - [q(z_1) - q(z_0)] =$$

$$= \Delta f_1 p_1 + f_0 \frac{\omega_1}{\omega_0} - q_1 = \Delta f_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) + f_0 \frac{\omega_1}{\omega_0} - q_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \Delta f_1.$$

И, наконец, „последняя” разность

$$\Delta F(z_n) - F(z_0) = f(z_n) p(z_n) - f(z_0) p(z_0) - [q(z_n) - q(z_0)] =$$

$$= [f(z_n) - f(z_0)] p(z_0) + f(z_n) [p(z_n) - p(z_0)] - [q(z_n) - q(z_0)] =$$

$$= [f(z_n) - f(z_0)] \frac{\omega_0}{\omega_1} + n \frac{\omega_1}{\omega_0} f(z_n) - q(z_n) = \frac{\omega_0}{\omega_1} [f(z_n) - f(z_0)].$$

Вернемся к прежней функции $f(z)$ с условиями (6). Рассматривая вместо $f(z)$ функцию $h(z) = \dfrac{f(z)}{\sqrt{\omega_0\omega_1}}$, $\omega_0 > \omega_1$, и применяя к ней достаточное число раз приведенное только что построение новых функций, но с соответственно измененными разностями, приходим к функции $F(z)$ вида $f(z)P(z) + Q(z)$ (P и Q — полиномы) со свойствами

$$\Delta F_k = \Delta h_k \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{N+1/2}, \qquad F(z_n) - F(z_0) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{N+1/2} \left[h(z_n) - h(z_0)\right],$$

т. е.

$$|\Delta F_k| \leq \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{N+1}, \qquad |F(z_n) - F(z_0)| \geq \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{N+1}.$$

Далее имеем

$$F(z_n) - F(z_0) = \sum_{k=1}^{n} \Delta F_k$$

и, с одной стороны,

$$|F(z_n) - F(z_0)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\Delta F_k| \leq n \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{N+1},$$

а с другой —

$$|F(z_n) - F(z_0)| \geq \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{N+1}.$$

Поскольку n фиксировано, при достаточно большом N эти неравенства противоречат одно другому. Теорема для односвязных областей доказана.

Общий случай сводится к доказанному следующим образом.

Здесь, на основании той же леммы, находим точку z_0 на границе $\partial\mathcal{G}$, для которой

$$\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f; z_0, \delta) = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(f, \delta) = \omega.$$

Пусть снова $\max\limits_{z \in \overline{U}_\delta} |f(z) - f(z_0)| = \omega$ достигается в некоторой точке $\tilde{z} \notin \partial\mathcal{G}$ (очевидно тогда, что на окружности $|z - z_0| = \delta$).

Предположим сначала, что z_0 — достижимая граничная точка области $\mathcal{G}$. Тогда для произвольной жордановой подобласти в $\mathcal{G}$, имеющей единственную граничную точку z_0 с $\partial\mathcal{G}$, содержащей точку $\tilde{z}$, с остальными точками и внутренностью, принадлежащими $\mathcal{G}$, применима доказанная теорема, т. е. на ее границе найдется пара точек z', z'', для которых $|z' - z''| \leq \delta$ и $|f(z') - f(z'')| = \omega(\delta)$.

Если эта пара принадлежит области $\mathcal{G}$, то, как нам уже известно, другая пара найдется и на границе $\partial\mathcal{G}$.

Если это не так, то одна из точек z', z'' совпадет с z_0. Но тогда жорданову кривую вблизи z_0 можно строить так, что вторая точка из z', z'' будет стремиться к какой-либо граничной точке области $\mathcal{G}$.

В случае, когда точка z_0 не является достижимой, берем последовательность уже достижимых граничных точек $\{z_n\}$, а соответствующие жордановы области снова строим так, чтобы они содержали точку $\tilde{z}$. Тогда модули непрерывности $\omega_n(\delta)$ в этих областях будут стремиться к $\omega(\delta)$. Ясно, как в этом случае завершается доказательство теоремы 3.

Из приведенного доказательства фактически следует, что равенство $\omega_{\overline{\mathcal{G}}} = \omega_{\overline{\mathcal{G}}}(z_0, \delta) = \omega_{\partial\mathcal{G}}$ достигается в той же точке z_0.

Покажем вкратце еще, как можно доказать основную теорему, но в предположении, что она доказана для липшицевых функций.

Прежде всего рассматриваем функцию

$$F(z) = \ln \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = f(z) + C$, $C > 0$ — достаточно большая константа, которую выбираем позже для нужных оценок, а для логарифма берем главную его ветвь, т. е. $\arg F(z) \in (-\pi, \pi)$.

Очевидно, φ и f имеют одинаковые модули непрерывности $\omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta)$ и $\omega_{\overline{\mathcal{G}}}(\delta)$; выбираем на границе $\partial\mathcal{G}$ точки $z_1,\ z_2,\ |z_1 - z_2| \le \delta$, для которых $\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \omega_{\partial\mathcal{G}}(\delta) = \omega$. Тогда получим

$$F(z_1) - F(z_2) = \ln \varphi(z_1) - \ln \varphi(z_2) = \ln \frac{\varphi(z_1)}{\varphi(z_2)} = \ln \left(1 + \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{\varphi(z_2)}\right).$$

Учитывая равенства (при $|z| \le 1/2$)

$$|\ln(1+z)| = |z| + C_1|z|^2, \quad C_1 < \frac{1}{6},$$

$$\ln(1+|z|) = |z| - C_2|z|^2, \quad C_2 < \frac{1}{3},$$

с точностью до малых второго порядка (зависящих от выбора C) имеем цепь равенств

$$F(z_1) - F(z_2) = \ln \left(1 + \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{\varphi(z_2)}\right) = \ln \left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^m}{|\varphi(z_2)|}\right) =$$

$$= \left(m = \frac{\ln \omega}{\ln |z_1 - z_2|}\right) = m \ln \left[\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^m}{|\varphi(z_2)|}\right)^{1/m}\right] = \frac{m}{|\varphi(z_2)|}|z_1 - z_2|.$$

Поскольку в силу теоремы 2 величина $\dfrac{\ln \omega}{\ln \delta}$ ограничена, F — липшицева функция в $\partial\mathcal{G}$ [3]; выбирая теперь $z_1,\ z_2$ внутри $\mathcal{G}$ и двигаясь в приведенных равенствах в обратном направлении, легко доказываем (предполагая теорему верной для липшицевых функций), что $\max|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|$ не может быть равно $\omega - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Праці Ін-ту математики АН України. – 1970. – Т. 1. – 424 с.
2. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Укр. мат. журн. – 1973. – **28**, № 1. – С. 131 – 162.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* О дифференциальных свойствах функций // Там же. – 1979. – **31**, № 3. – С. 289 – 294.
4. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. Дополнение 1. – М.: Наука, 1987. – С. 708 – 720.
5. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. – М., 1948. – С. 210 – 218.
6. *Трохимчук Ю. Ю.* О дифференциальных свойствах действительных и комплексных функций // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 4. – С. 465 – 469.

Получено 24.11.09