УДК 517.96

С. А. Плакса, В. С. Шпаковский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ГАРМОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ ТРЕТЬЕГО РАНГА*

By using analytic functions of a complex variable, we present the constructive description of monogenic functions taking values in a commutative harmonic algebra of the third rank over the field of complex numbers. We establish the isomorphism between algebras of monogenic functions in the case of transition from one harmonic basis to another.

Наведено конструктивний опис моногенних функцій, що набувають значень у комутативній гармонічній алгебрі третього рангу над полем комплексних чисел, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Встановлено ізоморфізм між алгебрами моногенних функцій при переході від одного гармонічного базису до іншого.

Эффективность применения методов теории аналитических функций комплексной переменной к исследованию плоских потенциальных полей побуждает математиков к развитию аналогичных методов для пространственных полей. Такие методы могут основываться на отображениях банаховых алгебр.

В работах [1 – 3] построены коммутативные ассоциативные банаховы алгебры такие, что дважды дифференцируемые по Гато функции со значениями в этих алгебрах имеют компоненты, удовлетворяющие трехмерному уравнению Лапласа.

Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра (над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ или полем комплексных чисел $\mathbb{C}$) с базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, $3 \le n \le \infty$. В силу равенства

$$\Delta_3 \Phi := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Phi''(\zeta)\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right)$$

каждая дважды дифференцируемая по Гато функция $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$, принимающая значения в алгебре $\mathbb{A}$, при выполнении соотношения

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0 \tag{1}$$

для базисных элементов e_1, e_2, e_3 удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа

$$\Delta_3 \Phi = 0,$$

т. е. является *моногенным потенциалом* [3, с. 30].

Следуя [1 – 3], назовем тройку векторов e_1, e_2, e_3 удовлетворяющую соотношению (1), *гармонической* и алгебру $\mathbb{A}$, содержащую гармоническую тройку, *гармонической*.

В работах [1 – 3] описаны все гармонические базисы в алгебрах третьего ранга над полем $\mathbb{C}$ и доказано, что гармонических трехмерных алгебр над полем $\mathbb{R}$ не существует. В работе [4] построены некоторые четырехмерные гармонические алгебры над полем $\mathbb{R}$. Бесконечномерная гармоническая алгебра над полем $\mathbb{R}$ построена в [3, 5].

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 25.1/084) и Государственной программы Украины № 0107U002027.

Ниже рассматривается гармоническая алгебра $\mathbb{A}_3$ [2, 3], базис которой (заметим, что он не является гармоническим) состоит из единицы алгебры 1 и элементов ρ_1, ρ_2, для которых выполняются правила умножения

$$\rho_1^2 = \rho_2, \qquad \rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0. \tag{2}$$

В силу того, что моногенные потенциалы так же, как и комплексные потенциалы плоских полей, образуют функциональную алгебру в области определения, в алгебре $\mathbb{A}_3$ имеется не меньший, чем множество голоморфных функций в алгебре $\mathbb{C}$, набор моногенных потенциалов и столь же широкий набор средств для их построения. В теореме 1.7 из [3] построены в явном виде моногенные потенциалы в форме главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_3$.

Ниже приведено конструктивное описание всех моногенных потенциалов в алгебре $\mathbb{A}_3$ с помощью аналитических функций комплексной переменной. Кроме того, устанавливается изоморфизм между алгебрами моногенных потенциалов $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$, при изменении гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ в алгебре $\mathbb{A}_3$.

1. Конструктивное описание моногенных функций в алгебре $\mathbb{A}_3$. В теореме 1.6 из [3] показано, что гармоническими базисами в алгебре $\mathbb{A}_3$ являются базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения которых по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_2 &= n_1 + n_2\rho_1 + n_3\rho_2, \\ e_3 &= m_1 + m_2\rho_1 + m_3\rho_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где n_k, m_k, $k = 1, 2, 3,$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &1 + n_1^2 + m_1^2 = 0, \\ &n_1 n_2 + m_1 m_2 = 0, \\ &n_2^2 + m_2^2 + 2(n_1 n_3 + m_1 m_3) = 0, \\ &n_2 m_3 - n_3 m_2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

и хотя бы одно из чисел в каждой из пар (n_1, n_2), (m_1, m_2) отлично от нуля. При этом умножением элементов гармонических базисов вида (3) на произвольные обратимые элементы алгебры могут быть получены все гармонические базисы в алгебре $\mathbb{A}_3$ [3, с. 29].

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_3$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, порожденную векторами $e_1 = 1$, e_2, e_3. Подмножеству S трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие множество

$$S_\zeta = \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in S\} \quad \text{в} \quad E_3.$$

Непрерывная функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, т. е. если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_3$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\big(\Phi(\zeta+\varepsilon h))-\Phi(\zeta)\big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \qquad \forall h\in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$ называется *производной Гато* функции Φ в точке ζ.

В теореме 1.3 из [3] установлены необходимые и достаточные условия моногенности функции Φ (условия Коши – Римана), которые запишем здесь в свернутом виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}e_2, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}e_3. \tag{5}$$

Моногенность комплекснозначной функции $F(\xi)$ комплексной переменной ξ понимается как голоморфность в случае, когда $\xi = \tau+i\eta$, или антиголоморфность в случае, когда $\xi = \tau-i\eta$, $\tau,\eta\in\mathbb{R}$.

Пусть f — линейный непрерывный функционал, определенный на $\mathbb{A}_3$, ядром которого является максимальный идеал $\mathcal{I} := \{\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2 : \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\}$, при этом $f(1) = 1$. Известно [6, с. 147], что f является также мультипликативным функционалом, т. е. выполняется равенство $f(ab) = f(a)f(b)$ при всех $a,b\in\mathbb{A}_3$.

Из разложения резольвенты

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-x-n_1y-m_1z}+\frac{n_2y+m_2z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}\rho_1 +$$
$$+\left(\frac{n_3y+m_3z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}+\frac{(n_2y+m_2z)^2}{(t-x-n_1y-m_1z)^3}\right)\rho_2$$
$$\forall t\in\mathbb{C}:\ t\neq x+n_1y+m_1z$$

(см. [3, с. 30]) следует, что точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, соответствующие необратимым элементам $\zeta = xe_1+ye_2+ze_3$ алгебры $\mathbb{A}_3$, образуют прямую

$$L: \quad \begin{cases} x + y\operatorname{Re}n_1 + z\operatorname{Re}m_1 = 0,\\ y\operatorname{Im}n_1 + z\operatorname{Im}m_1 = 0\end{cases}$$

в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ называют *выпуклой в направлении прямой* L, если она содержит каждый отрезок, соединяющий две ее точки и параллельный прямой L.

Лемма 1. *Пусть область* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *является выпуклой в направлении прямой* L *и* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_3$ *— моногенная функция в области* Ω_ζ. *Если точки* $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ *такие, что* $\zeta_2-\zeta_1\in L_\zeta$, *то*

$$\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) — точки области Ω такие, что отрезок, соединяющий их, параллелен прямой L.

В области Ω построим две поверхности с общим краем: поверхность Q, содержащую точку (x_1,y_1,z_1), и поверхность Σ, содержащую точку (x_2,y_2,z_2), такие, что сужения функционала f на соответствующие им подмножества Q_ζ,

Σ_ζ области Ω_ζ являются взаимно однозначными отображениями этих подмножеств на одну и ту же область G комплексной плоскости и, кроме того, в каждой точке $\zeta_0 \in Q_\zeta$ (или $\zeta_0 \in \Sigma_\zeta$) выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \big(\Phi(\zeta_0+\varepsilon(\zeta-\zeta_0)) - \Phi(\zeta_0)\big)\varepsilon^{-1} = \Phi'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0) \tag{7}$$

при всех $\zeta \in Q_\zeta$ таких, что $\zeta_0+\varepsilon(\zeta-\zeta_0)\in Q_\zeta$ для любого $\varepsilon\in(0,1)$ (или, соответственно, при всех $\zeta\in\Sigma_\zeta$ таких, что $\zeta_0+\varepsilon(\zeta-\zeta_0)\in\Sigma_\zeta$ для любого $\varepsilon\in(0,1)$).

В качестве поверхности Q рассмотрим в области Ω фиксированный равносторонний треугольник с вершинами A_1, A_2, A_3 и центром в точке (x_1, y_1, z_1), плоскость которого перпендикулярна прямой L, и продолжим построение поверхности Σ.

Рассмотрим треугольник с вершинами A_1', A_2', A_3' и центром в точке (x_2, y_2, z_2), лежащий в области Ω, такой, что его стороны $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ параллельны соответственно отрезкам A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 и имеют меньшую длину, чем стороны треугольника $A_1A_2A_3$. Поскольку область Ω является выпуклой в направлении прямой L, призма с вершинами $A_1', A_2', A_3', A_1'', A_2'', A_3''$ такая, что точки A_1'', A_2'', A_3'' лежат в плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ и ее ребра $A_m'A_m''$ при $m = \overline{1,3}$ параллельны прямой L, полностью содержится в Ω.

Зафиксируем теперь треугольник с вершинами B_1, B_2, B_3 такой, что точка B_m лежит на отрезке $A_m'A_m''$ при $m = \overline{1,3}$ и усеченная пирамида с вершинами $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ и боковыми ребрами A_mB_m, $m = \overline{1,3}$, полностью содержится в области Ω.

Наконец, в плоскости треугольника $A_1'A_2'A_3'$ зафиксируем треугольник T с вершинами C_1, C_2, C_3 такой, что его стороны C_1C_2, C_2C_3, C_1C_3 параллельны соответственно отрезкам $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ и имеют меньшую длину, чем стороны треугольника $A_1'A_2'A_3'$. По построению усеченная пирамида с вершинами B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 и боковыми ребрами B_mC_m, $m = \overline{1,3}$, полностью содержится в области Ω.

Обозначим через Σ поверхность, образованную треугольником T и боковыми поверхностями усеченных пирамид $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ и $B_1B_2B_3C_1C_2C_3$.

Поскольку поверхности Q и Σ имеют общий край, множества Q_ζ и Σ_ζ отображаются функционалом f на одну и ту же область G комплексной плоскости. В области G определим две комплекснозначные функции H_1 и H_2 так, что при каждом $\xi\in G$

$$H_1(\xi) = f(\Phi(\zeta)), \quad \text{где} \quad \xi = f(\zeta) \text{ и } \zeta\in Q_\zeta,$$

$$H_2(\xi) = f(\Phi(\zeta)), \quad \text{где} \quad \xi = f(\zeta) \text{ и } \zeta\in \Sigma_\zeta.$$

Покажем, что H_1 и H_2 являются моногенными в G функциями комплексной переменной ξ. С этой целью заметим, что, действуя на равенство (7) функционалом f, с учетом его линейности, непрерывности и мультипликативности получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\big(f(\Phi(\zeta_0+\varepsilon(\zeta-\zeta_0)))-f(\Phi(\xi))\big)\varepsilon^{-1} = f(\Phi'(\zeta_0))(f(\zeta)-f(\zeta_0)),$$

из которого для функций H_1, H_2 следует существование производных в точке $f(\zeta_0)\in G$ по всем направлениям, причем для каждой из функций H_1, H_2 указанные производные равны. Следовательно, по теореме 21 из [7] функции H_1, H_2 являются моногенными в области G.

Поскольку из определения функций H_1 и H_2 следует, что $H_1(\xi)\equiv H_2(\xi)$ на границе области G, в силу моногенности функций H_1 и H_2 в области G тождество $H_1(\xi)\equiv H_2(\xi)$ выполняется всюду в G. Следовательно, при $\zeta_1 := x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3$ и $\zeta_2 := x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3$ справедливы равенства

$$f(\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)) = f(\Phi(\zeta_2))-f(\Phi(\zeta_1)) = 0,$$

т. е. $\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)$ принадлежит ядру $\mathcal{I}$ функционала f.

Лемма доказана.

Заметим, что условие выпуклости области Ω в направлении прямой L в лемме 1 является существенным. Ниже построен пример области Ω, не являющейся выпуклой в направлении прямой L, и моногенной функции $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_3$, для которой соотношение (6) не выполняется при некоторых $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ таких, что $\zeta_2-\zeta_1\in L_\zeta$.

Обозначим через D область в $\mathbb{C}$, на которую область Ω_ζ отображается функционалом f. Введем в рассмотрение линейный оператор A, который каждой моногенной функции $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_3$ ставит в соответствие функцию $F:D\to\mathbb{C}$ по формуле $F(\xi):=f(\Phi(\zeta))$, где $\zeta = xe_1+ye_2+ze_3$ и $\xi := f(\zeta) = x+n_1y+m_1z$. Из леммы 1 следует, что значение $F(\xi)$ не зависит от выбора точки ζ, для которой $f(\zeta) = \xi$.

Теперь аналогично теореме 2.4 из [3] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямой L. Тогда каждая моногенная в области Ω_ζ функция $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_3$ представима в виде*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\zeta}(A\Phi)(t)(t-\zeta)^{-1}dt + \Phi_0(\zeta) \qquad \forall\zeta\in\Omega_\zeta, \tag{8}$$

где замкнутая жорданова спрямляемая кривая Γ_ζ лежит в области D и охватывает точку $f(\zeta)$, а $\Phi_0:\Omega_\zeta\to\mathcal{I}$ — некоторая моногенная в области Ω_ζ функция, принимающая значения в идеале $\mathcal{I}$.

Заметим, что комплексное число $\xi = f(\zeta)$ является спектром элемента ζ алгебры $\mathbb{A}_3$ и интеграл в равенстве (8) является главным продолжением моногенной функции $F(\xi) = (A\Phi)(\xi)$ комплексной переменной ξ в область Ω_ζ.

Из теоремы 1 следует, что алгебра моногенных в области Ω_ζ функций разлагается в прямую сумму алгебры главных продолжений в Ω_ζ моногенных функций комплексной переменной и алгебры моногенных в Ω_ζ функций, принимающих значения в идеале $\mathcal{I}$.

В теореме 1.7 из [3] построено в явном виде главное продолжение моногенной функции комплексной переменной $F: D \to \mathbb{C}$ в область $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f(\zeta) \in D\}$, разложение которого по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\zeta} F(t)(t-\zeta)^{-1}dt \; = \; F(x+n_1y+m_1z) \; +$$

$$+ \; (n_2y+m_2z)\,F'(x+n_1y+m_1z)\rho_1 \; +$$

$$+ \left((n_3y+m_3z)\,F'(x+n_1y+m_1z) + \frac{(n_2y+m_2z)^2}{2}\,F''(x+n_1y+m_1z)\right)\rho_2 \tag{9}$$

$$\forall \zeta \; = \; xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Pi_\zeta .$$

Очевидно, что конгруэнтная области Π_ζ область Π пространства $\mathbb{R}^3$ является бесконечным цилиндром, образующие которого параллельны прямой L.

В следующей теореме описаны все моногенные функции, определенные в области Ω_ζ и принимающие значения в идеале $\mathcal{I}$, с помощью моногенных функций соответствующей комплексной переменной.

Теорема 2. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямой L. Тогда каждая моногенная функция $\Phi_0 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}$, принимающая значения в максимальном идеале $\mathcal{I}$, представима в виде*

$$\Phi_0(\zeta) \; = \; F_1(\xi)\,\rho_1 + \big(F_2(\xi) + (n_2y+m_2z)\,F_1'(\xi)\big)\,\rho_2 \tag{10}$$

$$\forall \zeta \; = \; xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta ,$$

где F_1 и F_2 — произвольные моногенные в области D функции и $\xi = x + n_1y + m_1z$.

Доказательство. Так как Φ_0 принимает значения в максимальном идеале, справедливо равенство

$$\Phi_0(\zeta) \; = \; V_1(x,y,z)\,\rho_1 + V_2(x,y,z)\,\rho_2 , \tag{11}$$

где $V_k : \Omega \to \mathbb{C}$ при $k = 1, 2$. Для функции $\Phi_0(\zeta)$ выполняются условия моногенности (5) при $\Phi = \Phi_0$, из которых после подстановки в них выражений (3), (11) с учетом однозначности разложения элементов алгебры $\mathbb{A}_3$ по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ получим систему уравнений для нахождения функций V_1, V_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial y} \; &= \; n_1\frac{\partial V_1}{\partial x}, \\
\frac{\partial V_2}{\partial y} \; &= \; n_2\frac{\partial V_1}{\partial x} + n_1\frac{\partial V_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial V_1}{\partial z} \; &= \; m_1\frac{\partial V_1}{\partial x}, \\
\frac{\partial V_2}{\partial z} \; &= \; m_2\frac{\partial V_1}{\partial x} + m_1\frac{\partial V_2}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из первого и третьего уравнений системы (12) найдем функцию V_1. С этой целью выделим сначала действительную и мнимую части выражения

$$\xi = (x + y \operatorname{Re} n_1 + z \operatorname{Re} m_1) + i(y \operatorname{Im} n_1 + z \operatorname{Im} m_1) =: \tau + i\eta \tag{13}$$

и заметим, что следствием указанных уравнений являются равенства

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} \operatorname{Im} n_1 = i \frac{\partial V_1}{\partial \tau} \operatorname{Im} n_1, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \operatorname{Im} m_1 = i \frac{\partial V_1}{\partial \tau} \operatorname{Im} m_1. \tag{14}$$

Поскольку из первого уравнения системы (4) следует, что хотя бы одно из чисел $\operatorname{Im} n_1$ или $\operatorname{Im} m_1$ отлично от нуля, из (14) получаем равенство

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} = i \frac{\partial V_1}{\partial \tau}. \tag{15}$$

Докажем, что $V_1(x_1, y_1, z_1) = V_1(x_2, y_2, z_2)$ для точек (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ таких, что отрезок, соединяющий эти точки, параллелен прямой L. С этой целью рассмотрим в области Ω поверхности Q, Σ и область G в $\mathbb{C}$, определенные в доказательстве леммы 1, и определим в G две комплекснозначные функции H_1, H_2 равенствами

$$H_1(\xi) = V_1(x, y, z) \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in Q,$$

$$H_2(\xi) = V_1(x, y, z) \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in \Sigma,$$

в которых соответствие между точками (x, y, z) и $\xi \in G$ устанавливается соотношением (13).

Вследствие равенства (15) и теоремы 6 из [8] функции H_1, H_2 являются моногенными в области G. Далее тождество $H_1(\xi) \equiv H_2(\xi)$ в G доказывается так же, как при доказательстве леммы 1. Следовательно, равенство $V_1(x_1, y_1, z_1) = V_1(x_2, y_2, z_2)$ доказано.

Таким образом, функция V_1 вида $V_1(x, y, z) := F_1(\xi)$, где $F_1(\xi)$ — произвольная моногенная в области D функция, является общим решением системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} &= n_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= m_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}, \end{aligned} \tag{16}$$

состоящей из первого и третьего уравнений системы (12).

Теперь из второго и четвертого уравнений системы (12) для нахождения функции $V_2(x, y, z)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial y} - n_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= n_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} - m_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= m_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}. \end{aligned} \tag{17}$$

Ее частным решением является функция

$$v_2(x, y, z) := (n_2 y + m_2 z) F_1'(\xi).$$

Действительно, подставляя v_2 в первое уравнение системы (17), получаем равенство

$$n_2 F_1'(\xi) + n_2 y \frac{\partial F_1'(\xi)}{\partial y} + m_2 z \frac{\partial F_1'(\xi)}{\partial y} =$$

$$= n_2 \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x} + n_1 n_2 y \frac{\partial F_1'(\xi)}{\partial x} + n_1 m_2 z \frac{\partial F_1'(\xi)}{\partial x},$$

справедливое вследствие тождеств

$$F_1'(\xi) \equiv \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial y} \equiv n_1 \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x}.$$

Аналогично устанавливается, что функция v_2 удовлетворяет второму уравнению системы (17).

Следовательно, общее решение системы (17) представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы (аналогичной системе (16)) в виде

$$V_2(x, y, z) = F_2(\xi) + (n_2 y + m_2 z) F_1'(\xi),$$

где F_2 — произвольная моногенная в области D функция.

Теорема доказана.

В силу равенств (8), (10) все моногенные функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ в случае, когда область Ω является выпуклой в направлении прямой L, могут быть построены с помощью трех произвольных комплекснозначных моногенных функций $F(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ комплексной переменной $\xi \in D$ в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\zeta} F(t)(t-\zeta)^{-1} dt + \rho_1 F_1(x + n_1 y + m_1 z) +$$

$$+ \rho_2\big(F_2(x + n_1 y + m_1 z) + (n_2 y + m_2 z) F_1'(x + n_1 y + m_1 z)\big) \qquad (18)$$

$$\forall \zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in \Omega_\zeta,$$

при этом справедливо также разложение (9) главного продолжения функции F по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$.

Теорема 3. *Пусть область* Ω *является выпуклой в направлении прямой* L, *а функция* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ *— моногенной в области* Ω_ζ. *Тогда* Φ *продолжается до функции, моногенной в области* Π_ζ.

Утверждение теоремы следует непосредственно из равенства (18), правая часть которого является моногенной функцией в области Π_ζ.

Построим пример области Ω, не являющейся выпуклой в направлении прямой L, и моногенной функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, для которой соотношение (6) не выполняется при некоторых $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ таких, что $\zeta_2 - \zeta_1 \in L_\zeta$.

Рассмотрим гармонический базис

$$e_1 = 1,$$

$$e_2 = i + \frac{1}{2} i\rho_2, \qquad (19)$$

$$e_3 = -\rho_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} i\rho_2$$

(т. е. в разложениях (3) $n_1 = i$, $n_2 = i/2$, $n_3 = m_1 = 0$, $m_2 = -1$, $m_3 = -\sqrt{3}\,i/2$), при этом прямая L совпадает с осью Oz.

Рассмотрим область Ω_ζ, которая является объединением трех множеств

$$\Omega_\zeta^{(1)} := \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3 : |x+iy| < 2,\ 0 < z < 2,\ -\pi/4 < \arg(x+iy) < 3\pi/2 \right\},$$

$$\Omega_\zeta^{(2)} := \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3 : |x+iy| < 2,\ 2 \le z \le 4,\ \pi/2 < \arg(x+iy) < 3\pi/2 \right\},$$

$$\Omega_\zeta^{(3)} := \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_3 : |x+iy| < 2,\ 4 < z < 6,\ \pi/2 < \arg(x+iy) < 9\pi/4 \right\}.$$

Очевидно, что конгруэнтная ей область Ω пространства $\mathbb{R}^3$ не является выпуклой в направлении прямой L.

Рассмотрим в области $\left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 2,\ -\pi/4 < \arg\xi < 3\pi/2 \right\}$ комплексной плоскости голоморфную ветвь $H_1(\xi) := \ln|\xi| + i\arg\xi$ аналитической функции $\operatorname{Ln}\xi$, для которой $H_1(1) = 0$, а также голоморфную ветвь $H_2(\xi) := \ln|\xi| + i\arg\xi$ функции $\operatorname{Ln}\xi$ в области $\left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 2,\ \pi/2 < \arg\xi < 9\pi/4 \right\}$, для которой $H_2(1) = 2\pi i$.

Построим главное продолжение Φ_1 функции H_1 на множество $\Omega_\zeta^{(1)} \cup \Omega_\zeta^{(2)}$ и главное продолжение Φ_2 функции H_2 на множество $\Omega_\zeta^{(2)} \cup \Omega_\zeta^{(3)}$ по формулам вида (9):

$$\Phi_1(\zeta) = H_1(x+iy) - \frac{2z-iy}{2(x+iy)}\rho_1 - \left(\frac{\sqrt{3}iz}{2(x+iy)} + \frac{(2z-iy)^2}{8(x+iy)^2} \right)\rho_2,$$

$$\Phi_2(\zeta) = H_2(x+iy) - \frac{2z-iy}{2(x+iy)}\rho_1 - \left(\frac{\sqrt{3}iz}{2(x+iy)} + \frac{(2z-iy)^2}{8(x+iy)^2} \right)\rho_2,$$

где $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Поскольку $\Phi_1(\zeta) \equiv \Phi_2(\zeta)$ на множестве $\Omega_\zeta^{(2)}$, функция

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \Phi_1(\zeta) & \text{при } \zeta \in \Omega_\zeta^{(1)} \cup \Omega_\zeta^{(2)}, \\ \Phi_2(\zeta) & \text{при } \zeta \in \Omega_\zeta^{(3)} \end{cases}$$

является моногенной в области Ω_ζ. При этом для точек $\zeta_1 = e_1 + e_3$ и $\zeta_2 = e_1 + 5e_3$ имеем $\zeta_2 - \zeta_1 \in L_\zeta$, но

$$\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1) = 2\pi i - 4\rho_1 - (12 + 2\sqrt{3}i)\rho_2 \notin \mathcal{I},$$

т. е. соотношение (6) не выполняется.

Следующее утверждение справедливо для моногенных функций в произвольной области Ω_ζ.

Теорема 4. *Пусть функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ является моногенной в области Ω_ζ. Тогда производные Гато всех порядков функции Φ являются моногенными функциями в области Ω_ζ.*

Доказательство. Поскольку шар $\mho$ с центром в произвольной точке

$(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, целиком содержащийся в области Ω, является выпуклой в направлении прямой L областью, в окрестности $\mho_\zeta$ точки $\zeta_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3$ справедливо равенство (8), в котором интеграл имеет производные Гато всех порядков в $\mho_\zeta$. Кроме того, для функции Φ_0 в $\mho_\zeta$ справедливо представление (10), в силу которого Φ_0 является бесконечно дифференцируемой по переменным x, y, z функцией. Поэтому производная Гато Φ_0' удовлетворяет в $\mho_\zeta$ условиям вида (5), т. е. является моногенной функцией. Аналогично устанавливается, что производные Гато всех порядков функции Φ_0 являются моногенными функциями в $\mho_\zeta$.

Теорема доказана.

В силу теоремы 4 каждая моногенная в области Ω_ζ функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ является моногенным потенциалом в этой области.

2. Об изоморфизме алгебр моногенных функций в различных гармонических базисах. Обозначим через $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ алгебру моногенных функций в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$.

Наряду с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ будем рассматривать еще один гармонический базис $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$. Обозначим через

$$\tilde{E}_3 := \left\{ \tilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 : \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R} \right\}$$

линейную оболочку, порожденную векторами $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, и через $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ область в $\tilde{E}_3$.

Укажем такое соответствие между областями Ω_ζ, $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ при переходе от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$, при котором алгебры моногенных функций $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\tilde{E}_3, \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}})$ изоморфны.

Рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Пусть гармонические базисы* $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 = 1, \\ \tilde{e}_2 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + r_{21}\rho_1 + r_{22}\rho_2, \\ \tilde{e}_3 &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + e_3 + r_{31}\rho_1 + r_{32}\rho_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, *причем* $\alpha_2 \neq 0$, $r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32} \in \mathbb{C}$. *Если функция* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ *моногенна в области* Ω_ζ, *то функция*

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = \Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)\big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + {} \\ + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\big) + \frac{1}{2}\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2 \end{aligned} \tag{21}$$

является моногенной в области $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ *такой, что координаты соответствующих точек* $\tilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \alpha_1 \tilde{y} + \beta_1 \tilde{z}, \\ y &= \alpha_2 \tilde{y} + \beta_2 \tilde{z}, \\ z &= \tilde{z}. \end{aligned} \tag{22}$$

Доказательство. Покажем, что для функции (21) выполняются необходимые и достаточные условия моногенности

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \tilde{e}_2, \qquad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \tilde{e}_3. \tag{23}$$

Следствием соотношений (22) являются операторные равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

с учетом которых получаем выражения частных производных функции (21):

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x}\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2 \Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi''}{\partial x}(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2 \rho_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = {} & \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right)\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + {} \\ & + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2 \Big) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(r_{21}\rho_1 + r_{22}\rho_2) + {} \\ & + \frac{1}{2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi''}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi''}{\partial y} \right)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2 \rho_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}) r_{21}\rho_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{z}} = {} & \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(r_{31}\rho_1 + r_{32}\rho_2) + {} \\ & + \left(\beta_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2 \Big) + {} \\ & + \frac{1}{2}\left(\beta_1 \frac{\partial \Phi''}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \Phi''}{\partial y} + \frac{\partial \Phi''}{\partial z} \right)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2 \rho_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}) r_{31}\rho_2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения частных производных функции (21) и выражения (20) элементов $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ в равенства (23) и учитывая при этом правила умножения (2) и условия (5), убеждаемся в выполнимости условий (23).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть гармонические базисы* $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ *связаны соотношениями* (20) *и функция* $\tilde{\Phi} : \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}} \to \mathbb{A}_3$ *является моногенной в области* $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$. *Тогда существует единственная моногенная в области* Ω_ζ *функция* $\Phi(\zeta)$ *такая, что справедливо равенство* (21), *где координаты соответствую-*

щих точек $\tilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями* (22).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) - \tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta})\big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + $$

$$+ (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\big) + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}''(\tilde{\zeta})(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2, \qquad (24)$$

моногенность которой доказывается аналогично доказательству моногенности функции (21).

Покажем, что функция (24) удовлетворяет соотношению (21). С этой целью после умножения обеих частей равенства (24) на ρ_2 получим равенство

$$\rho_2\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) = \rho_2\Phi(\zeta),$$

следствием которого являются равенства

$$\rho_2\tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta}) = \rho_2\Phi'(\zeta), \qquad \rho_2\tilde{\Phi}''(\tilde{\zeta}) = \rho_2\Phi''(\zeta). \qquad (25)$$

Аналогично после умножения обеих частей равенства (24) на ρ_1 получим равенства

$$\rho_1\Phi(\zeta) = \rho_1\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) - \rho_2\tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta})(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}) = \rho_1\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) - \rho_2\Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}),$$

следствием которых является равенство

$$\rho_1\tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta}) = \rho_1\Phi'(\zeta) + \rho_2\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}). \qquad (26)$$

Подставляя равенства (25), (26) в равенство (24), убеждаемся в справедливости соотношения (21).

Докажем теперь единственность моногенной функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, удовлетворяющей равенству (21). Для этого достаточно показать, что функции $\tilde{\Phi} \equiv 0$ в $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ соответствует лишь функция $\Phi \equiv 0$ в Ω_ζ. Так, при $\tilde{\Phi} \equiv 0$ равенство (21) принимает вид

$$\Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + $$

$$+ \Phi'(\zeta)(r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2 + \frac{1}{2}\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2 \equiv 0. \qquad (27)$$

После умножения обеих частей тождества (27) на ρ_2 с учетом правил умножения (2) получим тождество $\Phi(\zeta)\rho_2 \equiv 0$, следствием которого являются соотношения

$$\Phi'(\zeta)\rho_2 \equiv 0, \qquad \Phi''(\zeta)\rho_2 \equiv 0. \qquad (28)$$

Аналогично после умножения обеих частей тождества (27) на ρ_1 получим соотношение

$$\Phi(\zeta)\rho_1 + \Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_2 \equiv 0,$$

которое с учетом первого из соотношений (28) превращается в тождество $\Phi(\zeta)\rho_1 \equiv 0$. Следовательно,

$$\Phi'(\zeta)\rho_1 \equiv 0. \qquad (29)$$

Наконец, из соотношений (27) – (29) следует тождество $\Phi \equiv 0$.

Лемма доказана.

Пусть теперь $\{e_1, e_2, e_3\}$ — гармонический базис, элементы которого определены равенствами (19), а $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ — произвольный гармонический базис в $\mathbb{A}_3$.

Элементы базиса $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ представимы в виде

$$\tilde{e}_1 = a\tilde{e}_1^{(1)}, \qquad \tilde{e}_2 = a\tilde{e}_2^{(1)}, \qquad \tilde{e}_3 = a\tilde{e}_3^{(1)}, \tag{30}$$

где a — обратимый элемент алгебры $\mathbb{A}_3$ и для элементов базиса $\{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}, \tilde{e}_3^{(1)}\}$ справедливы разложения вида (3) по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$, в которых в силу равенства $1 + n_1^2 + m_1^2 = 0$ без нарушения общности можно считать, что $\operatorname{Im} n_1 \neq 0$. Тогда элементы базиса $\{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}, \tilde{e}_3^{(1)}\}$ представимы также в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1^{(1)} &= e_1, \\
\tilde{e}_2^{(1)} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + r_{21}\rho_1 + r_{22}\rho_2, \\
\tilde{e}_3^{(1)} &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + e_3 + r_{31}\rho_1 + r_{32}\rho_2.
\end{aligned}$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 := \operatorname{Re} n_1, \qquad \alpha_2 := \operatorname{Im} n_1, \qquad \beta_1 := \operatorname{Re} m_1, \qquad \beta_2 := \operatorname{Im} m_1, \\
&r_{21} := n_2, \qquad r_{22} := n_3 - \frac{1}{2} i \operatorname{Im} n_1, \\
&r_{31} := m_2 + 1, \qquad r_{32} := m_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} i \operatorname{Im} m_1.
\end{aligned}$$

Теорема 5. *Пусть* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *— гармонический базис, элементы которого определены равенствами* (19), *а* $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ *— произвольный гармонический базис в* $\mathbb{A}_3$, *элементы которого представлены в виде* (30). *Пусть, кроме того,* Ω_ζ *— произвольная область в* E_3 *и* $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ *— область в* $\tilde{E}_3$ *такая, что координаты соответствующих точек* $\tilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями* (22). *Тогда алгебры* $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\tilde{E}_3, \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}})$ *изоморфны, при этом соответствие между функциями* $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ *и* $\tilde{\Phi} \in \mathcal{M}(\tilde{E}_3, \tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}})$ *устанавливается равенством* (21).

Доказательство. Определим область $\tilde{\Omega}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}$ в

$$\tilde{E}_3^{(1)} := \left\{\tilde{\zeta}^{(1)} = \tilde{x}\tilde{e}_1^{(1)} + \tilde{y}\tilde{e}_2^{(1)} + \tilde{z}\tilde{e}_3^{(1)} : \ \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}\right\},$$

координаты точек $\tilde{\zeta}^{(1)}$ которой связаны с координатами соответствующих точек $\zeta \in \Omega_\zeta$ соотношениями (22), и каждой функции $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ поставим в соответствие функцию $\tilde{\Phi}^{(1)} \in \mathcal{M}(\tilde{E}_3^{(1)}, \tilde{\Omega}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}})$ по формуле вида (21). В силу лемм 2, 3 такое соответствие между алгебрами $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\tilde{E}_3^{(1)}, \tilde{\Omega}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}})$ является взаимно однозначным. При этом из равенства

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)}(\tilde{\zeta}^{(1)})\,\tilde{\Phi}_2^{(1)}(\tilde{\zeta}^{(1)}) \;=\; \Phi_1(\zeta)\,\Phi_2(\zeta) \;+$$
$$+\;\big(\Phi_1(\zeta)\,\Phi_2'(\zeta)+\Phi_2(\zeta)\,\Phi_1'(\zeta)\big)\big((r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})\rho_1+(r_{22}\tilde{y}+r_{32}\tilde{z})\rho_2\big)\;+$$
$$+\;\frac{1}{2}\big(\Phi_1''(\zeta)\,\Phi_2(\zeta)+2\Phi_1'(\zeta)\,\Phi_2'(\zeta)+\Phi_1(\zeta)\,\Phi_2''(\zeta)\big)(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})^2\,\rho_2$$

следует, что произведение функций $\tilde{\Phi}_1^{(1)},\ \tilde{\Phi}_2^{(1)}\in\mathcal{M}(\tilde{E}_3^{(1)},\,\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}^{(1)})$ соответствует произведению функций $\Phi_1,\ \Phi_2\in\mathcal{M}(E_3,\,\Omega_\zeta)$, т. е. алгебры $\mathcal{M}(E_3,\,\Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\tilde{E}_3^{(1)},\,\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}^{(1)})$ изоморфны.

Наконец, изоморфизм между алгебрами $\mathcal{M}(\tilde{E}_3^{(1)},\,\tilde{\Omega}_{\zeta^{(1)}}^{(1)})$, $\mathcal{M}(\tilde{E}_3,\,\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}})$ устанавливается с помощью равенства

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) \;:=\; \tilde{\Phi}^{(1)}(\tilde{\zeta}^{(1)}),$$

где $\tilde{\zeta} \;=\; \tilde{x}\tilde{e}_1+\tilde{y}\tilde{e}_2+\tilde{z}\tilde{e}_3\in\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$, $\tilde{\zeta}^{(1)} \;=\; \tilde{x}\tilde{e}_1^{(1)}+\tilde{y}\tilde{e}_2^{(1)}+\tilde{z}\tilde{e}_3^{(1)}\in\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}^{(1)}$, при этом моногенность функции $\tilde{\Phi}$ в области $\tilde{\Omega}_{\tilde{\zeta}}$ является очевидным следствием условий моногенности вида (5) для функции $\tilde{\Phi}^{(1)}$ и обратимости элемента $a\in\mathbb{A}_3$.

Теорема доказана.

В силу теоремы 5 представляется очевидным тот факт, что в дальнейших исследованиях достаточно ограничиться изучением моногенных функций $\Phi\in\mathcal{M}(E_3,\,\Omega_\zeta)$, где линейная оболочка E_3 порождена гармоническим базисом, элементы которого определены равенствами (19).

1. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 606 – 613.
2. *Мельниченко И. П.* Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа // Там же. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1284 – 1290.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
4. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, № 4. – P. 641 – 667.
5. *Плакса С. А.* Условия Коши – Римана для пространственных гармонических функций // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 396 – 403.
6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
7. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
8. *Толстов Г. П.* О криволинейном и повторном интеграле // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1950. – **35**. – С. 3 – 101.

Получено 31.03.09