УДК 512.643

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

We consider the problem of localization of eigenvalues of polynomial matrices. Sufficient conditions are suggested for belonging of the spectrum of a regular matrix polynomial to a wide class of domains bounded by algebraic curves. These conditions generalize the known method of localization of the spectrum of polynomial matrices consisting in the solution of linear matrix inequalities. We also develop the method of localization of eigenvalues of a parameter family of matrix polynomials in the form of a system of linear matrix inequalities.

Роботу присвячено задачі локалізації власних значень поліноміальних матриць. Запропоновано достатні умови належності спектра регулярного матричного полінома широкому класу областей, обмежених алгебраїчними кривими. Ці умови узагальнюють відомий метод локалізації спектра поліноміальних матриць, що зводиться до розв'язання лінійних матричних нерівностей. Розвивається метод локалізації власних значень параметричної сім'ї матричних поліномів у вигляді системи лінійних матричних нерівностей.

1. Введение. Многие теоретические и прикладные задачи связаны с анализом спектральных свойств матричных полиномов и функций. Спектр $\sigma(F)$ матричного полинома

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s, \quad A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad i = 0, \ldots, s, \tag{1.1}$$

при условии регулярности $\det F(\lambda) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, составляют все его собственные значения, являющиеся корнями характеристического уравнения $\det F(\lambda) = 0$ с учетом кратностей. Каждому собственному значению $\lambda \in \sigma(F)$ соответствуют левые и правые собственные векторы $u^* \neq 0$, $v \neq 0$, определяемые соотношениями $u^* F(\lambda) = 0$ и $F(\lambda)v = 0$.

Собственные значения и собственные векторы матричных полиномов используются, в частности, в теории устойчивости и стабилизации динамических систем при описании основных динамических характеристик. Если непосредственное вычисление собственных значений матричного полинома (1.1) не приводит к желаемым результатам, особенно в случаях высоких порядков s и размеров $n \times n$, то становятся актуальными задачи оценки и локализации точек $\sigma(F)$ относительно заданных областей комплексной плоскости. Этим задачам посвящены многочисленные работы (см., например, [1 – 5]).

В [6], в частности, получены условия расположения всех собственных значений матричного полинома (1.1) в областях вида

$$\Lambda_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{\lambda} + \gamma_{10}\lambda + \gamma_{11}\lambda\bar{\lambda} > 0\right\},$$

где γ_{00}, $\gamma_{01} = \bar{\gamma}_{10}$, γ_{11} — заданные коэффициенты. Данные условия имеют вид линейных матричных неравенств

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}^* + \mathcal{C}\begin{bmatrix} \gamma_{00}X & \gamma_{01}X \\ \gamma_{10}X & \gamma_{11}X \end{bmatrix}\mathcal{C}^T > 0, \quad X = X^* > 0, \tag{1.2}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \left[\begin{array}{c|c} I_{ns} & 0_{n,ns} \\ 0_{n,ns} & I_{ns} \end{array}\right].$$

Матрицы X и $\mathcal{B}$ в (1.2) подлежат определению. В компьютерной системе MATLAB имеется эффективная процедура для решения систем линейных матричных неравенств общего вида.

Очевидно, что каждая область Λ_1 при определенных ограничениях на коэффициенты γ_{ij} ограничена некоторой прямой или окружностью $\varphi(x, y) = 0$. В этом легко убедиться, полагая $\lambda = x + iy$ и исключая случаи $\Lambda_1 = \mathbb{C}$ и $\Lambda_1 = \varnothing$.

Данная работа посвящена задачам локализации собственных значений матричных полиномов и их семейств. В п. 2 обобщаются соотношения (1.2) и устанавливаются достаточные условия принадлежности спектра матричного полинома широкому классу областей в комплексной плоскости, ограниченных алгебраическими кривыми:

$$\Lambda_k = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda, \bar{\lambda}) := \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} \lambda^i \bar{\lambda}^j > 0\right\}, \tag{1.3}$$

где $k \geq 1$, γ_{ij} — скалярные коэффициенты, составляющие эрмитову матрицу Γ размера $(k+1) \times (k+1)$. В частности, при $k \geq s$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть существуют* $n \times n$*-матрицы* $B_0, \ldots, B_k$, $H = H^*$ *и* $X = X^* \geq 0$ *такие, что*

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}H\mathcal{A}^* + \Gamma \otimes X > 0, \tag{1.4}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}, \quad A_{s+1} = \ldots = A_k := 0_{n,n}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}.$$

Тогда все собственные значения матричного полинома (1.1) *расположены в области* (1.3).

В п. 3 рассматриваются примеры использования полученных результатов для линейных и квадратичных матричных пучков, а также в случае скалярного полинома произвольной степени. В п. 4 развивается метод локализации собственных значений семейств матричных полиномов, возникающих в задачах о робастной устойчивости. Данный метод сводится к решению систем линейных матричных неравенств. Приводится иллюстративный пример.

В работе используются следующие обозначения: $\otimes$, $*$ и T — операции соответственно кронекерового произведения, комплексного сопряжения и транспонирования матриц; I_n — единичная матрица размера $n \times n$; $0_{n,m}$ — нулевая матрица размера $n \times m$; $X > 0$ $(X \geq 0)$ — положительно (неотрицательно) определенная матрица X; $i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\}$ — инерция эрмитовой матрицы $X = X^*$, состоящая из количеств ее положительных $(i_+(X))$, отрицательных $(i_-(X))$ и нулевых $(i_0(X))$ собственных значений с учетом кратностей; $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ — максимальное (минимальное) собственное значение эрмитовой матрицы, $\sigma(F)$ — спектр матричного полинома $F(\lambda)$.

2. Локализация спектра алгебраическими кривыми. Рассмотрим регулярный матричный полином (1.1) и алгебраическую область Λ_k вида (1.3) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Будем предполагать, что Λ_k не совпадает с $\mathbb{C}$ и $\varnothing$. Для этого необходимо, чтобы матрица Γ не была неотрицательно или неположительно определенной, т. е. $i_+(\Gamma) \neq 0$ и $i_-(\Gamma) \neq 0$.

Сформулируем условия принадлежности всех точек $\sigma(F)$ области Λ_k с помощью более общего, чем (1.2), матричного неравенства.

Теорема 2.1. *Пусть существуют матрицы*

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}, \quad H = H^*, \quad X = \begin{bmatrix} X_{00} & \cdots & X_{0r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r0} & \cdots & X_{rr} \end{bmatrix},$$

в которых все B_i, H, X_{ij} *размера* $n \times n$, $m = \max(s, k)$, $r = m - k$, *и для которых выполняются два условия*:

1) *матричное неравенство*

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}H\mathcal{A}^* + L(X) > 0, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad A_{s+1} = \ldots = A_m := 0_{n,n}, \quad L(X) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} C_i X C_j^T,$$

$$C_i = \Delta^i E \otimes I_n, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1,m} & 0 \\ I_m & 0_{m,1} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_{r+1} \\ 0_{k,r+1} \end{bmatrix};$$

2) *включение*

$$\mathbb{C}\backslash\Lambda_k \subseteq \Omega := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=0}^{r} \lambda^i \bar{\lambda}^j X_{ij} \geq 0 \right\}. \tag{2.2}$$

Тогда все собственные значения матричного полинома (1.1) *расположены в области* Λ_k.

Доказательство. Запишем оператор $L(X)$ в (2.1) в виде

$$L(X) = \mathcal{C}(\Gamma \otimes X)\mathcal{C}^T, \quad \mathcal{C} = \left[C_0, \ldots, C_k \right] = R \otimes I_n,$$

где матрица R размера $(m+1) \times (k+1)(r+1)$ имеет следующую структуру:

$$R = \left[E, \Delta E, \ldots, \Delta^k E \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{r+1} & 0_{1,r+1} & & 0_{1,r+1} \\ 0_{1,r+1} & I_{r+1} & \cdots & 0_{k-1,r+1} \\ 0_{k-1,r+1} & 0_{k-1,r+1} & & I_{r+1} \end{array} \right].$$

Очевидно, что $F(\lambda) = Z_m(\lambda)\mathcal{A}$ и $f(\lambda, \bar{\lambda}) = z_k(\lambda)\Gamma z_k^*(\lambda)$, где

$$Z_m(\lambda) = \left[I_n, \lambda I_n, \ldots, \lambda^m I_n \right] = z_m(\lambda) \otimes I_n, \quad z_m(\lambda) = \left[1, \lambda, \ldots, \lambda^m \right].$$

Используя структуру матрицы $\mathcal{C}$ и свойства кронекерового произведения, имеем

$$Z_m(\lambda)\mathcal{C} = \big(z_m(\lambda)\otimes I_n\big)(R\otimes I_n) = z_m(\lambda)R\otimes I_n =$$

$$= \Big[z_r(\lambda),\, \lambda z_r(\lambda),\, \ldots,\, \lambda^k z_r(\lambda)\Big]\otimes I_n = z_k(\lambda)\otimes z_r(\lambda)\otimes I_n = z_k(\lambda)\otimes Z_r(\lambda).$$

Умножив матричное неравенство (2.1) слева (справа) на матрицу полного ранга $Z_m(\lambda)$ $\Big(Z_m^*(\lambda)\Big)$, получим

$$F(\lambda)G^*(\lambda) + G(\lambda)F^*(\lambda) + F(\lambda)HF^*(\lambda) +$$

$$+ \big[z_k(\lambda)\otimes Z_r(\lambda)\big](\Gamma\otimes X)\Big[z_k^*(\lambda)\otimes Z_r^*(\lambda)\Big] = F(\lambda)G^*(\lambda) +$$

$$+ G(\lambda)F^*(\lambda) + F(\lambda)HF^*(\lambda) + f(\lambda,\bar{\lambda})\,Z_r(\lambda)\,XZ_r^*(\lambda) > 0,$$

где $G(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^m B_m$ — некоторый матричный полином.

Пусть $\lambda = \lambda_0 \in \sigma(F)$ — произвольное собственное значение матричного полинома $F(\lambda)$, и предположим, что $\lambda_0 \notin \Lambda_k$. Тогда согласно (2.2) $f(\lambda_0, \bar{\lambda}_0)\times$ $\times\, Z_r(\lambda_0)\, XZ_r^*(\lambda_0) \le 0$, и, следовательно,

$$F(\lambda_0)G^*(\lambda_0) + G(\lambda_0)F^*(\lambda_0) + F(\lambda_0)HF^*(\lambda_0) > 0.$$

Однако, это не так, поскольку

$$v_0^*\Big[F(\lambda_0)G^*(\lambda_0) + G(\lambda_0)F^*(\lambda_0) + F(\lambda_0)HF^*(\lambda_0)\Big]v_0 = 0,$$

где $v_0^* \ne 0$ — левый собственный вектор матричного полинома $F(\lambda)$, соответствующий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F)$. Из полученного противоречия следует, что при условиях (2.1) и (2.2) должно быть $\lambda_0 \in \Lambda_k$.

Теорема доказана.

Отметим, что при решении матричного неравенства (2.1) нет никаких ограничений на матрицу $\mathcal{B}$. В частности, она может быть нулевой. В случае $k > s$ теорема 2.1 сохраняет силу, если не все блоки $A_{s+1}, \ldots, A_m$ матрицы $\mathcal{A}$ нулевые, но таковы, что спектр матричного полинома $F_m(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots$ $\ldots + \lambda^m A_m$ содержит изучаемый спектр $\sigma(F)$. В случае $k \le s$ данные блоки в $\mathcal{A}$ отсутствуют. Матрицу H целесообразно искать в виде положительно определенной матрицы, например можно положить $H = I_n$. Если условия теоремы 2.1 выполняются при $H \le 0$, то все собственные значения вспомогательного матричного полинома $G(\lambda)$ так же, как и $F(\lambda)$, должны принадлежать области (1.3). Ограничение (2.2) на блочную матрицу X выполняется для любой области Λ_k в случае, когда Ω — вся комплексная плоскость, т. е. $Z_r(\lambda)XZ_r^*(\lambda) \ge 0$ $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы искомая матрица X была неотрицательно определенной.

Теорема 2.1 обобщает и развивает метод локализации спектра матричного полинома, предложенный в [6] для класса областей Λ_1 в виде матричных неравенств (1.2). Если $k = 1$ и $H = 0$, то матричные неравенства (2.1) и (1.2) совпадают. В данном утверждении нет ограничений на порядок используемых алгебраических кривых, а условие (2.2) в общем случае не требует положительной определенности решений X соответствующих матричных неравенств.

Следует обратить внимание на случай $k \ge s$, приводящий к следствию теоремы 2.1 в виде теоремы 1.1. В этом случае $m = k$, $r = 0$, $\mathcal{C} = I_{n(k+1)}$ и матричное неравенство (2.1) упрощается к виду (1.4). При этом неизвестные эрмитовы матрицы X и H имеют одинаковые размеры $n \times n$ и в теореме 1.1 вместо условия (2.2) используем неравенство $X = X^* \geq 0$.

Пусть $\mathcal{A}^+ = (\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^*$ — псевдообратная матрица, а $\mathcal{A}^\perp$ — матрица размера $n(m+1) \times nm$, составленная из ортогонального дополнения линейно независимых вектор-столбцов $\mathcal{A}$ до базиса пространства $\mathbb{C}^{n(m+1)}$. Тогда

$$\mathcal{A}^+\mathcal{A} = I_n, \quad \mathcal{A}^{\perp *}\mathcal{A} = 0_{nm,n}, \quad \det T \neq 0, \quad T = \left[\mathcal{A}^{+*}, \mathcal{A}^\perp\right]. \tag{2.3}$$

Умножим слева (справа) матричное неравенство (2.1) на T^* (T) и используем известный критерий положительной определенности блочной матрицы:

$$\begin{bmatrix} P & V \\ V^* & Q \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow Q > 0, \quad P > VQ^{-1}V^*. \tag{2.4}$$

В данном случае

$$P = H + \mathcal{B}^*\mathcal{A}^{+*} + \mathcal{A}^+\mathcal{B} + \mathcal{A}^+L(X)\mathcal{A}^{+*}, \quad Q = \mathcal{A}^{\perp *}L(X)\mathcal{A}^\perp,$$

$$V = \left[\mathcal{B}^* + \mathcal{A}^+L(X)\right]\mathcal{A}^\perp.$$

Так как последнее неравенство в (2.4) всегда можно удовлетворить путем выбора матрицы $H > 0$, разрешимость неравенства $Q > 0$ эквивалентна разрешимости исходного неравенства (2.1). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть для некоторой матрицы* $X = X^*$ *размера* $n(m+1) \times n(m+1)$ *выполняются условие* (2.2) *и матричное неравенство*

$$M(X) := \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} D_i X D_j^* > 0, \tag{2.5}$$

где $D_i = \mathcal{A}^{\perp *}C_i$, $i = 0, \ldots, k$. *Тогда все собственные значения матричного полинома* (1.1) *расположены в области* (1.3).

Отметим, что если $\det A_0 \neq 0$, то матрицу $\mathcal{A}^{\perp *}$, удовлетворяющую соотношениям (2.3), всегда можно построить в виде

$$\mathcal{A}^{\perp *} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & I_n & \cdots & 0_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_m & 0_{n,n} & \cdots & I_n \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_i = \begin{cases} -A_i A_0^{-1}, & \text{если } i \leq s, \\ 0_{n,n}, & \text{если } i > s. \end{cases} \tag{2.6}$$

В случае $k = s$ оператор (2.5) с учетом (2.6) имеет блочную структуру

$$M(X) = \left\| Y_{pq}(Z) \right\|_{p,q=1}^{s} > 0, \tag{2.7}$$

где $Y_{pq}(Z) = \gamma_{00}A_p Z A_q^* - \gamma_{p0}A_0 Z A_q^* - \gamma_{0q}A_p Z A_0^* + \gamma_{pq}A_0 Z A_0^*$, $X = A_0 Z A_0^*$.

При условиях регулярности матричного полинома $F(\lambda)$ существует $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det A_{\alpha 0} \neq 0$, где

$$A_{\alpha 0} = F(\alpha), \qquad F_\alpha(\lambda) := F(\lambda + \alpha) = A_{\alpha 0} + \lambda A_{\alpha 1} + \ldots + \lambda^s A_{\alpha s}.$$

Поскольку $\sigma(F_\alpha) = \sigma(F) - \alpha$, включения $\sigma(F) \subset \Lambda_k$ и $\sigma(F_\alpha) \subset \Lambda_{\alpha k}$ эквивалентны. Здесь область $\Lambda_{\alpha k}$ определена в виде (1.3) с использованием эрмитовой матрицы Γ_α, составленной из коэффициентов разложения

$$f(\lambda + \alpha, \overline{\lambda + \alpha}) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij}^{(\alpha)} \lambda^i \bar{\lambda}^j.$$

Отметим, что существуют различные способы сведения спектральных задач для матричных полиномов к аналогичным задачам для линейных пучков матриц. Приведем один из них, основанный на применении матриц типа $\mathcal{A}^\perp$ [7].

Использовав блочное представление матрицы $\mathcal{A}^{\perp *} = [U_0, \ldots, U_s]$, удовлетворяющей соотношениям (2.3), построим линейный пучок матриц

$$A - \lambda B = [U_1, \ldots, U_s] - \lambda [U_0, \ldots, U_{s-1}] \tag{2.8}$$

и рассмотрим следующие соотношения:

$$u^* F(\lambda) = 0, \quad u \neq 0, \tag{2.9}$$

$$v^* (A - \lambda B) = 0, \quad v \neq 0, \tag{2.10}$$

$$v^* \mathcal{A}^{\perp *} = u^* Z_s(\lambda), \qquad u = U_0^* v \neq 0. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.9) и (2.10) определяют собственные значения и соответствующие левые собственные векторы матричного полинома (1.1) и пучка матриц (2.8). Легко установить эквивалентность соотношений (2.10) и (2.11). С другой стороны, из определения матрицы $\mathcal{A}^{\perp *}$ и представления $F(\lambda) = Z_s(\lambda)\mathcal{A}$ следует, что выполнение соотношений (2.9) равносильно выполнению соотношений (2.11) для некоторого вектора $v \neq 0$. Следовательно, соотношения (2.9) и (2.10) эквивалентны. При этом тождественное выполнение одного из равенств (2.9) или (2.10) при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ влечет тождественное выполнение другого из них. Это означает, что свойства регулярности матричного полинома (1.1) и пучка матриц (2.8) также эквивалентны.

Лемма 2.1. *Множества всех различных собственных значений* λ_i *матричного полинома* (1.1) *и пучка матриц* (2.8) *совпадают, а их соответствующие левые собственные векторы связаны соотношениями* $u_i^* = v_i^* U_0$, $i = 1, \ldots, l$.

Сформулируем критерии принадлежности спектра матричного полинома $F(\lambda)$ областям класса Λ_1. В этом случае оператор (2.5) сводится к виду

$$M(X) = \gamma_{00} BXB^* + \gamma_{01} BXA^* + \gamma_{10} AXB^* + \gamma_{11} AXA^*, \tag{2.12}$$

где A и B — матрицы линейного пучка (2.8). Действительно, используя блочную структуру матриц

$$\mathcal{A}^{\perp *} = \left[U_0, \ldots, U_s\right], \quad E = \begin{bmatrix} I_s \\ 0_{1,s} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1,s} & 0 \\ I_s & 0_{s,1} \end{bmatrix},$$

получаем матричные коэффициенты

$$D_0 = \mathcal{A}^{\perp *}(E \otimes I_n) = B, \quad D_1 = \mathcal{A}^{\perp *}(\Delta E \otimes I_n) = A.$$

В частности, для матрицы (2.6) имеем

$$B = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & I_n & \cdots & 0_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{s-1} & 0_{n,n} & \cdots & I_n \\ \hat{A}_s & 0_{n,n} & \cdots & 0_{n,n} \end{bmatrix}, \quad A = I_{ns}.$$

Учитывая лемму 2.1 и общие свойства положительно обратимых операторов в пространстве эрмитовых матриц, можно сформулировать следующее утверждение (см., например, [3]).

Теорема 2.3. *Включение* $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ *выполняется в том и только в том случае, когда существуют эрмитовы матрицы* X *и* Y, *удовлетворяющие соотношениям*:

1) $M(X) = Y \geq 0, \; BXB^* \geq 0, \; \operatorname{rank}\left[A - \lambda B, Y\right] \equiv ns.$

Если матрица B *невырождена, то данное включение эквивалентно каждому из следующих утверждений*:

2) *матричное неравенство* $M(X) > 0$ *имеет решение* $X = X^* > 0$;

3) *для любой матрицы* $Y = Y^* > 0$ *матричное уравнение* $M(X) = Y$ *имеет решение* $X = X^* > 0$;

4) *оператор* M *положительно обратим относительно конуса неотрицательно определенных матриц.*

Доказательство достаточности критерия 1 состоит в следующем. Если предположить, что некоторое собственное значение $\lambda_0 \notin \Lambda_1$, то согласно (2.10) для соответствующего левого собственного вектора v^* должны выполняться противоречивые соотношения

$$f(\lambda_0, \bar{\lambda}_0) \leq 0, \quad v^* BXB^* v \geq 0, \quad f(\lambda_0, \bar{\lambda}_0) v^* BXB^* v = v^* Y v > 0.$$

При условии $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ матрицы X и Y в критерии 1 всегда можно построить в виде [3]

$$X = Z\hat{X}Z^*, \quad Y = BZ\hat{Y}Z^*B^*, \quad \operatorname{rank}\left[AZ, BZ\right] = \operatorname{rank}(BZ).$$

Последний факт устанавливается с использованием канонической формы Кронекера регулярного пучка матриц [8]. В случае невырожденной матрицы B критерии 2 – 4 следуют из известных теорем о локализации собственных значений с помощью обобщенного уравнения Ляпунова.

***Замечание* 2.1.** Достаточные условия включения $\sigma(F) \subset \Lambda_k$, представленные теоремами 2.1 и 2.2, при определенных ограничениях могут стать и необходимыми не только в случае $k = 1$ (теорема 2.3). Можно показать, что при выполнении матричного неравенства (2.1) $i_+\left(L(X)\right) \geq nm$ и, следовательно (см. [4], теорема 4.2.1),

$$i_+(\Gamma)\, i_+(X) \; + \; i_-(\Gamma)\, i_-(X) \;\geq\; nm.$$

Последнее неравенство необходимо также для выполнения условий теоремы 2.2. В частности, если $k \geq s$ и $X > 0$, то для выполнения матричного неравенства (2.5) необходимо ограничение $i(\Gamma) = \{k, 1, 0\}$. Критерии разрешимости матричного неравенства (2.5) могут быть изучены на основе общих теорем об инерции эрмитовых решений трансформируемых матричных уравнений [3, 4], в которых используются ограничения на инерцию матрицы Γ и свойства одновременной приводимости к треугольному виду матричных коэффициентов D_i, $i = 0, \ldots, k$.

3. Примеры. 1. Пусть $F(\lambda) = A - \lambda B$ — регулярный пучок $n \times n$-матриц и Λ_1 — область вида (1.3). Матричное неравенство (2.1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} AB_0^* + B_0A^* + AHA^* + \gamma_{00}X & AB_1^* - B_0B^* - AHB^* + \gamma_{01}X \\ -BB_0^* + B_1A^* - BHA^* + \gamma_{10}X & -BB_1^* - B_1B^* + BHB^* + \gamma_{11}X \end{bmatrix} > 0.$$

Матричное неравенство (2.5) с использованием оператора $M(X)$ для линейного пучка $F_\alpha(\lambda) = F(\alpha) - \lambda B$ и области $\Lambda_{\alpha 1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda + \alpha, \bar{\lambda} + \bar{\alpha}) > 0\}$, приводится к виду

$$\gamma_{00}BZB^* + \gamma_{10}AZB^* + \gamma_{01}BZA^* + \gamma_{11}AZA^* > 0,$$

где $X = F(\alpha)\, ZF^*(\alpha)$, $\alpha \notin \sigma(F)$. При этом $\mathcal{A}^{\perp *} = \left[BF^{-1}(\alpha), I_n\right]$. Данное неравенство в силу эквивалентности включений $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ и $\sigma(F_\alpha) \subset \Lambda_{\alpha 1}$ можно использовать в теореме 2.2 для исходного пучка матриц $F(\lambda)$ и области Λ_1. В частности, полагая

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

имеем условия размещения спектра $\sigma(F)$ внутри левой полуплоскости и единичного круга в виде существования решений $Z = Z^* > 0$ соответствующих матричных неравенств

$$AZB^* + BZA^* < 0 \quad \text{и} \quad BZB^* - AZA^* > 0.$$

2. Пусть $F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$ — регулярный квадратичный пучок $n \times n$-матриц и Λ_k, $k \leq 2$ — область вида (1.3). Выражение $\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}H\mathcal{A}^*$ в (2.1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} AB_0^* + B_0A^* + AHA^* & AB_1^* + B_0B^* + AHB^* & AB_2^* + B_0C^* + AHC^* \\ BB_0^* + B_1A^* + BHA^* & BB_1^* + B_1B^* + BHB^* & BB_2^* + B_1C^* + BHC^* \\ CB_0^* + B_2A^* + CHA^* & CB_1^* + B_2B^* + CHB^* & CB_2^* + B_2C^* + CHC^* \end{bmatrix}.$$

Для класса областей Λ_1 имеем $1 = k < s = 2$, $m = 2$, $r = 1$,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{bmatrix},$$

$$L(X) = \begin{bmatrix} \gamma_{00}X_{00} & \gamma_{00}X_{01} + \gamma_{01}X_{00} & \gamma_{01}X_{01} \\ \gamma_{00}X_{10} + \gamma_{10}X_{00} & \sum\limits_{ij=0}^{1} \gamma_{ij}X_{1-i1-j} & \gamma_{01}X_{11} + \gamma_{11}X_{01} \\ \gamma_{10}X_{10} & \gamma_{10}X_{11} + \gamma_{11}X_{10} & \gamma_{11}X_{11} \end{bmatrix}.$$

Для класса областей Λ_2, ограниченных алгебраическими кривыми не выше 4-го порядка, в теоремах 2.1 и 2.2 используем операторы

$$L(X) = \begin{bmatrix} \gamma_{00}X & \gamma_{01}X & \gamma_{02}X \\ \gamma_{10}X & \gamma_{11}X & \gamma_{12}X \\ \gamma_{20}X & \gamma_{21}X & \gamma_{22}X \end{bmatrix}, \quad M(X) = \begin{bmatrix} Y_{11}(Z) & Y_{12}(Z) \\ Y_{21}(Z) & Y_{22}(Z) \end{bmatrix},$$

где

$$Y_{11}(Z) = \gamma_{00}BZB^* - \gamma_{10}AZB^* - \gamma_{01}BZA^* + \gamma_{11}AZA^*,$$

$$Y_{12}(Z) = \gamma_{00}BZC^* - \gamma_{10}AZC^* - \gamma_{02}BZA^* + \gamma_{12}AZA^*,$$

$$Y_{22}(Z) = \gamma_{00}CZC^* - \gamma_{20}AZC^* - \gamma_{02}CZA^* + \gamma_{22}AZA^*.$$

3. Пусть $F(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda^s a_s$ — скалярный полином степени s. Матричное неравенство (2.1) имеет вид

$$ab^* + ba^* + haa^* + L(X) > 0,$$

где $a \in \mathbb{C}^{s+1}$ — вектор коэффициентов полинома $F(\lambda)$, $h \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}^{s+1}$. При определении оператора $L(X)$ для класса областей Λ_1 используем матрицы

$$E = \begin{bmatrix} I_s \\ 0_{1,s} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1,s} & 0 \\ I_s & 0_{s,1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0_{1,s} \\ 0_{1,s} & I_s \end{array}\right],$$

$$X = \| x_{ij} \|_{i,j=0}^{s-1}.$$

В частности, для левой полуплоскости и единичного круга, отвечающих матрицам (3.1), данный оператор имеет соответственно вид

$$L(X) = -\begin{bmatrix} 0 & x_{00} & \cdots & x_{0s-2} & x_{0s-1} \\ x_{00} & x_{01}+x_{10} & \cdots & x_{0s-1}+x_{1s-2} & x_{1s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{s-20} & x_{s-10}+x_{s-21} & \cdots & x_{s-1s-2}+x_{s-2s-1} & x_{s-1s-1} \\ x_{s-10} & x_{s-11} & \cdots & x_{s-1s-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$L(X) = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0s-1} & 0 \\ x_{10} & x_{11}-x_{00} & \cdots & x_{1s-1}-x_{0s-2} & -x_{0s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{s-10} & x_{s-11}-x_{s-20} & \cdots & x_{s-1s-1}-x_{s-2s-2} & -x_{s-2s-1} \\ 0 & -x_{s-10} & \cdots & -x_{s-1s-2} & -x_{s-1s-1} \end{bmatrix}.$$

Для каждой области Λ_k при $k \geq s$ оператор $L(X) = x\Gamma$ является матричнозначной функцией скалярного аргумента $X = x$.

4. Семейства матричных полиномов. Рассмотрим параметрическое семейство регулярных матричных полиномов

$$F(\lambda, p) = A_0(p_0) + \lambda A_1(p_1) + \ldots + \lambda^s A_s(p_s), \quad \det F(\lambda, p) \not\equiv 0. \quad (4.1)$$

Значения матричных коэффициентов $A_i(p_i)$, зависящих от параметров

$$p_i = \left[\, p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i} \,\right]^T \in \mathcal{P}_{\nu_j} := \left\{ q \in \mathbb{R}^{\nu_i} : q_1 \geq 0, \ldots, q_{\nu_i} \geq 0, \sum_{j=1}^{\nu_i} q_j = 1 \right\},$$

образуют семейство политопов $n \times n$-матриц

$$\mathcal{A}_i = \left\{ A \in C^{n\times n} : A = \sum_{j=1}^{\nu_i} p_{ij} A_{ij},\ p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i} \right\}, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Общий вектор параметров $p = \left[p_0^T, \ldots, p_s^T \right]^T \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\nu_0} \times \ldots \times \mathcal{P}_{\nu_s}$ имеет порядок $\nu = \nu_0 + \ldots + \nu_s$.

Выделим все „вершинные” матричные полиномы

$$F_{t_0 \ldots t_s}(\lambda) = A_{0t_0} + \lambda A_{1t_1} + \ldots + \lambda^s A_{st_s}, \quad t_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Их количество равно $\nu_0 \ldots \nu_s$. Если $\nu_i = 1$ для некоторого i, то $t_i = 1$ и в (4.1) соответствующий матричный коэффициент A_i не зависит от p_i.

Лемма 4.1. *Для любого вектора* $p \in \mathcal{P}_\nu$ *выполняется матричное неравенство* $pp^T \leq P := \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_\nu)$.

Доказательство. Покажем, что для любого вектора $x \in \mathbb{R}^\nu$ выполняется неравенство $\psi(x) = x^T (P - pp^T) x \geq 0$. Действительно,

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} p_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i \neq j} p_i p_j x_i^2 - \sum_{i \neq j} p_i p_j x_i x_j = \sum_{i<j} p_i p_j (x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых матриц* $\mathcal{B}$, $H = H^* \leq 0$ *и* $X_{t_0 \ldots t_s} = X^*_{t_0 \ldots t_s}$ *выполняются условие* (2.2) *и система матричных неравенств*

$$\mathcal{A}_{t_0 \ldots t_s} \mathcal{B}^* + \mathcal{B} \mathcal{A}^*_{t_0 \ldots t_s} + \mathcal{A}_{t_0 \ldots t_s} H \mathcal{A}^*_{t_0 \ldots t_s} + L(X_{t_0 \ldots t_s}) > 0, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{A}_{t_0 \ldots t_s} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{cases} A_{it_i}, & \text{если } i \leq s, \\ 0_{n,n}, & \text{если } i > s, \end{cases}$$

$$t_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Тогда при любом $p \in \mathcal{P}$ *все собственные значения матричного полинома* (4.1) *расположены в области* (1.3).

Доказательство. Покажем, что для любого $p \in \mathcal{P}$ выполняется матричное неравенство

$$\mathcal{A}(p)\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}(p)^* + \mathcal{A}(p) H \mathcal{A}(p)^* + L(X(p)) > 0, \tag{4.3}$$

где

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{cases} A_i(p_i), & \text{если } i \leq s, \\ 0_{n,n}, & \text{если } i > s, \end{cases}$$

$$t_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}, \quad i = 0, \ldots, s,$$

$X(p)$ — неотрицательная линейная комбинация матриц $X_{t_0 \ldots t_s}$, удовлетворяющая условию (2.2).

Все матричные неравенства системы (4.2) упорядочиваются наборами индексов $\{t_0, \ldots, t_s\}$. Зафиксируем индексы $i = 0$ и $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}, j \neq 0$. Затем умножим ν_0 неравенств (4.2), отвечающих наборам индексов $\{1, t_1, \ldots \ldots, t_s\}, \ldots, \{\nu_0, t_1, \ldots, t_s\}$, соответственно на $p_{01}, \ldots, p_{0\nu_0}$ и просуммируем их, учитывая, что $p_0 = [p_{01}, \ldots, p_{0\nu_0}]^T \in \mathcal{P}_{\nu_0}$. Для всевозможных комбинаций индексов $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}, j \neq 0$, выполним такие же операции. Полученные неравенства будем использовать в системе (4.2) вместо уже рассмотренных неравенств. При этом все неравенства данной системы упорядочиваются наборами индексов $\{t_1, \ldots, t_s\}$, где $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}, j = 1, \ldots, s$. Аналогичную процедуру выполним при каждом $i = 1, \ldots, s$, использовав векторы $p_1 = [p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}]^T \in \mathcal{P}_{\nu_i}$. На последнем шаге получим одно блочное неравенство, к первым $s+1$ диагональным блокам которого прибавим и вычтем соответствующие выражения $A_i(p_i)HA_i(p_i)^*$. В результате получим матричное неравенство

$$\mathcal{A}(p)\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}(p)^* + \mathcal{A}(p)H\mathcal{A}(p)^* + S(p) + L(X(p)) > 0,$$

где $S(p)$ — блочно-диагональная матрица с диагональными блоками

$$S_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\nu_i} p_{ij}A_{ij}HA_{ij}^* - A_i(p_i)HA_i(p_i)^*, & \text{если } i \le s, \\ 0_{n,n}, & \text{если } i > s, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Представим первые s диагональных блоков данной матрицы в виде

$$S_i = W_i\left[\left(P_i - p_ip_i^T\right) \otimes H\right]W_i^*, \quad W_i = \left[A_{i1}, \ldots, A_{i\nu_i}\right],$$

$$P_i = \operatorname{diag}(p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}).$$

Согласно лемме 4.1 $P_i \ge p_ip_i^T$ при $p_i \in \mathcal{P}_i$. Используя следующее свойство кронекерового произведения эрмитовых матриц:

$$P = P^* \ge 0, \quad Q = Q^* \le 0 \Rightarrow P \otimes Q \le 0,$$

получаем, что $S(p) \le 0$ при $p \in \mathcal{P}$. Следовательно, выполняется матричное неравенство (4.3) и, согласно теореме 2.1, все собственные значения матричного полинома (4.1) расположены в области (1.3) для любого $p \in \mathcal{P}$.

Теорема доказана.

***Замечание* 4.1.** Если система матричных неравенств (4.2) выполняется при $H = H^* \le 0$, то она выполняется и при $H = 0$. Поэтому при использовании теоремы 4.1 всегда можно положить $H = 0$. Если $H = H^* < 0$, то матричное неравенство (4.3) эквивалентно блочному неравенству

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(p)\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathcal{A}(p)^* + L(X(p)) & \mathcal{A}(p) \\ \mathcal{A}(p)^* & -H^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.4}$$

В аналогичном виде представляются все неравенства системы (4.2). Зависимость от параметров p в (4.4) линейна. Поэтому в данном случае можно провести доказательство теоремы 4.1 без использования леммы 4.1.

Отметим, что теорему 4.1 можно использовать для параметрических и интервальных семейств регулярных матричных полиномов вида

$$F(\lambda, p) = \sum_{i=1}^{\nu} p_i(A_{0i} + \lambda A_{1i} + \ldots + \lambda^s A_{si}), \quad p \in \mathcal{P}_\nu, \tag{4.5}$$

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s, \quad \underline{A}_i \le A_i \le \overline{A}_i, \quad i = 0, \ldots, s. \tag{4.6}$$

Семейство (4.1) приводится к виду (4.5) в случае, когда все векторы параметров $p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}$ имеют одинаковый порядок ν и совпадают. В этом случае система (4.2) состоит из ν матричных неравенств. Интервальное семейство (4.6), наиболее часто используемое в приложениях, также описывается в виде (4.1). Действительно, для этого в (4.1) следует положить

$$A_i = A_i(p_i) = \sum_{j=1}^{\nu_i} p_{ij} A_{ij}, \quad A_{ij} = \left\| a_{t\tau}^{ij} \right\|_{t,\tau=1}^{n}, \quad a_{t\tau}^{ij} \in \left\{ \underline{a}_{t\tau}^{i}, \overline{a}_{t\tau}^{i} \right\}, \quad \nu_i = 2^{n^2},$$

$$\underline{A}_i = \left\| \underline{a}_{t\tau}^{i} \right\|_{t,\tau=1}^{n}, \quad \overline{A}_i = \left\| \overline{a}_{t\tau}^{i} \right\|_{t,\tau=1}^{n}, \quad p_i = \left[p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i} \right] E^T \in \mathcal{P}_{\nu_i},$$

$$i = 0, \ldots, s.$$

При этом система (4.2) будет состоять из $2^{(s+1)n^2}$ матричных неравенств.

***Пример* 4.1.** Рассмотрим двухмассовую механическую систему, изображенную на рис. 1 и описываемую уравнениями [9]

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + d_1\dot{x}_1 + (c_1 + c_{12})x_1 - c_{12}x_2 &= 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + d_2\dot{x}_2 + (c_2 + c_{12})x_2 - c_{12}x_1 &= u. \end{aligned} \tag{4.7}$$

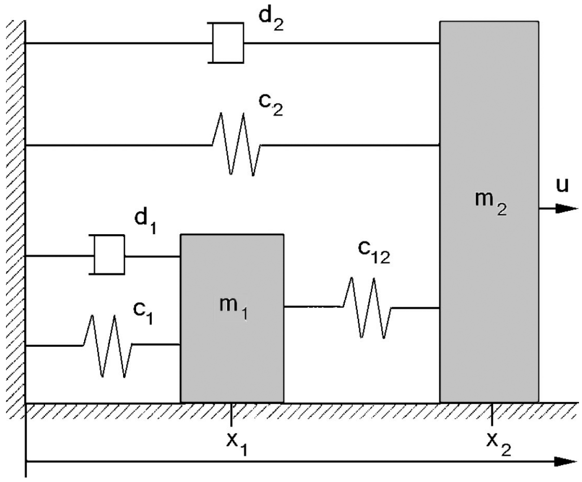

Рис. 1. Механическая система.

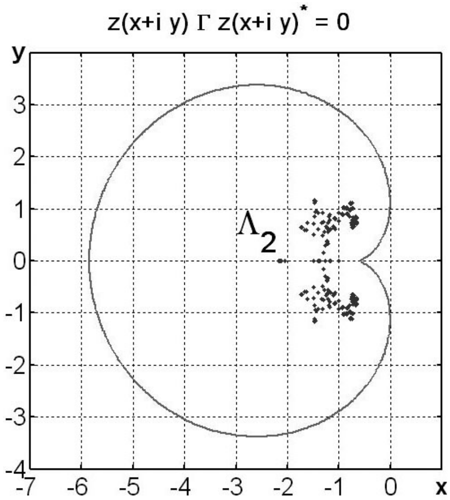

Рис. 2. Область устойчивости Λ_2.

В [6] проведен анализ робастной устойчивости данной системы с интервальной неопределенностью параметров $\underline{a} \le a = [c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2] \le \overline{a}$ и требованием размещения спектра внутри круга радиуса 12 с центром в точке $(-12, 0)$.

Определим в левой полуплоскости область

$$\Lambda_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : z(\lambda)\,\Gamma z^*(\lambda) > 0\right\}, \tag{4.8}$$

где

$$z(\lambda) = \left[1, \lambda, \lambda^2\right], \quad \Gamma = -\begin{bmatrix} \frac{9}{16}\alpha^4 & \frac{7}{4}\alpha^3 & \frac{9}{4}\alpha^2 \\ \frac{7}{4}\alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ \frac{9}{4}\alpha^2 & 3\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Границей данной области является кривая 4-го порядка, называемая улиткой Паскаля (см. рис. 2), уравнение которой имеет вид

$$\left[(x+h)^2 + y^2 + 2\alpha(x+h)\right]^2 - \beta^2\left[(x+h)^2 + y^2\right] = 0,$$

где $\beta = 2\alpha$, $h = \alpha/2$. Положим

$$\alpha = 1,3, \quad \underline{a} = [5, 6, 6, 9, 2, 4], \quad \overline{a} = [6, 7, 7, 10, 4, 7], \quad c_{12} = 1.$$

Тогда интервальный матричный полином (4.6), соответствующий разомкнутой системе, имеет вид $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$, где

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \le A_0 = \begin{bmatrix} c_1+1 & -1 \\ -1 & c_2+1 \end{bmatrix} \le \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \le A_1 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \le \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \le A_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \le \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Система (4.2) с неизвестными $X_{t_0t_1t_2}$, $t_0, t_1, t_2 \in \{1, \ldots, 4\}$, $\mathcal{B}$ и H состоит из 64 матричных неравенств. При $B_i = (\underline{A}_i + \overline{A}_i)/2$, $i = 0, 1, 2$, и $H = 0$ с помощью системы MATLAB установлено, что эта система имеет решение $X = X^* > 0$. Следовательно, система (4.7) робастно устойчива и все ее собственные значения находятся в области (4.8) при указанных интервальных неопределенностях. На рис. 2 показано расположение всех собственных значений 64 квадратичных пучков матриц $F_{t_0t_1t_2}(\lambda)$, $t_0, t_1, t_2 \in \{1, \ldots, 4\}$, в области Λ_2.

В заключение отметим, что изложенная методика локализации собственных значений матричных полиномов может быть распространена на некоторые классы матричных функций вида

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{s} f_i(\lambda) A_i , \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0 ,$$

где A_i — постоянные $n \times n$-матрицы, $f_i(\lambda)$ — скалярные функции, аналитические в окрестности точек спектра $\sigma(F)$. При этом области локализации собственных значений в комплексной плоскости можно описывать в виде

$$\Lambda = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : i_+ \left(V(\lambda, \bar{\lambda})\right) \geq 1\right\}, \quad V(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{i,j=0}^{s} f_i(\lambda) \overline{f_j(\lambda)} \, \Gamma_{ij} ,$$

где Γ_{ij} — блоки эрмитовой матрицы Γ. Такое обобщение, в частности, дает возможность получить алгебраические условия абсолютной устойчивости линейных дифференциальных систем с запаздыванием, описываемых с помощью матричных квазиполиномов.

1. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – xiv + 409 p.
2. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 259 с.
3. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **28**. – 216 с.
4. *Mazko A. G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems // Stability, Oscillations and Optimization of Systems / Eds A. A. Martynyuk, P. Borne, and C. Cruz-Hernandez. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2008. – Vol. 2. – xx + 270 p.
5. *Henrion D., Bachelier O., Sebek M.* $\mathcal{D}$-stability of polynomial matrices // Int. J. Control. – 2001. – **74**, № 8. – P. 355 – 361.
6. *Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D.* Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions // Automatica. – 2003. – **39**, № 8. – P. 1479 – 1485.
7. *Кублановская В. Н.* К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1978. – **80**. – С. 83 – 97.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
9. *Ackermann J.* Robust control. Systems with uncertain physical parameters. – London: Springer, 1993. – xvi + 406 p.

Получено 29.10.09