УДК 517.988.63

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Let E be a finite-dimensional Banach space, $C^0(\mathbb{R}, E)$ be the Banach space of continuous functions bounded on $\mathbb{R}$ with values in E, $K : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ be a c-continuous bounded mapping, let $A : E \to E$ be a linear continuous mapping, and let $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$. We obtain conditions for the existence of bounded solutions of the nonlinear equation $\dfrac{dx(t)}{dt} + (Kx)(t)Ax(t) = h(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть E — конечномерное банахово пространство, $C^0(\mathbb{R}, E)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в E, $K : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ — c-непрерывное и ограниченное отображение, $A : E \to E$ — линейное непрерывное отображение и $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$. Получены условия существования ограниченных решений нелинейного уравнения $\dfrac{dx(t)}{dt} + (Kx)(t)Ax(t) = h(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Основні функціональні простори і c-неперервні оператори. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел, E — дійсний або комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_E$, і $L(E, E)$ — банахова алгебра всіх лінійних неперервних операторів $A : E \to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_E.$$

Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, E)$ банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

Зауважимо, що $\|a\|_E = |a|$, якщо $E = \mathbb{R}$ або $E = \mathbb{C}$. Через $C^1(\mathbb{R}, E)$ позначимо банахів простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, похідна кожної з яких є елементом простору $C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} = \max\left\{ \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \right\}.$$

Говоритимемо, що послідовність $(x_n)_{n \geq 1}$ елементів простору $C^0(\mathbb{R}, E)$ *локально збігається* до елемента $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, і позначатимемо

$$x_n \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R},E)} x \text{ при } n \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного числа $p > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{|t| \leq p} \|x_n(t) - x(t)\|_E = 0.$$

Оператор $B : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, X)$ (X збігається з E або $\mathbb{R}$) називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і $x_n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $n \geq 1$, для яких

$$x_n \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R},E)} x \text{ при } n \to \infty$$

виконується співвідношення

$$Bx_n \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R},X)} Bx \text{ при } n \to \infty.$$

Кожному натуральному числу n співставимо лінійний неперервний оператор P_n, що діє в просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ і визначається рівністю

$$(P_n x)(t) = \begin{cases} x(-n), & \text{якщо } t \le -n, \\ x(t), & \text{якщо } t \in (-n, n), \\ x(n), & \text{якщо } t \ge n. \end{cases} \tag{1}$$

c-Неперервний оператор $B : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ називається *c-цілком неперервним*, якщо для кожного $n \ge 1$ оператор $P_n B : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ є цілком неперервним.

Поняття c-неперервного і c-цілком неперервного операторів увів до розгляду (на мові „ε, δ”) Е. Мухамадієв [1]; їх вивчення було продовжено у роботах [2 – 9] та ін. Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, запропонував автор (див., наприклад, [10 – 12]).

2. Об’єкт досліджень і формулювання основного результату. Позначимо через $\mathcal{K}$ множину обмежених c-неперервних операторів K, що діють із простору $C^0(\mathbb{R}, E)$ у простір $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, для кожного з яких

$$\inf_{t \in \mathbb{R},\ x \in C^0(\mathbb{R}, E)} |(Kx)(t)| > 0.$$

Обмеженість кожного елемента $k \in \mathcal{K}$ означає, що для будь-якої обмеженої множини $G \subset C^0(\mathbb{R}, E)$ множина KG також є обмеженою.

Розглянемо нелінійне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + (Kx)(t)Ax(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $K \in \mathcal{K}$, $A \in L(E, E)$ і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Очевидно, що окремими випадками (2) є наступні рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} + k_1(t, x(t))Ax(t) = h(t), \tag{3}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + k_2\left(t, \max_{\tau \in [\alpha_1, \beta_1]} \|x(t+\tau)\|_E, \min_{\tau \in [\alpha_2, \beta_2]} \|x(t+\tau)\|_E\right) Ax(t) = h(t), \tag{4}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + k_3(t, x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_m))Ax(t) = h(t), \tag{5}$$

де $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$ — довільні відрізки, а $k_1(t, x)$, $k_2(t, y_1, y_2)$ і $k_3(t, x_1, \ldots, x_n)$ — неперервні відповідно на $\mathbb{R} \times E$, $\mathbb{R} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ і $\mathbb{R} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{m \text{ разів}}$ функції, для яких

$$\sup\{|k_1(t, x)| : t \in \mathbb{R}, \|x\|_E < a\} < +\infty,$$

$$\sup\{|k_2(t, y_1, y_2)| : t \in \mathbb{R}, |y_1| < a, |y_2| < a\} < +\infty,$$

$$\sup\{|k_3(t, x)| : t \in \mathbb{R}, \|x_1\|_E < a, \ldots, \|x_m\|_E < a\} < +\infty$$

для кожного додатного числа a і

$$\inf\{|k_1(t,x)| : (t,x) \in \mathbb{R} \times E\} > 0,$$

$$\inf\{|k_2(t,y_1,y_2)| : (t,y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \times [0,+\infty)\} > 0,$$

$$\inf\{|k_3(t,x)| : t \in \mathbb{R}, x_1 \in E, \ldots, x_m \in E\} > 0.$$

Наведені приклади свідчать про те, що рівняння (2) може бути рівнянням із відхиляючим аргументом.

Основною задачею в статті є з'ясування умов, при виконанні яких рівняння (2) для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Суттєвим при розв'язанні цієї задачі є використання c-неперервних операторів і теореми про нерухому точку для таких операторів.

Зауважимо, що внаслідок неліпшицевості оператора K відомі методи дослідження обмежених розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [13 – 20]) не застосовні до рівняння (2) і, зокрема, до рівнянь (3) – (5).

Розглянемо лінійний диференціальний оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де A — лінійний неперервний оператор, такий, як і у (2).

Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\dim E < +\infty$. *Для того щоб рівняння* (2) *при довільних* $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ *і* $K \in \mathcal{K}$ *мало хоча б один розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, *необхідно і достатньо, щоб оператор* $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *мав обернений неперервний оператор*.

Це твердження встановимо, використавши ряд допоміжних результатів.

3. Зображення обмежених розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + \omega(t)Ax(t) = h(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Наведемо зображення обмеженого розв'язку цього рівняння, яке використовуватимемо при дослідженні рівняння (2).

Нагадаємо, що у випадку, коли оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ має обернений неперервний оператор, існує визначена на $\mathbb{R}$ функція $G(t)$ зі значеннями в $L(E, E)$ (див., наприклад, [15] у випадку дійсного E і [21] у випадку комплексного E), для якої:

1) різниця $G(+0) - G(-0)$ є одиничним елементом I алгебри $L(E, E)$;

2) при $t \neq 0$ справджується тотожність $\dfrac{dG(t)}{dt} + AG(t) \equiv O$;

3) існують такі числа $M \geq 1$ і $\gamma > 0$, що $\|G(t)\|_{L(E,E)} \leq M \exp\{-\gamma|t|\}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Функція $G(t)$ називається функцією Гріна [15, 21] оператора $\mathcal{L}$, що визначається співвідношенням (6). За допомогою цієї функції для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ єдиний обмежений розв'язок рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

має вигляд

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Важливою для подальшого є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $\omega \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} |\omega(t)| > 0$, $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ *і оператор* $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *має обернений неперервний оператор. Тоді функція*

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} \omega(s)ds\right) h(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

є обмеженим розв'язком рівняння (7),

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \frac{2M}{\gamma \inf\{|\omega(t)| : t \in \mathbb{R}\}}\ \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \tag{11}$$

і

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} \leq \left(\frac{2M\|\omega\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|A\|_{L(E,E)}}{\gamma \inf\{|\omega(t)| : t \in \mathbb{R}\}} + 1\right) \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}. \tag{12}$$

Зауважимо, що в цій теоремі простір E може бути нескінченновимірним.

Доведення. Розглянемо функцію $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначається рівністю

$$\tau(t) = \int\limits_{0}^{t} \omega(s)ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Завдяки умовам теореми ця функція строго монотонна, неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ і множина її значень збігається з $\mathbb{R}$. Тому для неї існує обернена функція $\tau^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що також є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$. За допомогою цієї функції диференціальне рівняння (7) можна подати у вигляді

$$\frac{dx(t)}{d\tau(t)} + Ax(t) = \frac{1}{\omega(t)}h(t),$$

або

$$\frac{dz(\tau(t))}{d\tau(t)} + Az(\tau(t)) = \frac{1}{\omega(\tau^{-1}(\tau(t)))}h(\tau^{-1}(\tau(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де

$$z(\tau(t)) = x(\tau^{-1}(\tau(t))), \tag{14}$$

якщо урахувати, що $\tau^{-1}(\tau(t)) \equiv t$.

Рівняння (13) по відношенню до $z(\tau)$ є рівнянням вигляду (8), і права частина цього рівняння неперервна й обмежена на $\mathbb{R}$ (завдяки умовам теореми). Тому на підставі (9) єдиний обмежений розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$z(\tau(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tau(t)-s)\frac{1}{\omega(\tau^{-1}(s))}h(\tau^{-1}(s))ds.$$

Перейшовши в цій рівності до нової змінної інтегрування $\nu = \tau^{-1}(s)$ і врахувавши (14) та рівність

$$\tau(t) - \tau(\nu) = \int\limits_{\nu}^{t} \omega(s)ds,$$

отримаємо (10).

Тепер покажемо справедливість співвідношень (11) і (12).

З обмежень на функцію $\omega(t)$ випливає, що для деяких дійсних чисел a і b, знаки яких збігаються, виконується нерівність

$$a \le \omega(t) \le b, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді завдяки третій властивості функції $G(t)$ для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$ справджуються співвідношення

$$\left\| G\left(\int\limits_{\tau}^{t} \omega(s)ds \right) \right\|_{L(E,E)} \le M \exp\left\{ -\gamma \left| \int\limits_{\tau}^{t} \omega(s)ds \right| \right\} \le M \exp\left\{ -\gamma c \left| t - \tau \right| \right\},$$

де $c = \min\{|a|, |b|\}$. Звідси та з (10) випливає (11). Із (11) та (7) випливає (12).

Теорему 2 доведено.

4. Оператор $\mathfrak{A}_{K,h}$. Визначимо оператор $\mathfrak{A}_{K,h} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ рівністю

$$(\mathfrak{A}_{K,h}x)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Kx)(s)ds \right) h(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тут елементи $K \in \mathcal{K}$ і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ ті самі, що й у рівнянні (2).

Очевидно, що якщо функція $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$ є розв'язком рівняння (2), то завдяки теоремі 2

$$y(t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky)(s)ds \right) h(\tau)d\tau,$$

тобто елемент $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$ є нерухомою точкою оператора $\mathfrak{A}_{K,h}$ і навпаки.

Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Множини обмежених розв'язків рівнянь* (2) *і*

$$y = \mathfrak{A}_{K,h}y \tag{15}$$

збігаються.

Завдяки цьому твердженню природним для подальшого є приділення уваги вивченню властивостей оператора $\mathfrak{A}_{K,h}$.

Розглянемо у просторах $C^0(\mathbb{R}, E)$ і $C^1(\mathbb{R}, E)$ замкнені кулі

$$B^0[a_0, r] = \{x \in C^0(\mathbb{R}, E) : \|x - a\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le r\}$$

і

$$B^1[a_1, r] = \{x \in C^1(\mathbb{R}, E) : \|x - a\|_{C^1(\mathbb{R},E)} \le r\},$$

де $a_k \in C^k(\mathbb{R}, E)$, $k = \overline{0,1}$, і $r > 0$.

Найбільш важливі властивості оператора $\mathfrak{A}_{K,h}$, що використовуватимемо, наведемо у наступному твердженні.

Теорема 4. *Нехай* $K \in \mathcal{K}$ *і* $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$. *Тоді*:

1) *існує таке число* $R > 0$, *що* $\mathfrak{A}_{K,h} C^0(\mathbb{R}, E) \subset B^0[0, R]$;

2) $\mathfrak{A}_{K,h} x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ *для всіх* $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ *й існує таке число* $r > 0$, *що* $\mathfrak{A}_h B^0[0, R] \subset B^1[0, r]$ (*тут* R *– те саме число, що й у попередньому твердженні*);

3) *оператор* $\mathfrak{A}_{K,h} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *є c-неперервним.*

Доведення. Перша частина твердження теореми випливає з теореми 2, зокрема, з нерівності (11), в якій вираз $\inf\{|\omega(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ потрібно замінити числом

$$\mu = \inf_{t \in \mathbb{R},\ x \in C^0(\mathbb{R}, E)} |(Kx)(t)|. \tag{16}$$

Тоді

$$R = \frac{2M}{\gamma\mu}\ \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}. \tag{17}$$

Друга частина твердження теореми також випливає з теореми 2. У нерівності (12) вирази $\inf\{|\omega(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $\|\omega\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}$ потрібно замінити відповідно числами μ і $\Omega = \sup\limits_{t \in \mathbb{R},\ x \in C^0(\mathbb{R}, E)} |(Kx)(t)|$ (число Ω є скінченним, оскільки оператор K обмежений). Тоді

$$r = \left(\frac{2M\Omega\|A\|_{L(E,E)}}{\gamma\mu} + 1 \right) \|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)}.$$

Складніше обгрунтовується третя частина твердження теореми.

Зафіксуємо довільні відрізок $[a, b]$ і число $\varepsilon > 0$. Розглянемо довільні елементи $y_n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $n \geq 0$, для яких

$$y_n \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R}, E)} y_0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{18}$$

Покажемо, що

$$\mathfrak{A}_{K,h} y_n \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R}, E)} \mathfrak{A}_{K,h} y_0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{19}$$

Зазначимо, що завдяки першій частині твердження теореми послідовність $(\mathfrak{A}_{K,h} y_n)_{n \geq 0}$ є обмеженою, що необхідно для виконання співвідношення (19).

Виберемо таке число $c > 0$, щоб

$$\sup_{t \in [a,b],\ n \geq 0} \left\| \int\limits_{\mathbb{R} \setminus [-c,c]} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s) ds \right) h(\tau) d\tau \right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Вибір такого числа можливий, оскільки $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{n \geq 0} \left\| G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s) ds \right) \right\|_{L(E,E)} \leq M \exp\{-\gamma\mu|t - \tau|\},$$

де μ — додатне число, що визначається рівністю (16).

Із (18) і c-неперервності оператора $K : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b],\ \tau\in[-c,c]} \left| \int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s)ds - \int\limits_{\tau}^{t} (Ky_0)(s)ds \right| = 0.$$

Тому на підставі неперервності функції $G(t)$ на кожній множині $\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$ $(\delta > 0)$ й обмеженості на $\mathbb{R}$ (див. властивості цієї функції)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \left\| \int\limits_{-c}^{c} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s)ds \right) h(\tau)d\tau - \int\limits_{-c}^{c} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_0)(s)ds \right) h(\tau)d\tau \right\|_E = 0.$$

Оскільки для кожного $t \in [a, b]$

$$\|(\mathfrak{A}_{K,h}y_n)(t) - (\mathfrak{A}_{K,h}y_0)(t)\|_E \le$$

$$\le \left\| \int\limits_{-c}^{c} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s)ds \right) h(\tau)d\tau - \int\limits_{-c}^{c} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_0)(s)ds \right) h(\tau)d\tau \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-c,c]} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_n)(s)ds \right) h(\tau)d\tau - \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-c,c]} G\left(\int\limits_{\tau}^{t} (Ky_0)(s)ds \right) h(\tau)d\tau \right\|_E,$$

то на підставі (20)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \|(\mathfrak{A}_{K,h}y_n)(t) - (\mathfrak{A}_{K,h}y_0)(t)\|_E < \varepsilon.$$

Звідси з урахуванням довільності вибору $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \|(\mathfrak{A}_{K,h}y_n)(t) - (\mathfrak{A}_{K,h}y_0)(t)\|_E = 0.$$

Це співвідношення завдяки довільності вибору відрізка $[a, b]$ рівносильне (19).

Отже, c-неперервність оператора $\mathfrak{A}_{K,h}$ обґрунтовано.

Теорему 4 доведено.

***Наслідок* 1**. *Якщо* $\dim E < +\infty$, *то оператор* $\mathfrak{A}_{K,h} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *є c-цілком неперервним*.

Це твердження випливає з теореми Арцела [22] і другої та третьої частин твердження теореми 4.

5. Існування нерухомої точки оператора $\mathfrak{A}_{K,h}$. Спочатку наведемо одну теорему про нерухому точку.

Теорема 5. *c-Цілком неперервний оператор* $\mathfrak{N} : B^0[a, R] \to B^0[a, R]$ *має хоча б одну нерухому точку*.

Зауважимо, що в цьому твердженні простір E може бути нескінченновимірним.

Доведення. Використаємо оператори $\mathfrak{N}_n : B^0[a, R] \to B^0[a, R]$, $n \ge 1$, що визначаються рівностями

$$\mathfrak{N}_n x = P_n(\mathfrak{N}x - a) + a, \quad n \ge 1.$$

Ці оператори цілком неперервні. Тому за теоремою Шаудера про нерухому точку [22] для кожного $n \geq 1$ існує точка $x_n \in B^0[a, R]$, для якої

$$\mathfrak{N}_n x_n = x_n.$$

З означення оператора P_n та того, що оператор $\mathfrak{N}$ є c-цілком неперервним, випливає існування елемента $x^* \in B^0[a, R]$ і строго зростаючої підпослідовності $(n_k)_{k \geq 1}$ послідовності натуральних чисел, для яких

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R}, E)} x^* \quad \text{при } k \to \infty. \tag{21}$$

Оскільки оператор $\mathfrak{N}$ є c-неперервним, то

$$\mathfrak{N} x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc. } C^0(\mathbb{R}, E)} \mathfrak{N} x^* \quad \text{при } k \to \infty. \tag{22}$$

З очевидних рівностей

$$x^* - \mathfrak{N} x^* = (x^* - x_{n_k}) + (x_{n_k} - \mathfrak{N}_{n_k} x_{n_k}) + (\mathfrak{N}_{n_k} x_{n_k} - \mathfrak{N} x_{n_k}) + (\mathfrak{N} x_{n_k} - \mathfrak{N} x^*), \ k \geq 1,$$

із співвідношень (21), (22) і того, що

$$x_{n_k} - \mathfrak{N}_{n_k} x_{n_k} = 0, \ k \geq 1,$$

і

$$(\mathfrak{N}_{n_k} x_{n_k})(t) - (\mathfrak{N} x_{n_k})(t) = 0, \ \text{якщо } |t| \leq n_k, \ k \geq 1,$$

випливає рівність

$$x^* - \mathfrak{N} x^* = 0.$$

Теорему 5 доведено.

Зазначимо, що різні аналогічні варіанти цього твердження розглядалися автором у роботах [11, 24 – 26] при дослідженні обмежених розв'язків диференціально-функціональних, дискретних рівнянь та диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями.

З теорем 4 і 5 та наслідку 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $\dim E < +\infty$. *Оператор* $\mathfrak{A}_{K,h} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *для кожних* $K \in \mathcal{K}$ *і* $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ *має хоча б одну нерухому точку* $x^* \in B^0[0, R] \cap \cap C^1(\mathbb{R}, E)$, *де* R – *число, що визначається рівністю* (17).

6. Доведення теореми 1. *Достатність.* Нехай $K \in \mathcal{K}$, $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ має обернений неперервний оператор. Тоді за наслідком 2 і теоремою 3 рівняння (2) має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Необхідність. Якщо рівняння (2) для кожних $K \in \mathcal{K}$ і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$, то воно має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і у випадку, коли $(Kx)(t) = 1$ для всіх $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і $t \in \mathbb{R}$. Тоді оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається співвідношенням (6), є слабкорегулярним. Для лінійних майже періодичних і, зокрема, для автономних операторів (таким є оператор $\mathcal{L}$) слабка регулярність оператора $\mathcal{L}$ збігається з регулярністю цього оператора [15].

Теорему 1 доведено.

7. Приклади неєдиності обмежених розв'язків рівнянь вигляду (2).

***Приклад* 1**. Розглянемо випадок, коли $E = \mathbb{R}$,

$$(Kx)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

де

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x < 1, \\ 1/x, & \text{якщо } x \in [1, 2], \\ 1/2, & \text{якщо } x > 2, \end{cases}$$

і

$$Ax \overset{\mathrm{df}}{=} x.$$

Очевидно, що оператор $K : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ є c-неперервним,

$$\inf_{t\in\mathbb{R}, x\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} |(Kx)(t)| = \frac{1}{2} > 0$$

і оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t),\ t \in \mathbb{R},$$

має обернений неперервний оператор.

Отже, за теоремою 1 для диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t))x(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ множина обмежених розв'язків є непорожньою. Цих розв'язків може бути нескінченно багато. Справді, якщо $h(t) \equiv 1$, то для кожного числа $s \in [1, 2]$ функція $x(t) \equiv s$ є розв'язком рівняння (23).

***Приклад* 2**. Розглянемо випадок, коли $E = \mathbb{R}$,

$$(Kx)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} 2 + \sin x^2(t-1),\ t \in \mathbb{R},$$

і

$$Ax \overset{\mathrm{df}}{=} -x.$$

Оператор $K : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, очевидно, c-неперервний,

$$\inf_{t\in\mathbb{R}, x\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} |(Kx)(t)| = 1 \neq 0$$

і оператор $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t),\ t \in \mathbb{R},$$

має обернений неперервний оператор. За теоремою 1 для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} - (2 + \sin x^2(t-1))x(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Таких розв'язків для деяких $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ може бути більше ніж один. Справді, якщо $h(t) \equiv c$ (c — дійсна стала), то рівняння (24) має сталі розв'язки, що збігаються з розв'язками трансцендентного рівняння

$$-(2 + \sin x^2)x = c.$$

Цих розв'язків більше ніж один, якщо модуль $|c|$ є досить великим.

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Там же. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
3. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
4. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
7. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
8. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 255 с.
10. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – Душанбе, 1987. – С. 102 – 103.
11. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15. – С. 32 – 35.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.
13. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali, non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
15. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
16. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
17. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
18. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
19. *Перов А. И., Коструб И. Д.* Метод направляющих функций в задаче о нелинейных почти-периодических колебаниях // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физика, математика. – 2002. – № 1. – С. 163 – 171.
20. *Перов А. И.* Об ограниченных решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. – 2003. – № 1. – С. 165 – 168.
21. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
22. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 233 с.
23. *Слюсарчук В. Е.* Нелокальные теоремы об ограниченных решениях функционально-дифференциальных уравнений с нелипшицевыми нелинейностями // Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 121 – 130.
24. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 4. – С. 588 – 596.
25. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660 – 662.
26. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-неперервних операторів у просторах обмежених числових послідовностей // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 107 – 110.

Одержано 25.07.08,
після доопрацювання — 11.01.10