УДК 519.21

Б. В. Бондарев, С. М. Козырь (Донец. нац. ун-т)

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ „ПО ИБРАГИМОВУ”. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СБЛИЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С СЕМЕЙСТВОМ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. I

We prove that a bounded 1-periodic function of a solution of time-homogeneous diffusion equation with 1-periodic coefficients forms a process that satisfies the uniform strong intermixing condition. We establish an estimate for the rate of approach with respect to the probability in $C[0,T]$ metric of some normed integral functional of a solution of ordinary time-homogeneous stochastic differential equation with 1-periodic coefficients to a family of the Wiener processes. As an example, we consider an ordinary differential equation disturbed by a rapidly oscillating centered process, which is a 1-periodic function of a solution of time-homogeneous stochastic differential equation with 1-periodic coefficients. An estimate for the rate of approach of a solution of this equation to a solution of the corresponding Itô stochastic equation is established.

Доведено, що обмежена 1-періодична функція від розв’язку однорідного за часом дифузійного рівняння з 1-періодичними коефіцієнтами утворює процес, що задовольняє умову рівномірного сильного перемішування. Встановлено оцінку швидкості зближення за ймовірністю в метриці простору $C[0,T]$ деякого нормованого інтегрального функціонала від розв’язку звичайного однорідного за часом стохастичного диференціального рівняння з 1-періодичними коефіцієнтами з сім’єю вінерових процесів. Як приклад, розглянуто звичайне диференціальне рівняння, збурене швидкоосцилюючим центрованим процесом, який є 1-періодичною функцією від розв’язку однорідного за часом стохастичного диференціального рівняння з 1-періодичними коефіцієнтами. Встановлено оцінку швидкості зближення розв’язку такого рівняння з розв’язком відповідного стохастичного рівняння Іто.

1. Введение. Известно (см., например, [1 – 14]), что при некоторых условиях центрированный случайный процесс

$$W_t^{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} \xi(s)\,ds, \quad t \in [0, T],$$

сближается (в том или ином смысле) при $\varepsilon \to 0$ с некоторым семейством винеровских процессов $\sigma W_{\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$, где

$$\sigma = \left\{2\int_0^{\infty} \mathrm{M}\,\xi(t)\,\xi(0)\,dt\right\}^{1/2}.$$

В работах [1, 5 – 8, 14] приведены достаточные условия для того, чтобы случайный процесс W_t^{ε} слабо сходился при $\varepsilon \to 0$ к винеровскому процессу $\sigma W(t)$, $t \in [0, T]$. В работах [2 – 4, 9 – 11] установлены достаточные условия для того, чтобы семейство случайных процессов W_t^{ε} при достаточно малых $\varepsilon > 0$ было „близко” по вероятности в метрике пространства $C[0, T]$ к винеровскому семейству $\sigma W_{\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$, а именно установлены неравенства вида $\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} |\, W_t^{\varepsilon} - \sigma W_{\varepsilon}(t)| > \delta_{\varepsilon}\right\} < \gamma_{\varepsilon}$, где функции $\delta_{\varepsilon} \to 0$, $\gamma_{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

записаны в явном виде. В работах [12, 13] приведены достаточные условия для того, чтобы семейство случайных процессов W_t^ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$ было „близко" к винеровскому семейству $\sigma W_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, в смысле $\sup\limits_{0 \le t \le T} \mathrm{M}\left| W_t^\varepsilon - \sigma W_\varepsilon(t) \right|^2 \le \gamma_\varepsilon$, где функция $\gamma_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ записана в явном виде. В работах [2 – 4, 9 – 13] на процесс $\xi(t)$, $t \ge 0$, либо накладывалось условие равномерного сильного перемешивания (которое называют также φ-перемешиванием [7, с. 165] или перемешиванием „по Ибрагимову" [15, с. 11]), либо использовался процесс $\xi(t)$, $t \ge 0$, конкретного вида [1]. В настоящей работе в качестве процесса $\xi(t)$, $t \ge 0$, рассматривается решение однородного по времени стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, а именно, решение уравнения

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \alpha(\xi(s))\, ds + \int_0^t \beta(\xi(s))\, dW(s), \tag{1}$$

где $W(s)$ — стандартный винеровский процесс, $\xi(0)$ — в общем случае случайное (не зависящее от $W(s)$) начальное условие, причем в силу того, что будет изучаться процесс $f(\xi(t))$, где $f(x)$ — 1-периодическая функция, для дальнейших выкладок без нарушения общности достаточно рассматривать случай $\xi(0) \in [0, 1)$.

В дальнейшем будем считать, что всегда выполняются следующие условия:

1) 1-периодические коэффициенты $\alpha(x)$, $\beta(x)$ имеют производные первого порядка $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$, удовлетворяющие условию Гельдера;

2) функции $\alpha(x)$, $\beta(x), \alpha'(x)$, $\beta'(x)$, таковы, что

$$\alpha(x) = \alpha(x+1), \qquad \beta(x) = \beta(x+1), \qquad |\alpha(x)| \le K < +\infty,$$

$$0 < \lambda \le \beta^2(x) \le K < +\infty,$$

$$|\alpha'(x)| + |\beta'(x)| \le K < +\infty.$$

В качестве W_t^ε будут исследованы процессы

$$W_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \left[f(\xi(s)) - \mathrm{M} f(\xi(s)) \right] ds, \qquad W_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \left[f(\xi(s)) - \bar{f} \right] ds.$$

Здесь и далее $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая ограниченная $(|f(x)| \le K < +\infty)$ 1-периодическая функция, $\bar{f}$ — ее среднее, вычисленное по некоторому инвариантному распределению (см. ниже формулу (12)), $f(\xi(t))$ — стационарный марковский процесс. Для оценки скорости сближения W_t^ε с соответствующим образом построенным семейством винеровских процессов $\sigma W_\varepsilon(t)$ используется метод одного вероятностного пространства А. В. Скорохода, а мера уклонения в пространстве траекторий — метрика пространства $C[0, T]$. При построении соответствующих оценок используется мартингальная аппроксимация Д. О. Чикина [6]. Построенное мартингальное приближение позволило использовать при доказательстве основного результата известные оценки для уклонения за уровень стохастических интегралов в метрике $C[0, T]$.

2. Оценка скорости сближения нормированных интегралов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами с семейством непрерывных мартингалов. Пусть $\rho(x)$ — решение периодической задачи

$$L^*\rho = \frac{1}{2}\frac{d^2\big(\rho(x)\beta^2(x)\big)}{dx^2} - \frac{d(\rho(x)\alpha(x))}{dx} = 0, \qquad \rho(x) = \rho(x+1), \tag{2}$$

однозначно определенное условием нормировки

$$\int_0^1 \rho(x)\,dx = 1. \tag{3}$$

Найдем решение задачи (2). Пусть (см. [14]) функция

$$\vartheta(x) = \exp\left\{-\int_0^x \frac{2\alpha(y)}{\beta^2(y)}\,dy\right\}.$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0, 1]$ для $\vartheta(x)$ справедливы оценки

$$0 < \exp\left\{-\frac{2K}{\lambda}\right\} = C^{-1} \le \vartheta(x) \le C = \exp\left\{\frac{2K}{\lambda}\right\} < +\infty. \tag{4}$$

Рассмотрим (см. [14]) функцию

$$G_0(x) = \frac{2}{(1+\vartheta(1))\beta^2(x)\vartheta(x)}\left[\vartheta(1)\int_0^x \vartheta(y)\,dy + \int_x^1 \vartheta(y)\,dy\right]. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что введенная функция $G_0(x)$ является 1-периодической. Действительно, в силу того, что $\vartheta(x+1) = \vartheta(x)\vartheta(1)$, имеем

$$G_0(x+1) = \frac{2}{(1+\vartheta(1))\vartheta(1)\beta^2(x)\vartheta(x)}\left[\vartheta(1)\int_0^{x+1} \vartheta(y)\,dy - \int_1^{x+1} \vartheta(y)\,dy\right] =$$

$$= \frac{2}{(1+\vartheta(1))\beta^2(x)\vartheta(x)}\left[\int_0^1 \vartheta(y)\,dy + (\vartheta(1)-1)\int_0^x \vartheta(y)\,dy\right] = G_0(x).$$

Нетрудно убедиться также в том, что функция $G_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\big(\beta^2(x)G_0(x)\big)' = G_0(x)\alpha(x) + \frac{1}{(1+\vartheta(1))}[\vartheta(1)-1].$$

В силу существования производных $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ и условия $0 < \lambda \le \beta^2(x)$ следует дифференцируемость выражений $\big(\beta^2(x)G_0(x)\big)'$ и $G_0(x)\alpha(x)$. Таким образом,

$$\rho(x) = G_0(x)\left[\int_0^1 G_0(y)\,dy\right]^{-1} \tag{6}$$

является классическим решением задачи (2) , удовлетворяющим (3).

Покажем, что не нарушая общности можно рассматривать лишь случай, когда решение (1) стартует из точки $\breve{x}$, $\breve{x} \in [0, 1)$. Действительно, пусть

$$x \in [k,\, k+1), \quad k \in Z, \quad Z = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\},$$

а

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t \alpha(\xi_x(s))\,ds + \int_0^t \beta(\xi_x(s))\,dW(s),$$

или

$$\xi_x(t) = \breve{x} + k + \int_0^t \alpha(\xi_x(s))\,ds + \int_0^t \beta(\xi_x(s))\,dW(s),$$

или

$$\xi_x(t) - k = \breve{x} + \int_0^t \alpha(\xi_x(s) - k + k)\,ds + \int_0^t \beta(\xi_x(s) - k + k)\,dW(s).$$

Из последнего в силу периодичности коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$ получаем

$$\eta(t) = \breve{x} + \int_0^t \alpha(\eta(s))\,ds + \int_0^t \beta(\eta(s))\,dW(s),$$

где $\eta(t) = \xi_{x+1}(t) - k$. В силу единственности решения последнего уравнения

$$\eta(t) = \xi_{\breve{x}}(t), \qquad \xi_x(t) = k + \xi_{\breve{x}}(t),$$

а в силу периодичности $f(x)$ имеем $f(\xi_x(t)) = f(\xi_{\breve{x}}(t))$.

Построим процесс $\breve{\xi}_{\breve{x}}(t)$, принимающий свои значения в полосе $\{(x, t): [0, 1) \times [0, +\infty)\}$, плотность вероятности перехода которого из точки $\breve{x} \in [0, 1)$ в точку $\breve{z} \in [0, 1)$ за время $t > 0$ подсчитывается по формуле [16, с. 372]

$$\breve{p}(\breve{x}, t, \breve{z}) = \sum_{k \in Z} p(\breve{x}, t, \breve{z} + k).$$

Здесь $p(\breve{x}, t, z)$ — плотность вероятности перехода из точки $\breve{x} \in [0, 1)$ в точку $z \in (-\infty, +\infty)$ за время $t > 0$ процесса $\xi_{\breve{x}}(t)$, стартующего в нулевой момент времени из точки $\breve{x} \in [0, 1)$. Отметим, что условия 1, 2 гарантируют существование плотности распределения $p(\breve{y}, t, z)$ [8, с. 30]. Процесс $\breve{\xi}_{\breve{x}}(t)$ имеет эргодическое распределение с плотностью $\rho(x)$. Таким образом, если в качестве начального условия в (1) взять $\xi(0)$ — не зависящую от $W(t)$ случайную величину, которая имеет плотность распределения $\rho(x)$, то построенный выше процесс $\breve{\xi}(t)$ с таким начальным условием будет стационарным марковским процессом, а значит процесс $f(\breve{\xi}(t))$, а с ним и процесс

$$\breve{\eta}(t) = f(\breve{\xi}(t)) - \bar{f} = f(\breve{\xi}(t)) - \mathrm{M} f(\breve{\xi}(t))$$

будут стационарными марковскими процессами, а процесс

$$\dot{\breve{W}}_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\breve{\xi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \bar{f}\right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(\breve{\xi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{M} f\left(\breve{\xi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right]$$

будет стационарным „физическим” белым шумом.

Нетрудно также заметить, что для 1-периодической функции $f(x)$ справедливо следующее [16, с. 372]:

$$\mathrm{M} f\big(\xi_{\breve{x}}(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, p(\breve{x}, t, y)\, dy = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} f(y)\, p(\breve{x}, t, y)\, dy =$$

$$= \int_{0}^{1} f(\breve{y}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(\breve{x}, t, \breve{y} + k)\, d\breve{y} = \int_{0}^{1} f(\breve{y})\, \breve{p}(\breve{x}, t, \breve{y})\, d\breve{y} = \mathrm{M} f\big(\breve{\xi}_{\breve{x}}(t)\big).$$

Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty,$ тогда

$$\varphi_{\xi}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mathrm{M} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} i z_k f(\xi(t_k))\right) =$$

$$= \int_{0}^{1} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} i z_k f(x_k)\right) \rho(\breve{x}_0) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\breve{x}_0, t_1, x_1) \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{n-1}, t_n - t_{n-1}, x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1\, d\breve{x}_0 =$$

$$= \int_{0}^{1} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} i z_k f(x_k)\right) \rho(\breve{x}_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} p(\breve{x}_0, t_1, x_1) \ldots$$

$$\ldots \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} p(x_{n-1}, t_n - t_{n-1}, x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1\, d\breve{x}_0 =$$

$$= \int_{0}^{1} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} i z_k f(\breve{x}_k)\right) \rho(\breve{x}_0) \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} p(\breve{x}_0, t_1, \breve{x}_1 + k_1) \ldots$$

$$\ldots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} p(x_{n-1}, t_n - t_{n-1}, \breve{x}_n + k_n)\, d\breve{x}_n\, d\breve{x}_{n-1} \ldots d\breve{x}_1\, d\breve{x}_0 =$$

$$= \int_{0}^{1} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} i z_k f(\breve{x}_k)\right) \rho(\breve{x}_0) \int_{0}^{1} \breve{p}(\breve{x}_0, t_1, \breve{x}_1) \ldots$$

$$\ldots \int_{0}^{1} \breve{p}(\breve{x}_{n-1}, t_n - t_{n-1}, \breve{x}_n)\, d\breve{x}_n\, dx_{n-1} \ldots d\breve{x}_1\, d\breve{x}_0 =$$

$$= \mathrm{M} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} i z_k f\big(\breve{\xi}(t_k)\big)\right) = \varphi_{\breve{\xi}}(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

т. е. характеристические функции конечномерных распределений совпадают, а значит, конечномерные распределения у процессов

$$\breve{\eta}(t) = f\big(\breve{\xi}(t)\big) - \overline{f} = f\big(\breve{\xi}(t)\big) - \mathrm{M} f\big(\breve{\xi}(t)\big)$$

и

$$\eta(t) = f(\xi(t)) - \overline{f} = f(\xi(t)) - \mathrm{M} f(\xi(t))$$

одни и те же. Отсюда следует, что процесс

$$\dot{W}_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f(\xi(t/\varepsilon)) - \bar{f}\right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[f(\xi(t/\varepsilon)) - \mathrm{M} f(\xi(t/\varepsilon))\right]$$

также будет стационарным „физическим” белым шумом.

Известно [16, с. 370, 373], что если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — 1-периодические коэффициенты уравнения (1) — имеют производные первого порядка $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$, удовлетворяющие условию Гельдера, и выполнено условие $0 < \lambda \leq \beta^2(x) \leq K < < +\infty$, то для любой ограниченной 1-периодической функции $f(x)$ справедлива оценка

$$\sup_x \left| \mathrm{M} f(\xi_x(t)) - \bar{f} \right| \leq c \sup_x |f(x)| \exp\{-\gamma t\}, \tag{7}$$

где постоянные $c > 0$, $\gamma > 0$ определяются через коэффициенты уравнения (1), $\xi_x(t)$ — решение уравнения

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t \alpha(\xi_x(s))\, ds + \int_0^t \beta(\xi_x(s))\, dW(s),$$

постоянная $\bar{f}$ подсчитывается по формуле

$$\bar{f} = \int_0^1 f(x)\rho(x)\, dx, \tag{8}$$

$\rho(x)$ определено в (6).

Пусть $\varsigma_y(t) = f(\xi_x(t))$, $t \geq 0$, — процесс с начальным условием $y = f(x)$, $I_A(y)$ — индикатор произвольного множества A из области значений $\varsigma_y(t)$. Тогда

$$I_A(\varsigma_y(t)) = I_A(f(\xi_x(t)) = g_A(\xi_x(t)),$$

где $g_A(x) = I_A(f(x))$ — также ограниченная 1-периодическая функция, для которой справедливо соотношение (7), которое в данном случае принимает вид

$$\sup_{y, A} \left| \mathrm{M}\, I_A(\varsigma_y(t)) - \int_0^1 I_A(f(x))\rho(x)\, dx \right| \leq c \exp\{-\gamma t\}.$$

Если $\pi(A)$ — мера, определенная соотношением

$$\pi(A) = \int_{\{x : f(x) \in A\}} \rho(x)\, dx,$$

то имеем

$$\sup_{y, A} |\mathrm{P}\{y, t, A\} - \pi(A)| = \sup_{y, A} \left| \mathrm{M} I_A(\varsigma_y(t)) - \int_0^1 I_A(f(x))\rho(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq c \exp\{-\gamma t\},$$

т. е. выполняется условие (19.1.7) из [17], достаточное для того, чтобы процесс $f(\xi(t))$ (начальное условие распределено с плотностью $\rho(x)$) удовлетворял условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания, не превышающим $2c\exp\{-\gamma t\}$. Таким образом, класс случайных процессов, который строится как суперпозиция 1-периодической функции от решения диффузионного уравнения с 1-периодическими коэффициентами, будет перемешиваться „по Ибрагимову”. Как показывают приведенные ниже примеры, это весьма широкий класс.

Рассмотрим функцию

$$U(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{M}\left[f\left(\xi_x(t)\right) - \bar{f}\,\right] dt, \tag{9}$$

где

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t \alpha(\xi_x(s))\, ds + \int_0^t \beta(\xi_x(s))\, dW(s), \tag{10}$$

а $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая ограниченная ($|f(x)| \leq K < < +\infty$) 1-периодическая функция (в силу условия (7) интеграл в (9) определен). Покажем, что $U(x)$ — 1-периодическая функция, которая является решением уравнения

$$\frac{\beta^2(x)}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x) + \alpha(x)\frac{dU}{dx}(x) = \left[f(x) - \bar{f}\,\right]. \tag{11}$$

Установим периодичность функции $U(x)$. Пусть $x \in [k, k+1)$, $k \in Z$, Z — множество целых чисел, а $\xi_x(t)$ — решение уравнения (10). Наряду с (10) рассмотрим уравнение

$$\xi_{x+1}(t) = x + 1 + \int_0^t \alpha(\xi_{x+1}(s))\, ds + \int_0^t \beta(\xi_{x+1}(s))\, dW(s).$$

Из последнего в силу периодичности коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$ имеем

$$\eta(t) = x + \int_0^t \alpha(\eta(s))\, ds + \int_0^t \beta(\eta(s))\, dW(s), \tag{12}$$

где $\eta(t) = \xi_{x+1}(t) - 1$. В силу единственности решения (10) из (12) следует

$$\eta(t) = \xi_x(t), \qquad \xi_{x+1}(t) = 1 + \xi_x(t),$$

а в силу периодичности $f(x)$ имеем $f(\xi_{x+1}(t)) = f(\xi_x(t))$, откуда в силу представления (9) следует периодичность $U(x)$. Далее, пусть

$$V(t, x) = -\mathrm{M}\left[f\left(\xi_x(t)\right) - \bar{f}\,\right],$$

тогда (см. [18]) функция $V(t, x)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{\beta^2(x)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) + \alpha(x)\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x), \\ V(0, x) = -\left[f(x) - \bar{f}\,\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Интегрируя обе части (13) по t в пределах от 0 до T и переходя к пределу при $T \to +\infty$, с учетом оценки (7) имеем

$$\frac{\beta^2(x)}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) + \alpha(x)\frac{\partial U}{\partial x}(x) = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{\partial V}{\partial t}(t, x)\,dt =$$

$$= -\lim_{T\to+\infty} V(T, x) + \left[f(x) - \bar{f}\right] = -\lim_{T\to+\infty}\left[\mathrm{M} f(\xi_x(T)) - \bar{f}\right] +$$

$$+ \left[f(x) - \bar{f}\right] = \left[f(x) - \bar{f}\right],$$

т. е. (11) имеет место.

Из (9) вследствие (7) следует ограниченность $U(x)$. Действительно,

$$|U(x)| \le \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{M}\left[f(\xi_x(t)) - \bar{f}\right]\right| dt \le Kc\int_0^{+\infty} \exp\{-\gamma t\}\,dt = \frac{Kc}{\gamma}. \qquad (14)$$

Обозначим $\psi(x) = \dfrac{dU}{dx}$, тогда из (11) следует, что $\psi(x)$ является решением задачи

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{2\alpha(x)}{\beta^2(x)}\psi(x) = \frac{2\left[f(x) - \bar{f}\right]}{\beta^2(x)}, \quad \psi(x+1) = \psi(x). \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться в том, что решением задачи (15) будет функция

$$\psi(x) = -\vartheta^{-1}(x)\left[\int_x^1 \vartheta(y)\frac{2\left[f(y) - \bar{f}\right]}{\beta^2(y)}\,dy\right]. \qquad (16)$$

В силу периодичности $\psi(x)$ и (4) имеем оценку

$$|\psi(x)| \le \frac{4C^2}{\lambda}K = D_\psi. \qquad (17)$$

Пусть $U(x)$ — решение задачи (11). Тогда, применяя формулу Ито к процессу $U(\xi_x(t))$, получаем

$$dU(\xi_x(t)) = LU(\xi_x(t))\,dt + \beta(\xi_x(t))\,\psi(\xi_x(t))\,dW(t).$$

Отсюда в силу (11) следует

$$dU(\xi_x(t)) = \left[f(\xi_x(t)) - \bar{f}\right]dt + \beta(\xi_x(t))\,\psi(\xi_x(t))\,dW(t).$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от 0 до t/ε, имеем

$$\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi_x(s)) - \bar{f}\right]ds = -\sqrt{\varepsilon}\left[U(\xi_x(t/\varepsilon)) - U(x)\right] -$$

$$- \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\beta(\xi_x(s))\,\psi(\xi_x(s))\,dW(s). \qquad (18)$$

Из (18) следует равенство

$$\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi_x(s)) - \mathrm{M} f(\xi_x(s))\right]ds = -\sqrt{\varepsilon}\left[U(\xi_x(t/\varepsilon)) - U(x)\right] -$$

$$- \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\beta(\xi_x(s))\,\psi(\xi_x(s))\,dW(s) - \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[\mathrm{M} f(\xi_x(s)) - \bar{f}\right]ds.$$

Нетрудно заметить, что представление (18) — это представление Д. О. Чикина [6]: в данном случае

$$\rho_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\left[U(x) - U(\xi_x(t/\varepsilon))\right], \quad \mu_t^\varepsilon = -\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\beta(\xi_x(s))\frac{dU(\xi_x(s))}{dx}dW(s).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть диффузионный процесс задан как решение уравнения* (1) *и выполнены условия* 1, 2. *Тогда для любой* 1*-периодической дважды непрерывно дифференцируемой функции* $f(x)$ $\left(|f(x)| \le K < +\infty\right)$ *и любого* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi_x(s)) - \bar{f}\right]ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\beta(\xi_x(s))\,\psi(\xi_x(s))\,dW(s)\right| \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2Kc}{\gamma}, \tag{19}$$

где постоянные $c > 0, \gamma > 0$ *взяты из оценки* (7), *функция* $\psi(x)$ *задается формулой* (16), *а* $\rho(x)$ *— формулой* (6), *в которой* $G_0(x)$ *задано в* (5).

***Замечание* 1.** Воспользовавшись оценками (19) и (7), нетрудно получить оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi_x(s)) - \mathrm{M}f(\xi_x(s))\right]ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\beta(\xi_x(s))\,\psi(\xi_x(s))\,dW(s)\right| \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2Kc}{\gamma} + \sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}\left|\mathrm{M}f(\xi_x(s)) - \bar{f}\right|ds \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2Kc}{\gamma} +$$

$$+ Kc\sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}\exp\{-\gamma t\}\,dt \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{3Kc}{\gamma}.$$

3. Оценка скорости сближения семейства нормированных стохастических интегралов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами с семейством винеровских процессов. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\rho(x)$ *— плотность распределения, которая задается формулой* (6), *диффузионный процесс задан как решение уравнения* (1) *с начальным значением* $\xi(0)$, *не зависящим от* $W(t)$, $t \ge 0$ *имеющим распределение с плотностью* $\rho(x)$, *выполнены условия* 1, 2, *и*

$$\int_0^1 \psi^2(x)\,\beta^2(x)\,\rho(x)\,dx = \sigma^2 > 0.$$

Тогда для любого $0 < \sigma < 1/4$ *справедлива оценка*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi(s)) - Mf(\xi(s))\right]ds + \sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right| > \delta_\varepsilon\right\} \le \gamma_\varepsilon, \tag{20}$$

где $\tilde{W}_\varepsilon(t)$ *— некоторое семейство стандартных винеровских процессов,*

$$\delta_\varepsilon = 6\varepsilon^\delta + \left(T + \sqrt{\varepsilon}\right)12\,ce^{-\gamma/\varepsilon^{1/4-\delta}} + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{4Kc}{\gamma},$$

$$\gamma_\varepsilon = 20\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{32K^3\exp\left\{\frac{8K}{\lambda}\right\}\varepsilon^{1/4-\delta}}\right\} +$$

$$+\ 4\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^{1/2-2\delta}\,2TD_2^2}\right\} +$$

$$+\ \exp\left\{-\frac{1}{256K\varepsilon^{1/2-\delta}}\right\}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)^{1/2}\right) + \left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)12\,ce^{-\gamma/\varepsilon^{1/4-\delta}}, \tag{21}$$

постоянные $c>0,\gamma>0$ *взяты из оценки* (7), *а*

$$D_2 = \frac{16\exp\left\{\frac{4K}{\lambda}\right\}cK^2\sqrt{K}}{\lambda\gamma} + \frac{4K^2c^2}{\gamma^2}.$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений из [3, 4]. Сначала отметим, что справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\le\tau\le t+h}\left|\int_t^\tau\sqrt{\varepsilon}\,\psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s)\right| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon hKD_\psi^2}\right\}, \tag{22}$$

где постоянная D_ψ определена в (17).

В справедливости (22) нетрудно убедиться, если воспользоваться экспоненциальной оценкой для супремума непрерывного мартингала $\mu(t)$ [19, с. 173], заметив, что в данном случае имеет место оценка $\left\langle\sqrt{\varepsilon}\mu,\sqrt{\varepsilon}\mu\right\rangle_t^{t+h}\le\varepsilon hKD_\psi^2$.

Пусть

$$\eta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s),$$

$$\varsigma_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi(s))-\mathrm{M}f(\xi(s))\right]ds = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\left[f(\xi(s))-\bar{f}\right]ds.$$

В силу того, что

$$\varsigma_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\left[U(\xi(0)) - U\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \eta_\varepsilon(t),$$

с учетом (7) и (14) при $\tau\ge t$ имеем оценку

$$|\varsigma_\varepsilon(\tau)-\varsigma_\varepsilon(t)| \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2Kc}{\gamma} + |\eta_\varepsilon(\tau)-\eta_\varepsilon(t)|.$$

С учетом последнего и оценки (22) нетрудно убедиться в том, что имеет место неравенство

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\le\tau\le t+h}|\varsigma_\varepsilon(\tau)-\varsigma_\varepsilon(t)| > x+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2Kc}{\gamma}\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon hKD_\psi^2}\right\}. \tag{23}$$

Пусть $l_\varepsilon = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \to \infty, \varepsilon \to 0,\ l_\varepsilon < \frac{T}{\varepsilon},\ n = \left[\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}\right]$ — целая часть $\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}$, временные отрезки b_ε, h_ε такие, что

$$\frac{T}{\varepsilon} = nl_\varepsilon + r_\varepsilon, \qquad l_\varepsilon = b_\varepsilon + h_\varepsilon, \qquad h_\varepsilon = o(l_\varepsilon) \to \infty, \varepsilon \to 0,$$

— интервалы для разбиения С. Н. Бернштейна (см., например, [4]). Идея разбиения Бернштейна состоит в том, что сумма случайных величин разбивается на две части: на основную сумму (но уже со слабозависимыми слагаемыми) и пренебрежимую часть, которая по вероятности будет стремиться к нулю. Введем обозначения

$$\nu_k^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int\limits_{kl_\varepsilon - b_\varepsilon}^{kl_\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s), \qquad \lambda_k^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int\limits_{(k-1)l_\varepsilon}^{kl_\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s),$$

$$\mu_k^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int\limits_{(k-1)l_\varepsilon}^{(k-1)l_\varepsilon + h_\varepsilon} \psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s),$$

$$\alpha_k^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int\limits_{(k-1)l_\varepsilon}^{(k-1)l_\varepsilon + h_\varepsilon} [f(\xi(s)) - \mathrm{M} f(\xi(s))]\,ds,$$

$$\beta_k^\varepsilon = \int\limits_{kl_\varepsilon - b_\varepsilon}^{kl_\varepsilon} [f(\xi(s)) - \mathrm{M} f(\xi(s))]\,ds, \quad \gamma_k^\varepsilon = \alpha_k^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_k^\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее, пусть η_1, $\eta_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, удовлетворяющих условию $\mathrm{M}\eta_k = 0$, $\mathrm{D}\eta_k < +\infty$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots$ — точки на временной оси, $\eta(0) = 0$, $\eta(k) = \sum_{i=1}^k \eta_i$, $k = 1, 2, \ldots$. Пары $(t_k, \eta(k))$, $k = 0, 1, \ldots$, будем называть узлами. Будем рассматривать случайные ступенчатые функции вида

$$\eta(t) = \eta(k-1), \qquad \eta(0) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $s_\varepsilon^1(t)$ — случайная ступенчатая функция с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sum_{i=1}^k \gamma_i^\varepsilon\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^0 = 0,$$

где $n = \left[\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}\right]$ — целая часть $\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}$. Тогда на временном отрезке $[k\varepsilon l_\varepsilon, (k+1)\varepsilon l_\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \le t \le (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} \left|\varsigma_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon^1(t)\right| \le \sqrt{\varepsilon} \sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \le t \le (k+1)\varepsilon l_\varepsilon} |\varsigma_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon(k\varepsilon l_\varepsilon)|, \\ \left|\alpha_k^\varepsilon\right| \le \sqrt{\varepsilon} \sup_{(k-1)\varepsilon l_\varepsilon \le t \le (k-1)\varepsilon l_\varepsilon + \varepsilon h_\varepsilon} |\varsigma_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon((k-1)\varepsilon l_\varepsilon)|. \end{gathered} \tag{24}$$

Используя первую из оценок (24), с учетом оценки (23) получаем

$$P\left\{\sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \le t \le (k+1)\varepsilon l_\varepsilon}\left|\varsigma_\varepsilon(t)-\varsigma_\varepsilon^1(t)\right| > x_1+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\,\varepsilon l_\varepsilon K D_\psi^2}\right\}.$$

С учетом этой оценки имеем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)-\varsigma_\varepsilon^1(t)\right| > x_1+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{0\le k\le n}\sup_{k\varepsilon l_\varepsilon \le t \le (k+1)\varepsilon l_\varepsilon}\left|\varsigma_\varepsilon(t)-\varsigma_\varepsilon^1(t)\right| > x_1+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le 2\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\,\varepsilon l_\varepsilon K D_\psi^2}\right\}. \tag{25}$$

Пусть $\varsigma_\varepsilon^2(t)$ — случайная ступенчатая функция с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon,\ \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}\beta_i^\varepsilon\right),\quad k=0,\ldots,n,\qquad \sum_{i=1}^{0} = 0.$$

Тогда, используя вторую из оценок (24), с учетом (23) получаем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^2(t)-\varsigma_\varepsilon^1(t)\right| > x_2+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^\varepsilon\right| > x_2+\sqrt{\varepsilon}\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^\varepsilon\right| > x_2+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\,Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le 2\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)\exp\left\{-\frac{x_2^2}{2\,\varepsilon h_\varepsilon K D_\psi^2}\right\}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)-\varsigma_\varepsilon^2(t)\right| > x_1+x_2+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{4\,Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le 2\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\,\varepsilon l_\varepsilon K D_\psi^2}\right\} + 2\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)\exp\left\{-\frac{x_2^2}{2\,\varepsilon h_\varepsilon K D_\psi^2}\right\}.$$

Из последнего при $x_1 = x_2$ имеем оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)-\varsigma_\varepsilon^2(t)\right| > 2x_1+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{4\,Kc}{\gamma}\right\} \le 4\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\,\varepsilon l_\varepsilon K D_\psi^2}\right\}. \tag{27}$$

Отметим, что узлы у ломаной $\varsigma_\varepsilon^2(t)$ построены по суммам слабозависимых величин. В дальнейшем нам понадобится аналог ломаной $\varsigma_\varepsilon^2(t)$, но уже с узлами, построенными по суммам независимых величин. Действительно, условие (7) достаточно для того, чтобы последовательность $\left\{\beta_i^\varepsilon\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$, перемешивалась „по Ибрагимову”, причем в силу того, что случайные величины $\left\{\beta_1^\varepsilon, \ldots\right.$

$\ldots, \beta_n^\varepsilon\}$ отстоят друг от друга по времени не менее чем на величину h_ε, σ-алгебра $\Im_1^{kh_\varepsilon}$, порожденная величинами $\{\beta_i^\varepsilon\}$, $i = 1, \ldots, k$, и σ-алгебра, порожденная величинами $\Im_{kh_\varepsilon + h_\varepsilon}^{nh_\varepsilon}$, также отстоят по времени друг от друга не менее чем на величину h_ε. Тогда для коэффициента перемешивания „по Ибрагимову” $\varphi(h_\varepsilon)$ справедлива оценка [17, с. 467]

$$\varphi(h_\varepsilon) \le 2c \exp\{-\gamma h_\varepsilon\}. \tag{28}$$

Пусть вектор $\{\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon\}$ состоит из независимых случайных величин $\tilde\beta_i^\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, каждая из которых имеет такое же распределение, как и β_i^ε, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\varsigma_\varepsilon^3(t)$ — случайная ступенчатая функция с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}\tilde\beta_i^\varepsilon\right), \qquad \sum_{i=1}^{0} = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Известно [21], что в случае равномерного сильного перемешивания справедлива оценка

$$P\left\{\left|\beta_k^\varepsilon - \tilde\beta_k^\varepsilon\right| \ge 6\varphi(h_\varepsilon)\right\} \le 6\varphi(h_\varepsilon), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Используя эту оценку и оценку (28), убеждаемся в том, что выполняется неравенство

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^3(t) - \varsigma_\varepsilon^2(t)\right| \ge 12\sqrt{\varepsilon}\, ce^{-\gamma h_\varepsilon}\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{1\le k\le n+1}\left|\sum_{i=1}^{k}\beta_i^\varepsilon - \sum_{i=1}^{k}\tilde\beta_i^\varepsilon\right| \ge 12\, ce^{-\gamma h_\varepsilon}(n+1)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\beta_i^\varepsilon - \tilde\beta_i^\varepsilon\right| \ge 12\, ce^{-\gamma h_\varepsilon}(n+1)\right\} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} P\left\{\left|\beta_i^\varepsilon - \tilde\beta_i^\varepsilon\right| \ge 12\, ce^{-\gamma h_\varepsilon}\right\} \le \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)12\, ce^{-\gamma h_\varepsilon}. \tag{29}$$

Построим аналог ломаной $\varsigma_\varepsilon^3(t)$, но уже с узлами, построенными по суммам независимых нормально распределенных величин.

Пусть $\{\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon\}$ — вектор, состоящий из независимых случайных величин, а вектор $\{\phi_1^\varepsilon, \ldots, \phi_n^\varepsilon\}$ состоит из независимых нормально распределенных случайных величин, имеющих, как и величины $\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon$, нулевое среднее и равные вторые моменты, т. е.

$$M\phi_i^\varepsilon = M\tilde\beta_i^\varepsilon 0, \qquad M\left[\phi_i^\varepsilon\right]^2 = M\left[\tilde\beta_i^\varepsilon\right]^2 = M\left[\beta_i^\varepsilon\right]^2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В построениях А. И. Саханенко [21 – 23] по $\bar\phi_n^\varepsilon = \{\phi_1^\varepsilon, \ldots, \phi_n^\varepsilon\}$ — вектору из независимых нормально распределенных величин — строился $\bar{\tilde{\tilde\beta}}_n^\varepsilon = \{\tilde{\tilde\beta}_1^\varepsilon, \ldots, \tilde{\tilde\beta}_n^\varepsilon\}$

— вектор из независимых величин, имеющих то же самое фиксированное распределение, что и исходный вектор $\left\{\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon\right\}$, но наиболее близкий к вектору $\bar\phi_n^\varepsilon$. Имеет место и обратное построение (см. [24]), когда по исходному вектору $\left\{\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon\right\}$ строится вектор $\bar\phi_n^\varepsilon = \left\{\phi_1^\varepsilon, \ldots, \phi_n^\varepsilon\right\}$. Заметим, что с вероятностью 1 $\left|\beta_k^\varepsilon\right| \le 2Kb_\varepsilon$ (тогда и $\left|\tilde\beta_k^\varepsilon\right| \le 2Kb_\varepsilon$ с вероятностью 1), а в силу следствия 1 из [23] условие

$$\alpha \mathrm{M}\left|\tilde\beta_k^\varepsilon\right|^3 \exp\left\{\alpha\left|\tilde\beta_k^\varepsilon\right|\right\} \le \mathrm{D}\tilde\beta_k^\varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n,$$

выполняется с $\alpha = (4Kb_\varepsilon)^{-1}$.

Из результатов работы [24] (лемма 1.5) следует, что можно задать случайные величины $\tilde\beta_1^\varepsilon, \ldots, \tilde\beta_n^\varepsilon$, вообще говоря, на более богатом вероятностном пространстве $(\Omega', \Im', \mathrm{P}')$ и по этой последовательности на вероятностном пространстве $(\Omega', \Im', \mathrm{P}')$ построить последовательность $\phi_1^\varepsilon, \ldots, \phi_n^\varepsilon$ независимых нормально распределенных случайных величин таких, что

$$\mathrm{M}'\tilde\beta_i^\varepsilon = \mathrm{M}\phi_i^\varepsilon = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{D}'\tilde\beta_i^\varepsilon = \mathrm{D}\phi_i^\varepsilon$$

для всех i, причем будет выполняться неравенство

$$\mathrm{M}'\exp\{\alpha c\,\Delta_n\} \le 1 + \alpha B_n, \qquad \Delta_n = \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \tilde\beta_i^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \phi_i\right|, \tag{30}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная, $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{D}'\tilde\beta_k^\varepsilon \le 2nK^2b_\varepsilon^2$. Не уменьшая общности (см. [23]) можно считать, что $0 < c \le \dfrac{1}{64}$.

В теореме Бекеша – Филиппа требуется, чтобы пространство, на котором задаются случайные величины, было достаточно богатым; в противном случае рассуждения проводятся на более богатом пространстве. Это объясняется тем, что дальнейшие построения проводятся через равномерно распределенную случайную величину, которую нельзя, например, задать на пространстве с атомами $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ (то же самое касается построенных в дальнейшем нормально распределенных величин).

Мы изначально будем предполагать, что исходное пространство достаточно богатое, тогда все построения можно выполнить на исходном пространстве.

Пусть $\varsigma_\varepsilon^4(t)$ — случайная ступенчатая функция с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^k \phi_i\right), \qquad \sum_{i=1}^0 = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Тогда, используя неравенство (30), имеем оценку

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^4(t) - \varsigma_\varepsilon^3(t)\right| > x_3\right\} \le \left\{\frac{1}{64}\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \tilde\beta_i^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \phi_i\right| > \frac{x_3}{64\sqrt{\varepsilon}}\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{x_3}{256K\sqrt{\varepsilon}\,b_\varepsilon}\right\}\mathrm{M}\exp\left\{\frac{1}{256K\sqrt{\varepsilon}\,b_\varepsilon}\Delta_n\right\} \le$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{x_3}{256\,K\sqrt{\varepsilon}\,b_\varepsilon}\right\}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)^{1/2}\right).$$

В силу того, что

$$\beta_k^\varepsilon = -\nu_k^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\left[U\left(\xi((k-1)l_\varepsilon+h_\varepsilon)\right)-U\left(\xi(kl_\varepsilon)\right)\right],$$

получаем

$$\left|\mathrm{M}\left[\beta_k^\varepsilon\right]^2-\mathrm{M}\left[\nu_k^\varepsilon\right]^2\right| \leq \left(\mathrm{M}\left[\nu_k^\varepsilon\right]^2\right)^{1/2}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{4\,Kc}{\gamma} + \varepsilon\,\frac{4\,K^2c^2}{\gamma^2} \leq$$

$$\leq \varepsilon\sqrt{b_\varepsilon}\,D_\psi\sqrt{K}\,\frac{4\,Kc}{\gamma} + \varepsilon\,\frac{4\,K^2c^2}{\gamma^2} = \varepsilon\sqrt{b_\varepsilon}\,D_1, \tag{31}$$

где

$$D_1 = \frac{16\,C^2cK^2\sqrt{K}}{\lambda\gamma} + \frac{4\,K^2c^2}{\gamma^2},$$

а поскольку

$$\mathrm{M}\left[\nu_k^\varepsilon\right]^2 = \varepsilon b_\varepsilon\sigma^2, \quad k=1,\ldots,n, \tag{32}$$

из (31) и (32) имеем оценку

$$\left|\mathrm{M}\varepsilon\phi_k^2-\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right| \leq \varepsilon\sqrt{b_\varepsilon}D_2, \quad k=1,\ldots,n, \tag{33}$$

где

$$D_2 = \frac{16\,\exp\left\{\dfrac{4\,K}{\lambda}\right\}cK^2\sqrt{K}}{\lambda\gamma} + \frac{4\,K^2c^2}{\gamma^2}.$$

Из (33) получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{[T/\varepsilon l_\varepsilon]}\left[\mathrm{M}\left[\phi_k^\varepsilon\right]^2-\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right]^2\right| \leq \varepsilon^2 b_\varepsilon D_2^2\,\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} \leq \varepsilon T D_2^2. \tag{34}$$

Обозначив $\tilde{\phi}_k = \dfrac{\phi_k}{\sqrt{\mathrm{M}\phi_k^2}}$, построим случайную ступенчатую функцию $\varsigma_\varepsilon^5(t)$ с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{k}\sqrt{\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2}\,\tilde{\phi}_i\right), \qquad \sum_{i=1}^{0} = 0, \quad k=0,\ldots,n.$$

Используя оценку для максимума сумм независимых нормально распределенных случайных величин [25, с. 67], находим

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon^4(t)-\varsigma_\varepsilon^5(t)\right| > x_4\right\} \leq 4\,\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{M\varepsilon\phi_i^2}-\sqrt{\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2}\right]\tilde{\phi}_i > x_4\right\} \leq$$

$$\leq 4\,\exp\{-zx_4\}\,\mathrm{M}\,\exp\left\{\frac{z^2}{2\,\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{M}\,\varepsilon\phi_i^2-\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right]^2\right\}. \tag{35}$$

Из (35) с учетом оценки (34) получаем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^4(t)-\varsigma_\varepsilon^5(t)\right|>x_4\right\}\le 4\exp\left\{-zx_4+\frac{z^2TD_2^2}{2b_\varepsilon\sigma^2}\right\}. \tag{36}$$

Минимизируя правую часть (36) по $z>0$, имеем оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^4(t)-\varsigma_\varepsilon^5(t)\right|>x_4\right\}\le 4\exp\left\{-\frac{x_4^2b_\varepsilon\sigma^2}{2TD_2^2}\right\}. \tag{37}$$

Поскольку в силу результатов работы [26] существует стандартный винеровский процесс $W_\varepsilon(t),\ t\ge 0$, такой, что для любой $\tilde\phi_i\sqrt{\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2}$, $i=1,\ldots,n$, имеет место представление

$$\sqrt{\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2}\,\tilde\phi_i = W_\varepsilon\left(i\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right)-W_\varepsilon\left((i-1)\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right),\quad i=1,\ldots,n,$$

обозначая через $\eta_\varepsilon^6(t)$ случайную ступенчатую функцию с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon,\ W_\varepsilon\left(k\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2\right)\right),\quad k=0,\ldots,n,$$

с учетом упомянутого представления и (37) убеждаемся в справедливости оценки

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^6(t)-\varsigma_\varepsilon^3(t)\right|>x_3+x_4\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{-\frac{x_3}{256K\sqrt{\varepsilon}b_\varepsilon}\right\}\left(1+\frac{1}{2\sqrt2}\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)^{1/2}\right)+4\exp\left\{-\frac{x_4^2b_\varepsilon\sigma^2}{2TD_2^2}\right\}. \tag{38}$$

Пусть теперь $\eta_\varepsilon^7(t)$ — случайная ступенчатая функция с узлами

$$\left(k\varepsilon l_\varepsilon,\ W_\varepsilon\left(k\varepsilon\cdot l_\varepsilon\sigma^2\right)\right),\quad k=0,\ldots,n.$$

В силу того, что для нормальной $N(0,\,1)$ величины ξ выполняется неравенство

$$P\{|\xi|\ge x\}\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

используя неравенство для сумм независимых симметричных случайных величин [25], получаем оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\varsigma_\varepsilon^7(t)-\varsigma_\varepsilon^6(t)\right|>x_5\right\}\le P\left\{\max_{1\le k\le n}\left|W_\varepsilon(k\varepsilon b_\varepsilon\sigma^2)-W_\varepsilon(k\varepsilon l_\varepsilon\sigma^2)\right|>x_5\right\}\le$$

$$\le P\left\{\max_{1\le k\le n}\left|W_\varepsilon(k\varepsilon h_\varepsilon\sigma^2)\right|>x_5\right\}\le 4P\left\{\left|W_\varepsilon(n\varepsilon h_\varepsilon\sigma^2)\right|>x_5\right\}\le$$

$$\le 4P\left\{\left|W_\varepsilon\left(\frac{Th_\varepsilon}{l\varepsilon}\sigma^2\right)\right|>x_5\right\}=4P\left\{\left|W_\varepsilon(1)\right|>x_5\sqrt{\frac{l_\varepsilon}{Th_\varepsilon}}\right\}\le$$

$$\le 8\exp\left\{-\frac{x_5^2}{2TKD_\psi^2(h_\varepsilon/l_\varepsilon)}\right\}. \tag{39}$$

Пусть $W_\varepsilon(t\sigma^2) = \sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)$, где $\tilde{W}_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(t\sigma^2)/\sigma$ — стандартный винеровский процесс. Тогда имеет место оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon^7(t)\right| > x_6\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{1\le k\le n}\sup_{(k-1)\varepsilon l_\varepsilon\le t\le k\varepsilon l_\varepsilon}\left|W_\varepsilon(t\sigma^2) - W_\varepsilon\big((k-1)\,\varepsilon l_\varepsilon\sigma^2\big)\right| > x_6\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{n\varepsilon l_\varepsilon\le t\le T}\left|W_\varepsilon(t\sigma^2) - W_\varepsilon(n\varepsilon l_\varepsilon\sigma^2)\right| > x_6\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon l_\varepsilon}\left|W_\varepsilon(\tau\sigma^2)\right| > x_6\right\} + P\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon[T/\varepsilon - nl_\varepsilon]}\left|W_\varepsilon(\tau\sigma^2)\right| > x_6\right\} \le$$

$$\le nP\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon l_\varepsilon}\left|W_\varepsilon(\tau\sigma^2)\right| > x_6\right\} + P\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon l_\varepsilon}\left|W_\varepsilon(\tau\sigma^2)\right| > x_6\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)P\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon l_\varepsilon}\left|W_\varepsilon(\tau\sigma^2)\right| > x_6\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)P\left\{\sup_{0\le\tau\le\varepsilon l_\varepsilon}\left|\tilde{W}_\varepsilon(\tau)\right| > x_6/\sqrt{\sigma^2}\right\} \le$$

$$\le 4\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)P\left\{\left|\tilde{W}_\varepsilon(\varepsilon l_\varepsilon)\right| > x_6/\sqrt{\sigma^2}\right\} \le$$

$$\le 4\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)P\left\{\left|\tilde{W}_\varepsilon(1)\right| > x_6/\sqrt{\sigma^2\varepsilon l_\varepsilon}\right\} \le 8\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)\exp\left\{-\frac{x_6^2}{2KD_\psi^2\varepsilon l_\varepsilon}\right\}. \quad (40)$$

Объединяя оценки (27), (29), (38) – (40), получаем оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon(t)\right| > x_6 + x_5 + x_3 + x_4 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)12ce^{-\gamma h_\varepsilon} + 2x_1 + \sqrt{\varepsilon}\frac{4Kc}{\gamma}\right\} \le 8\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)\exp\left\{-\frac{x_6^2}{2KD_\psi^2\varepsilon l_\varepsilon}\right\} +$$

$$+ 8\exp\left\{-\frac{x_5^2}{2TKD_\psi^2(h_\varepsilon/l_\varepsilon)}\right\} + \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)12ce^{-\gamma h_\varepsilon} +$$

$$+ 4\exp\left\{-\frac{x_4^2 b_\varepsilon\sigma^2}{2TD_2^2}\right\} + 4\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\varepsilon l_\varepsilon KD_\psi^2}\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-\frac{x_3}{256K\sqrt{\varepsilon}\,b_\varepsilon}\right\}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon} + 1\right)^{1/2}\right).$$

Выбирая $x_i = \varepsilon^\delta$, $0 < \delta < 1/4$, $i = 1, \ldots, 5$, $l_\varepsilon = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $h_\varepsilon = 1/\varepsilon^{1/4-\delta}$, имеем

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t) - \varsigma_\varepsilon(t)\right| > 6\varepsilon^\delta + \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} + 1\right)12ce^{-\gamma/\varepsilon^{1/4-\delta}} + \sqrt{\varepsilon}\frac{4Kc}{\gamma}\right\} \le$$

$$\leq 8\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)\exp\left\{-\frac{1}{2KD_\psi^2\varepsilon^{1/2-2\delta}}\right\} + 8\exp\left\{-\frac{1}{2TKD_\psi^2\varepsilon^{1/4-\delta}}\right\} +$$

$$+ \left(\frac{T}{\varepsilon l_\varepsilon}+1\right)12ce^{-\gamma/\varepsilon^{1/4-\delta}} + 4\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^{1/2-2\delta}2TD_2^2}\right\} +$$

$$+ 4\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^{1/2-2\delta}2KD_\psi^2}\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-\frac{1}{256K\varepsilon^{1/2-\delta}}\right\}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1\right)^{1/2}\right).$$

Из последнего с учетом (21) имеем (20).

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 2 *справедливы оценки*

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\psi(\xi(s))\beta(\xi(s))\,dW(s)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|>\delta_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\,\frac{4cK}{\gamma}\right\} \leq \gamma_\varepsilon.$$

***Следствие* 2.** *Справедлива оценка*

$$M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{2m} \leq \max\left(\delta_\varepsilon^{2m},\sqrt{\gamma_\varepsilon}\right)D_0(m,T), \tag{41}$$

где

$$D_0(m,T) = 1 + 4^m D_\psi^m K^{m/2}\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{2m}T^m\sqrt{(2m-1)!!} +$$

$$+ 16^m\left[\left(\frac{2cK}{\gamma}\right)^{2m} + T^{2m}\left(\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{2m}2m(4m-1)\right)^m D_\psi^{2m}K^m\right].$$

Действительно, так как из оценки (20) следует оценка

$$M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{2m} \leq \delta_\varepsilon^{2m} + \sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \delta_\varepsilon^{2m} + 4^m\sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[\left(M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right)+\sigma^{2m}M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \delta_\varepsilon^{2m} + 4^m\sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[\left(M\sup_{0\leq t\leq T}\left|\varsigma_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right)^{1/2}+\sigma^m\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{2m}T^m\sqrt{(2m-1)!!}\right] \tag{42}$$

и в силу того, что в данном случае справедлива оценка

$$\mathrm{M}\sup_{0\le\tau\le T}\left|\int_0^{\tau/\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\,\psi(\xi(s))\,\beta(\xi(s))\,dW(s)\right|^{4m} \le$$

$$\le T^{2m}\left(\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{4m} 2m(4m-1)\right)^{2m} D_{\psi}^{4m}K^{2m} \tag{43}$$

(в справедливости (43) нетрудно убедиться, воспользовавшись оценкой для моментов супремума непрерывного мартингала [19, с. 174]), используя соотношение

$$\sup_{0\le t\le T}|\varsigma_\varepsilon(t)| \le \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2cK}{\gamma} + \sup_{0\le t\le T}|\eta_\varepsilon(t)|,$$

с учетом (43) имеем

$$\sup_{0\le t\le T}|\varsigma_\varepsilon(t)|^{4m} \le \varepsilon^{2m}2^{4m-1}\left(\frac{2cK}{\gamma}\right)^{4m} + 2^{4m-1}\sup_{0\le t\le T}|\eta_\varepsilon(t)|^{4m} \le$$

$$\le \varepsilon^{2m}2^{4m-1}\left(\frac{2cK}{\gamma}\right)^{4m} + 2^{4m-1}T^{2m}\left(\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{4m}2m(4m-1)\right)^{2m}D_{\psi}^{4m}K^{2m}. \tag{44}$$

Из (42) с учетом (44) получаем (41).

***Следствие* 3.** *Справедлива оценка*

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\eta_\varepsilon(t)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{2m} \le \left(\delta_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{6cK}{\gamma}\right)^{2m} +$$

$$+ \sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\eta_\varepsilon(t)+\sigma\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right]^{1/2} \le \left(\delta_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{6cK}{\gamma}\right)^{2m} +$$

$$+ 4^m\sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}|\eta_\varepsilon(t)|^{4m} + \sigma^{4m}\,\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{W}_\varepsilon(t)\right|^{4m}\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left(\delta_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{6cK}{\gamma}\right)^{2m} +$$

$$+ 4^m\sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[T^{2m}\left(\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{2m}2m(4m-1)\right)^{2m}D_{\psi}^{4m}K^{2m} +\right.$$

$$\left. + \sigma^{4m}\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^{4m}T^{2m}(4m-1)!!\right]^{1/2} \le \left(\delta_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{4cK}{\gamma}\right)^{2m} +$$

$$+ 4^mT^m\left(\frac{4m}{4m-1}\right)^m\sqrt{\gamma_\varepsilon}\left[(2m(2m-1))^m + \sqrt{(4m-1)!!}\,\right]D_{\psi}^{2m}K^m \le$$

$$\le \max\left(\left(\delta_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{4cK}{\gamma}\right)^{2m}, \sqrt{\gamma_\varepsilon}\right)D_1(m, T, K),$$

где

$$D_1(m, T, K) = 1 +$$

$$+ 4^m T^m \left(\frac{4m}{4m-1}\right)^m \left[(2m(2m-1))^m + \sqrt{(4m-1)!!}\,\right] D_\psi^{2m} K^m .$$

В заключение приведем некоторые примеры.

***Пример* 1.** Пусть $\alpha(x) = \sin^2 \pi x - \dfrac{1}{2}$, $\beta(x) = 1$, $f(x) = \cos^2 \pi x$, тогда

$$\vartheta(x) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\}, \quad \vartheta(1) = 1,$$

$$G_0(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\} \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\} dx,$$

$$\rho(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\} \left[\int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\} dx\right]^{-1},$$

$$\bar{f} = 1 + \left(1 - e^{-1/2\pi}\right) \left[\int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right\} dx\right]^{-1}.$$

***Пример* 2.** Пусть $\alpha(x) = -1$, $\beta(x) = 1$, $f(x) = 2\cos^2 \pi x$, тогда $\vartheta(x) = e^{2x}$, $\vartheta(1) = e^2$,

$$G_0(x) = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}, \quad \rho(x) \equiv 1, \quad \bar{f} = 1.$$

***Пример* 3.** Пусть $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$, $f(x) = 2\cos^2 \pi x$, тогда $\vartheta(x) \equiv 1$, $G_0(x) \equiv 1$, $\rho(x) \equiv 1$, $\bar{f} = 1$.

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов.// Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1989. – **45**. – С. 159 – 251.
2. *Бондарев Б. В.* О неравенстве Колмогорова – Гаека – Реньи для нормированных интегралов от процессов со слабой зависимостью // Теория вероятностей и ее применения. – 1997. – Вып. 2. – С. 225 – 238.
3. *Бондарєв Б. В., Зубко М. Л.* Про оцінку швидкості збіжності в принципі інваріантності // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз-мат. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 104 – 113.
4. *Утев С. А.* Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности //Труды Ин-та математики СО АН СССР. – 1984. – **3**. – С. 50 – 77.
5. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, № 4. – С. 730 – 737.
6. *Чикин Д. О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингальный подход // Там же. – 1989. – **14**, № 4. – С. 731 – 741.
7. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов.: Пер. с англ. – М.: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 368 с.
8. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
9. *Bondarev Boris V., Zoobko Maxim L.* The application of the invariance principle for stationary sequences with mixing // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2001. – № 1. – С. 49 – 59.
10. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. I // Там же. – 2006. – № 2. – С. 63 – 91.

11. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. 2 // Там же. – 2007. – №1. – С. 68 – 97.
12. *Бондарев Б. В., Ковтун Е. Е.* Оценка скорости сближения в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Укр. мат журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 435 – 457.
13. *Бондарев Б. В., Ковтун Е. Е.* Принцип инвариантности для стационарных процессов. Оценка скорости сходимости // Вiсн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2004. – № 1. – С. 31 – 55.
14. *Сафонова О. А.* Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 245 – 252.
15. *Журбенко И. Г.* Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 240 с.
16. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – North-Holland Publ. Comp., 1978. – 700 p.
17. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно-связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
18. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
19. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
20. *Berkes I., Philipp W.* Approximation theorem for independent and weakdependent random vektors // Ann. Probab. – 1979. – **1**, № 1. – P. 29 – 54.
21. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Труды Ин-та математики СО АН СССР. – 1984. – **3**. – С. 4 – 49.
22. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности // Там же. – 1985. – **5**. – С. 27 – 44.
23. *Саханенко А. И.* О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности // Там же. – 1989. – **13**. – С. 40 – 66.
24. *Бондарев Б. В., Колосов А. А.* К вопросу о принципе инвариантности для слабозависимых случайных величин // Прикл. статистика. Актуарна та фiнансова математика. – 2002. – № 2. – С. 63 – 71.
25. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
26. *Колосов А. А.* О построении винеровского процесса по конечной последовательности независимых гауссовских величин // Прикладна статистика. Актуарна та фiнансова математика. – 2007. – № 1. – С. 97 – 101.

Получено 21.10.08,
после доработки — 01.04.10