УДК 517.9

С. М. Чуйко (Славян. пед. ун-т)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

The classical least-squares method is used for the construction of an approximate pseudosolution of ill-posed linear boundary-value problem with pulse influence for a system of ordinary differential equations in the critical case. This pseudosolution is presented in the form of partial sums of the generalized Fourier series.

Схему класичного методу найменших квадратів використано для побудови наближеного псевдорозв'язку лінійної некоректно поставленої крайової задачі з імпульсним впливом для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку у вигляді часткових сум узагальненого ряду Фур'є.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении решений [1 – 5]

$$z(t) \;=\; \operatorname{col}\left(z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)\right), \qquad z^{(j)}(\cdot) \in C^1\left\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями

$$\frac{dz}{dt} \;=\; A(t)\,z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\mathcal{L}z(\cdot) \;=\; \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$ – $(n \times n)$-матрица и $f(t) = \operatorname{col}\left(f^{(1)}(t), \ldots, f^{(n)}(t)\right)$ — вектор-столбец

$$a_{ij}(\cdot), \quad f^{(i)}(\cdot) \in C^1\left\{[a, b] \setminus \{\tau_\nu\}_I\right\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p,$$

$\mathcal{L}z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида

$$\mathcal{L}z(\cdot) \;=\; \sum_{i=0}^{p} \ell_i \; z(\cdot),$$

причем

$$\ell_i \; z(\cdot): \; C\left[\tau_i, \tau_{i+1}\right[\times \ldots \times C\left[\tau_i, \tau_{i+1}\right[\;\to R^m,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \quad \tau_0 = a,$$

$$\ell_p \; z(\cdot): \; C\left[\tau_p, b\right] \times \ldots \times C\left[\tau_p, b\right] \to R^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Пусть $W_0(t)$ — нормальная ($W_0(a) = I_n$) фундаментальная матрица системы (1) на отрезке $[a; \tau_1]$, а $W_1(t)$ — фундаментальная матрица системы (1) на отрезке $[\tau_1; \tau_2]$, которая удовлетворяет условию $W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1)$. Существование нормальной ($W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1)$) фундаментальной матрицы системы (1) на отрезке $[\tau_1; \tau_2]$ следует из невырожденности фундаментальных матриц системы (1) на отрезках $[a; \tau_1]$

и $[\tau_1;\, \tau_2]$. Таким образом, нормальная ($X_0(a) = I_n$) фундаментальная матрица $X_0(t)$ однородной части системы (1) представима в виде

$$X_0(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [a;\, \tau_1], \quad W_0(a) = I_n, \\ W_1(t), & t \in [\tau_1;\, \tau_2], \quad W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_p(t), & t \in [\tau_p;\, b], \quad W_p(\tau_p) = W_{p-1}(\tau_1). \end{cases}$$

Матрица $X_0(t)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и удовлетворяет однородной части системы (1); при этом общее решение однородной части системы (1) обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями представимо в виде

$$z(t,\, c) = X_0(t)\, c, \quad c \in R^n.$$

Лемма. *При условии* $P_Q \neq 0$ *однородная часть задачи* (1), (2) *имеет семейство решений* [4] $z(t,c) = X(t)\,c$, $c \in R^n$, *представимое нормированной* $\left(\| X(\tau_{i_0} + 0)\| = 1\right)$ *фундаментальной матрицей*

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_0}\, X_0(t)\, P_Q^{(0)}\tilde{I}, & t \in [a;\, \tau_1[, \\ \dfrac{1}{p_0}\, X_0(t)\, P_Q^{(1)}\tilde{I}, & t \in [\tau_1;\, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{p_0}\, X_0(t)\, P_Q^{(p)}\tilde{I}, & t \in [\tau_p;\, b], \end{cases} \qquad P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \ldots\ldots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \ldots \\ I_n \end{bmatrix},$$

однородной части задачи (1), (2). *Здесь*

$$Q = \left[\ell_0 X_0(\cdot) \;\; \ell_1 X_0(\cdot) \;\; \ldots \;\; \ell_p X_0(\cdot)\right]$$

— *постоянная матрица размера* $(m \times n(p+1))$,

$$P_Q:\;\; R^{n(p+1)} \to N(Q)$$

— $(n(p+1) \times n(p+1))$-мерная матрица-ортопроектор [2], $P_Q^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, p$, — $(n \times n(p+1))$-мерные блоки ортопроектора P_Q,

$$\left\| X_0(\tau_{i_0+0})\, P_Q^{(i_0)}\, \tilde{I} \right\| = p_0, \quad \max \operatorname{rank} P_Q^{(i)}\, \tilde{I} = \operatorname{rank} P_Q^{(i_0)}\, \tilde{I}.$$

При условии $P_{Q^*} \neq 0$ задача (1), (2) разрешима для тех и только тех неоднородностей

$$\operatorname{col}\left(f^1(t), \ldots, f^{(n)}(t)\right), \quad f^{(i)}(\cdot) \in C^1\left\{[a,\, b] \setminus \{\tau_j\}_I\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют условию

$$P_{Q^*}\{\alpha - \mathcal{L}K[f(s)](\cdot)\} = 0, \tag{3}$$

где P_{Q^*} — $(m \times m)$-мерная матрица-ортопроектор: $R^m \to N(Q^*)$.

Следуя традиционной классификации краевых задач [2], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим. Решение задачи (1), (2) в этом случае представимо с помощью обобщенного оператора Грина [4]

$$G[f(s);\,\alpha](t) = \begin{cases} X_0(t)\,\overline{\gamma}_0 + K[f(s)](t), & t \in [a;\,\tau_1[, \\ X_0(t)\,\overline{\gamma}_1 + K[f(s)](t), & t \in [\tau_1;\,\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)\,\overline{\gamma}_p + K[f(s)](t), & t \in [\tau_p;\,b], \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\mathrm{col}\,(\overline{\gamma}_0,\,\overline{\gamma}_1,\,\dots,\,\overline{\gamma}_p) = Q^+\{\alpha - \mathcal{L}K\,[f(s)](\cdot)\},$$

$$K[f(s)](t) = X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,f(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (1) с переключениями.

Предположим, что условие (3) не выполнено, при этом задача (1), (2) является некорректно поставленной [6]; при построении решений этой задачи в виде [2]

$$z(t,\,\xi) = X(t)\,\xi + K[f(s)](t), \quad \xi \in R^n,$$

получаем n-параметрическое семейство линейно независимых псевдорешений

$$z^+(t,\,c) = X(t)\,c + G[f(s);\,\alpha](t), \quad c \in R^n.$$

Построенное таким образом псевдорешение $z^+(t,\,c)$ удовлетворяет дифференциальной системе (1) и минимизирует норму невязки $\Delta_0 = \left\| \ell z^+(\cdot) - \alpha \right\|$ в краевом условии (2). Целью данной статьи является построение приближенных псевдорешений краевой задачи (1), (2) в виде частичных сумм обобщенного ряда Фурье [7 – 9]

$$z^{\dagger}(t,\,c) = \begin{cases} \varphi(t)\cdot c_0, & t \in [a;\,\tau_1], \\ \varphi(t)\cdot c_1, & t \in [\tau_1;\,\tau_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi(t)\cdot c_p, & t \in [\tau_p;\,b], \end{cases} \qquad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots\dots \\ c_p \end{bmatrix} \in R^{(p+1)\,k}.$$

Здесь $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\dots,\ \varphi_k(t),\dots$ — система линейно независимых вектор-функций,

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \ \dots\ \ \varphi_k(t)\big)$$

— $(n \times k)$-мерная матрица. По аналогии с методом наименьших квадратов [7, 8] потребуем минимизации нормы невязки, дифференциальной системы (1) и краевого условия (2)

$$\Delta_1(\varphi,\,c) = \left\| A(t)\,z^{\dagger} + f(t) - \frac{dz^{\dagger}}{dt} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \mathcal{L}z^{\dagger}(\cdot) - \alpha \right\|_{R^m}^2 \to \min,$$

где [10, с. 123]

$$\left\| A(t)\,z^{\dagger} + f(t) - \frac{dz^{\dagger}}{dt} \right\|_{L^2}^2 =$$

$$= \int_a^b \left(A(t)\, z^\dagger + f(t) - \frac{dz^\dagger}{dt} \right)^* \left(A(t)\, z^\dagger + f(t) - \frac{dz^\dagger}{dt} \right) dt\,,$$

$$\left\| \mathcal{L} z^\dagger(\cdot) - \alpha \right\|^2_{R^m} = \left(\mathcal{L} z^\dagger(\cdot) - \alpha \right)^* \left(\mathcal{L} z^\dagger(\cdot) - \alpha \right).$$

При фиксированной матрице $\varphi(t)$ минимум функции $\Delta_1(\varphi, c)$ существует, так как непрерывная положительная функция $\Delta_1(\varphi, c)$ достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $\Delta_1(\varphi, c)$ приводит к уравнению

$$\int_a^b \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}^* \{[A(t)\,\varphi(t)]\, c - [\varphi'(t)]\, c + [f(t)]\}\, dt \; +$$

$$+ \; \{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}^* \{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\, c - [\alpha]\} = 0\,.$$

Здесь

$$[A(t)\,\varphi(t)] = \begin{bmatrix} A(t)\,\varphi(t) & O & \ldots & O \\ O & A(t)\,\varphi(t) & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & A(t)\,\varphi(t) \end{bmatrix},$$

$$[f(t)] = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t) \\ \ldots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

— $\big(n(p+1) \times k(p+1)\big)$-мерная матрица и $\big(n(p+1)\big)$-мерный вектор-столбец,

$$[\varphi(t)] = \operatorname{diag}\big[\varphi(t),\, \varphi(t),\, \ldots,\, \varphi(t)\big], \qquad [\varphi'(t)] = \big[\varphi'(t),\, \varphi'(t),\, \ldots,\, \varphi'(t)\big]$$

— $\big(n(p+1) \times k(p+1)\big)$-мерные матрицы,

$$[\mathcal{L}\varphi(\cdot)] = \operatorname{diag}\big[\ell_0\varphi(\cdot),\, \ell_1\varphi(\cdot),\, \ldots,\, \ell_p\varphi(\cdot)\big], \qquad [\alpha] = \operatorname{col}\big[\alpha\ \alpha\ \ldots\ \alpha\big]$$

— $\big(m(p+1) \times k(p+1)\big)$-мерная матрица.

Обозначая $\big(k(p+1) \times k(p+1)\big)$-мерные матрицы Грама

$$\Gamma[\varphi(\cdot)] = \int_a^b \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}^* \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}\, dt\,,$$

$$\Gamma[\mathcal{L}\varphi(\cdot)] = \{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}^* \{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\,,$$

для нахождения приближенного псевдорешения

$$z^\dagger(t, c) = [\varphi(t)]\, c$$

краевой задачи (1), (2) приходим к уравнению

$$\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\}\, c = \left\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]^*\right\}[\alpha] - \int_a^b \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}^* [f(t)]\, dt\,,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c \in R^{(p+1)k}$ при условии невырожденности матрицы

$$\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}$$

и определяющему псевдорешение

$$z^{\dagger}(t, c)^{*} = [\varphi(t)]\,\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]^{*}[\alpha] - \int_a^b \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}^{*}[f(t)]\,dt\right\}. \qquad (5)$$

В силу единственности полученное псевдорешение обеспечивает минимум функции $\Delta_1(\varphi, c)$ и зависит от выбора матрицы $\varphi(t)$.

Теорема. *При условии* $P_Q \neq 0$, $P_{Q^*} \neq 0$ *задача* (1), (2) *разрешима для тех и только тех неоднородностей*

$$f(t) = \operatorname{col}\left(f^{(1)}(t), \ldots, f^{(n)}(t)\right), \quad f^{(i)}(\cdot) \in C^1\left\{[a, b] \backslash \{\tau_j\}_I\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и $\alpha \in R^m$, *которые удовлетворяют условию* (3). *Если в случае* $P_Q \neq 0$, $P_{Q^*} \neq 0$ *условие* (3) *не выполнено, то для любого натурального числа* k *и фиксированной матрицы* $\varphi(t)$ *при условии*

$$\det\left\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\right\} \neq 0 \qquad (6)$$

формула (5) *определяет наилучшее среди функций вида* $z^{\dagger}(t, c) = [\varphi(t)]\,c$, $c \in R^{(p+1)k}$, *псевдорешение задачи* (1), (2), *минимизирующее невязку* $\Delta_1(\varphi, c)$.

***Пример* 1.** В качестве иллюстрации к лемме построим приближенное псевдорешение

$$z(\cdot) \in C^1\{[-1; 1] \backslash [\tau_1]_I\}, \quad \tau_1 = 0,$$

некорректно поставленной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = 1, \quad z(-1) = 0, \quad z(0) - z(1) = 1. \qquad (7)$$

Матрица

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

определяет проекторы

$$P_Q = P_{Q^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, имеет место критический случай, при этом условие (3) не выполнено. Традиционное однопараметрическое семейство псевдорешений

$$z^{+}(t, c) = X(t)\,c + G[f(s); \alpha](t), \quad c \in R^1,$$

представимое матрицей

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 0[, \\ 1, & t \in [0; 1], \end{cases}$$

и оператором Грина

$$G[f(s);\,\alpha](t) \;=\; K[f(s)](t) \;=\; t+1, \quad t \in [-1;\,1],$$

имеет невязку $\Delta_0 = 4$. Для построения псевдорешения $z^{\dagger}(t,\,c^*)$ задачи (7) по формуле (5) воспользуемся системой функций

$$\varphi_1(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_2(t) \;=\; \sin 2\pi t, \qquad \varphi_3(t) \;=\; \cos 2\pi t,$$

$$\varphi_4(t) \;=\; \sin 4\pi t, \qquad \varphi_5(t) \;=\; \cos 4\pi t.$$

Матрицы Грама, определяемые этой системой, имеют вид

$$\Gamma[\varphi(\cdot)] \;=\; \operatorname{diag}\left[0,\, 4\pi^2,\, 4\pi^2,\, 16\pi^2,\, 16\pi^2,\, 0,\, 4\pi^2,\, 4\pi^2,\, 16\pi^2,\, 16\pi^2\right],$$

$$\Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Условие (6) при этом выполнено:

$$\det\left\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\right\} \;=\; 8388608\,\pi^{16} \;\neq\; 0.$$

Полученное по формуле (5) псевдорешение $z^{\dagger}(t,\,c_1^*) \equiv 0,\ t \in [-1;\,1]$, имеет невязку $\Delta_1(\varphi,\,c_1^*) = 3$, меньшую невязки $\Delta_0 = 4$ традиционного псевдорешения.

Предположим далее, что в случае $P_Q \neq 0$, $P_{Q^*} \neq 0$ требование (3) выполнено; при этом задача (1), (2) разрешима, однако вычисление оператора Грина $K[f(s)](t)$ задачи Коши $z(a) = c$, $c \in R^n$, или обобщенного оператора Грина $G[f(s);\,\alpha](t)$ краевой задачи (1), (2) невозможно в элементарных функциях. В этом случае естественно возникает задача о наилучшем приближении $z(t,\,\varphi)$ к решению краевой задачи (1), (2), минимизирующем невязку

$$\Delta_2(\varphi,\,c) \;=\; \left\| A(t)\,z(t,\,\varphi) + f(t) - \frac{dz(t,\,\varphi)}{dt} \right\|_{L^2}^2 \;+\; \left\| \mathcal{L}z(\cdot,\,\varphi) - \alpha \right\|_{R^m}^2 \;\to\; \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Это приближение имеет вид

$$z(t,\,\varphi) \;=\; [\varphi(t)]\,\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{\mathcal{L}\varphi(\cdot)\}\}^{-1} \;\times$$

$$\times\;\left\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]^*\,[\alpha] \;-\; \int_a^b \{[A(t)\,\varphi(t)] - [\varphi'(t)]\}^*\,[f(t)]\,dt\right\}. \qquad (8)$$

Таким образом, приходим к следствию из доказанной теоремы.

Следствие. *Если в случае* $P_Q \neq 0$, $P_{Q^*} \neq 0$ *требование* (3) *выполнено, то для любого фиксированного числа* k *и фиксированной матрицы* $\varphi(t)$ *при условии* (6) *наилучшее приближение* $z(t,\,\varphi)$ *к решению краевой задачи* (1), (2), *минимизирующее невязку* $\Delta_2(\varphi,\,c)$, *имеет вид* (8).

Замечание. Доказанное следствие справедливо и в некритическом случае, когда $P_Q \neq 0$, $P_{Q^*} \neq 0$, так как требование (3) выполняется для любых неоднородностей краевой задачи (1), (2).

***Пример* 2.** В качестве иллюстрации к следствию построим наилучшее приближение

$$z(\cdot) \in C^1\left\{\left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right] \Big\backslash \{\tau_1\}_I\right\}, \qquad \tau_1 = 0\,,$$

к решению корректно поставленной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} \;=\; 1, \qquad z\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; 0, \qquad z\left(\frac{1}{2}\right) - z\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; 1. \qquad (9)$$

Для построения наилучшего приближения к решению задачи (9) воспользуемся системой функций

$$\varphi_1(t) \;=\; 1, \qquad \varphi_2(t) \;=\; t\,, \qquad \varphi_3(t) \;=\; t^2.$$

Матрицы Грама, определяемые этой системой, имеют вид

$$\Gamma[\varphi(\cdot)] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\} \;=\; \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Условие (6) при этом выполнено

$$\det\{\Gamma[\varphi(\cdot)] + \Gamma\{[\mathcal{L}\varphi(\cdot)]\}\} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{67}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{131}{48} \end{vmatrix} = \frac{512}{9} \neq 0.$$

Полученное по формуле (8) наилучшее приближение $z(t, \varphi)$ к решению краевой задачи (9) имеет вид

$$z(t, \varphi) = \begin{cases} t + \dfrac{1}{2}, & t \in \left[-\dfrac{1}{2};\, 0\right[, \\ t - \dfrac{1}{2}, & t \in \left[0;\, \dfrac{1}{2}\right], \end{cases}$$

и является точным решением задачи (9).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
3. *Sčhwabik S.* Differential equations with interface conditions// Čas. p̌estov. mat. – 1980. – Roč.105. – P. 391 – 410.
4. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 51 – 65.
5. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132 – 1135.
6. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и о методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – **151**, № 3. – С. 501 – 504.
7. *Крылов Н. М.* Избранные труды. – Киев: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 1. – 268 с.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
9. *Чуйко С. М.* Метод найменших квадратів в теорії некоректно поставлених крайових задач // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – 2007. – № 7. – С. 51 – 53.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 27.03.09