УДК 519.21

Я. М. Хусанбаев

Условия сходимости случайных процессов, остановленных в момент недоскока

Пусть для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ $\xi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(t),\ \eta_\varepsilon(t))$, $t \geqslant 0$ — случайный процесс без разрывов второго рода, непрерывный справа со значениями в $R_m \times R_1$, причем компонента $\eta_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, с вероятностью 1 монотонно не убывает и $\eta_\varepsilon(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \to \infty$.

Значительное число работ (см., напр., [1, 2]) посвящено изучению условий сходимости при $\varepsilon \to 0$ случайных величин $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(a))$, где $\tau_\varepsilon(a) = \tau_a(\eta_\varepsilon(\cdot)) = \inf(s : \eta_\varepsilon(s) > a)$. В эту схему вкладывается исследование условия сходимости величин перескоков для процессов $\eta_\varepsilon(\cdot)$.

В предлагаемой работе изучаются условия сходимости величин $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(a) - 0)$ к $\xi_0(\tau_0(a) - 0)$. При $\gamma_\varepsilon(t) \equiv \eta_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$ полученные результаты дают условия сходимости величин недоскоков.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*

1) $\xi_\varepsilon(\cdot) \xrightarrow{J} \xi_0(\cdot)$ *при* $\varepsilon \to 0$;
2) $P\{\eta_0(t_1) = \eta_0(t_2) = a\} = 0$ *для всех* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$;
3) $P\{\{\xi_0(\tau_0(a) - 0) = \xi_0(\tau_0(a))\} \cup \{\eta_0(\tau_0(a)) > a\}\} = 1$.

Тогда $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(a) - 0) \Rightarrow \xi_0(\tau_0(a) - 0)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Символ $\xrightarrow{J}$ означает сходимость процессов в J — топологии Скорохода на каждом конечном промежутке $[0, T]$ таком, что T — точка стохастической непрерывности предельного процесса.

Доказательство. Воспользуемся соответствующими результатами перескоков [1] и описанной ниже процедурой обращения времени.

Пусть $T > 0$ — точка стохастической непрерывности процесса $\xi_0(\cdot)$. Положим

$$\tau_a^T(x(\cdot)) = \begin{cases} \tau_a(x(\cdot)), & \text{если } x(T) > a; \\ T, & \text{если } x(T) \leqslant a, \end{cases}$$

и рассмотрим следующие процессы на промежутке $[0, T]$:

$$\gamma_\varepsilon^T(t) = \gamma_\varepsilon(T - t - 0), \quad \eta_\varepsilon^T(t) = -\eta_\varepsilon(T - t - 0).$$

По определению процессы $\xi_\varepsilon^T(t) = (\gamma_\varepsilon^T(t),\ \eta_\varepsilon^T(t))$, $t \in [0, T]$, не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа, $\eta_\varepsilon^T(\cdot)$ монотонно не убывают, и с вероятностью 1

$$\tau_{-a}^T(\eta_\varepsilon^T(\cdot)) = T - \tau_a^T(\eta_\varepsilon(\cdot)),\ \ \gamma_\varepsilon^T(\tau_{-a}^T(\eta_\varepsilon^T(\cdot)) = \gamma_\varepsilon(\tau_a^T(\cdot)) - 0). \tag{1}$$

Далее, если для процессов $\xi_\varepsilon(\cdot)$ выполнены условия 1) — 3), то для $\xi_\varepsilon^T(\cdot)$ выполняются следующие условия:

1′) $\xi_\varepsilon^T(\cdot) \xrightarrow{J} \xi_0^T(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$;
2′) $P\{\eta_0^T(s_1) = \eta_0^T(s_2) = -a\} = 0$ для всех $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant T$;
3′) $P\{\{\xi_0^T(\tau_{-a}^T(\eta_0^T(\cdot)) - 0) = \xi_0^T(\tau_{-a}^T(\eta_0^T(\cdot)))\} \cup \{\eta_0^T(\tau_{-a}^T(\eta_0^T(\cdot)) - 0) < -a\}\} = 1$. Тогда из теоремы 1.1.4 [1] следует, что $\tau_{-a}^T(\eta_\varepsilon^T(\cdot)) \Rightarrow \tau_{-a}^T(\eta_0^T(\cdot))$ и $\xi_\varepsilon^T(\tau_{-a}^T(\eta_\varepsilon^T(\cdot))) \Rightarrow \xi_0^T(\tau_{-a}^T(\eta_0^T(\cdot)))$ при $\varepsilon \to 0$. В силу соотношения (1) отсюда следует, что $\tau_a^T(\eta_\varepsilon(\cdot)) \Rightarrow \tau_a^T(\eta_0(\cdot))$ и $\xi_\varepsilon(\tau_a^T(\eta_\varepsilon(\cdot)) - 0) \Rightarrow \xi_0(\tau_a^T(\eta_0(\cdot)) - 0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Выберем последовательность T_n, $n \geqslant 1$, точек стохастической непрерывности процесса $\xi_0(\cdot)$ такую, что $T_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поскольку

$\tau_a^{T_n}(\eta_\varepsilon(\cdot)) = \tau_a(\eta_\varepsilon(\cdot))$ и $\xi_\varepsilon(\tau_a^{T_n}(\eta_\varepsilon(\cdot)) - 0) = \xi_\varepsilon(\tau_a(\eta_\varepsilon(\cdot)) - 0)$, если только $\eta_\varepsilon(T_n) > a$, то легко получаем утверждение теоремы, учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to\infty} P\{\eta_\varepsilon(T_n) > a\} = \lim_{n\to\infty} P\{\eta_0(T_n) > a\} = 1.$$

Рассмотрим более подробно случай, когда $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ — однородные процессы с независимыми приращениями.

Лемма 1. *Для любого* $a \geqslant 0$

$$P\{\{\xi_0(\tau_0(a) - 0) = \xi_0(\tau_0(a))\} \cup \{\eta_0(\tau_0(a)) > a\}\} = 1.$$

Доказательство. Случай $a = 0$ тривиален. Пусть $a > 0$. Обозначим через A_c событие, заключающееся в том, что в момент $\tau_0(a)$ либо скачок процесса $\xi(\cdot)$ по модулю не больше c, либо $\eta_0(\tau_0(a)) > a$. Мы покажем, что $P\{A_c\} = 1$ для любого $c > 0$. Тогда утверждение леммы следует из того, что $A_{c_1} \supseteq A_{c_2}$ при $c_1 > c_2$ и $\bigcap_{c>0} A_c = \{\xi_0(\tau_0(a) - 0) = \xi_0 \times$ $\times (\tau_0(a))\} \cup \{\eta_0(\tau_0(a)) > a\}$.

Представим процесс $\xi_0(\cdot)$ в виде суммы двух независимых процессов: $\xi_0(t) = \xi_c'(t) + \xi_c''(t)$, $t \geqslant 0$, где $\xi_c''(t) = (\gamma_c''(t), \eta_c''(t))$ — сумма скачков процесса $\xi_0(\cdot)$, для $u \leqslant t$ по модулю превосходящих c, а $\xi_c'(t) = \xi_0(t) - \xi_c''(t)$. Пусть $\varkappa_0 \equiv 0$, $\{\varkappa_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность моментов скачков процесса $\xi_c''(\cdot)$. По формуле полной вероятности и в силу определения события A_c имеем

$$\begin{aligned} P\{A_c\} &= \sum_{n=0}^{\infty} [P\{A_c, \tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} + P\{A_c, \tau_0(a) = \varkappa_{n+1}\}] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [P\{A_c/\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} P\{\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} + \\ &+ P\{\eta_0(\tau_0(a)) > a, \tau_0(a) = \varkappa_{n+1}\}] = \sum_{n=0}^{\infty} [P\{\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} + \\ &+ P\{\eta_0(\tau_0(a)) > a, \tau(a) = \varkappa_{n+1}\}], \end{aligned} \tag{2}$$

так как очевидно $P\{A_c/\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} = 1$ (если $P\{\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} > 0$), а $P\{A_c, \tau_0(a) = \varkappa_{n+1}\} = P\{\eta_0(\tau_0(a)) > a, \tau_0(a) = \varkappa_{n+1}\}$. Далее, поскольку $P\{\tau_0(a) = \varkappa_n\} = P\{\tau_0(a) = \varkappa_n, \eta_0(\tau_0(a)) = a\} + P\{\tau_0(a) = \varkappa_n, \eta_0(\tau_0(a)) > a\}$, то для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $P_n = P\{\eta_0(\tau_0(a)) = a, \tau_0(a) = \varkappa_n\} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, поскольку в этом случае (2) преобразуется к виду

$$P\{A_c\} = \sum_{n=0}^{\infty} [P\{\tau_0(a) \in (\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\} + P\{\tau_0(a) = \varkappa_{n+1}\}] = 1.$$

Известно [3], что для монотонно неубывающего однородного процесса с независимыми приращениями $\eta_0(\cdot)$

$$Me^{is\eta_0(t)} = \exp\left\{t\left(i\alpha s + \int_0^{\infty}(e^{isx} - 1)\,\Pi(dx)\right)\right\},$$

где α — некоторое неотрицательное число и Π — мера на $[0, \infty)$, такая, что $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x}\,\Pi(dx) < \infty$.

Рассмотрим последовательно следующие случаи:

1) $\int_0^{\infty} \Pi(dx) = +\infty$;

2) $\alpha=0,\ \pi=\int\limits_0^\infty \Pi(dx)<\infty$;

3) $\alpha<0,\ \pi<\infty$.

Случай 1). Из свойства меры Π следует, что для любого $c>0$ $\int\limits_0^c \Pi(dx)=+\infty$. Тогда [4] $\eta_c'(t)$ имеет непрерывное распределение. Процесс $\eta_c'(\cdot)$ не зависит от последовательности $\{\varkappa_i\}_{i=1}^\infty$ и процесса $\eta_c''(\cdot)$. Поэтому $P_p\leqslant P\{\eta_0(\varkappa_n)=a\}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^a P\{\eta_c'(y)=a-x\}P\{\varkappa_n\in dy,\ \eta_c''(\varkappa_n)\in dx\}=0,\ n=1,2,\ldots$.

Случай 2). Процесс $\eta_0(\cdot)$ ступенчатый. Поэтому $P\{\eta_0(\tau_0(a))>a\}=1$, так что $P_n=0,\ n=1,2,\ldots$.

Случай 3). Обозначим через $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ ($\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$) последовательность моментов скачков процесса $\eta_0(\cdot)$ ($\eta_c'(\cdot)$), $\Delta x(t)=x(t)-x(t-0)$. Имеем

$$P_n=\sum_{m=0}^\infty [P\{\tau_0(a)=\varkappa_{n+1},\ \eta_0(\tau_0(a))=a,\ \varkappa_{n+1}=\mu_{m+1}\}+$$

$$+\{\tau_0(a)=\varkappa_{n+1},\ \eta_0(\tau_0(a))=a,\ \Delta\eta_c''(\varkappa_{n+1})>0,$$

$$\varkappa_{n+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})\}+P\{\tau_0(a)=\varkappa_{n+1},\ \eta_0(\tau_0(a))=a,$$

$$\Delta\eta_c'(\varkappa_{n+1})=0,\ \varkappa_{n+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})\}=\sum_{m=0}^\infty(P_{nm}^{(1)}+P_{nm}^{(2)}+P_{nm}^{(3)}).$$

Пусть π_i — величина i-го скачка процесса $\eta_0(\cdot)$. Совокупности $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\pi_i\}_{i=1}^\infty$ независимы, величины $\lambda_j,\ j\geqslant1$, имеют непрерывное распределение. Если в момент $\varkappa_{n+1}$ имеет место скачок процесса $\eta_c''(\cdot)$, то $\varkappa_{n+1}$ совпадает с одним из моментов $\lambda_j,\ j\geqslant1$, а так как $\varkappa_{n+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})$, то $\eta_c''(\varkappa_{n+1})=\Delta\eta_0(\varkappa_{n+1})$. Поэтому

$$P_{nm}^{(2)}\leqslant\sum_{j=1}^\infty P\{\tau_0(a)=\lambda_j,\ \eta_0(\tau_0(a))=a,\ \Delta\eta_0(\lambda_j)>0,$$

$$\varkappa_{n+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})\}\leqslant\sum_{j=1}^\infty P\{\eta_0(\lambda_j)=a\}=\sum_{j=1}^\infty P\left\{\alpha\lambda_j+\sum_{i=1}\pi_i=a\right\}=0,$$

$$n=0,1,\ldots.$$

Оценим $P_{nm}^{(3)}$. Пусть π_i^1 и π_i^2 — величины i-го скачка процессов $\eta_c'(\cdot)$ и $\eta_c''(\cdot)$ соответственно, а $\nu(t)$ — число скачков процесса $\eta_c''(\cdot)$ за время t. Совокупности $\{\varkappa_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\pi_i^1\}_{i=1}^\infty$ и $\{\pi_j^2\}_{j=1}^\infty$ независимы, величины $\varkappa_k,\ k\geqslant1$, имеют непрерывное распределение. Поэтому и величины $\alpha\varkappa_n+\sum\limits_{i=1}\pi_i^1+\sum\limits_{j=1}^r\pi_j^2$ имеют непрерывное распределение. Тогда

$$P_{nm}^{(3)}=P\{\tau_0(a)=\varkappa_{n+1},\ \alpha\varkappa_{n+1}+\sum_{i=1}^m\pi_i^1+\sum_{j=1}^{\nu(\varkappa_{n+1})}\pi_j^2=a,$$

$$\Delta\eta''(\varkappa_{n+1})=0,\ \varkappa_{n+1}\in(\mu_m,\mu_{m+1})\}\leqslant\sum_{r=0}^n P\left\{\alpha\varkappa_{n+1}+\sum_{i=1}^m\pi_i^1+\sum_{j=1}^r\pi_j^2=a\right\}=0$$

здесь использовано то, что $\nu(\varkappa_n)\leqslant n$ с вероятностью 1).

Наконец, $P_{nm}^{(1)} \leqslant P\{\varkappa_{n+1} = \mu_{m+1}\} = 0$ (в силу независимости $\varkappa_{n+1}$ и μ_{m+1} и непрерывности распределения $\varkappa_{n+1}$).

Лемма доказана.

Введем обозначение $Q = \left\{s : s = \sum_{i=1}^{m} l_i q_i,\ l_i \in N,\ i = \overline{1, m},\ m \geqslant 1\right\}$: Здесь $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, q_n, $n = 1, 2, \ldots$, — атомы распределения $\pi(x) = \pi^{-1} \int_0^x \Pi(du)$. Будем считать $Q = \varnothing$ в следующих случаях: 1) $\pi = +\infty$; 2) $\alpha > 0$, $\pi < \infty$; 3) $\alpha = 0$, $\pi < \infty$ и распределение $\pi(x)$ не имеет атомов.

Лемма 2. *Для любого* $a \bar{\in} Q$ $P\{\eta_0(t_1) = \eta_0(t_2) = a\} = 0$ *для всех* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$.

Доказательство этой леммы просто, поэтому мы его опускаем.

Сформулируем теорему, являющуюся следствием теоремы 1 и лемм 1, 2.

Теорема 2. *Пусть* $\xi_\varepsilon(t) = (\gamma_\varepsilon(t), \eta_\varepsilon(t))$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, — *непрерывные справа однородные процессы с независимыми приращениями.*

Тогда, если выполняется условие

4) $\xi_\varepsilon(1) \Rightarrow \xi_0(1)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то для* $a \bar{\in} Q$ $\tau_\varepsilon(a) \Rightarrow \tau_0(a)$ *и* $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(a) - 0) \Rightarrow \xi_0(\tau_0(a) - 0)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

1. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций.— К. : Изд-во КГУ, 1974.— 318 с.
2. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования.— К. : Изд-во КГУ, 1976.— 80 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1965.— 656 с.
4. *Лукач Е.* Характеристические функции.— М. : Наука, 1979.— 424 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 25.04.83