УДК 517.949.2

*Д. И. Мартынюк, В. И. Кравец*

# Исследование колебательных режимов слабонелинейных систем с $n$ степенями свободы и с запаздыванием

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$d^2x/dt^2 + \lambda^2 x = \varepsilon f(x, x_\Delta, \dot{x}, \dot{x}_\Delta), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\lambda^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$, $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $f$ — полиномы степени $N$ относительно своих переменных, $x_\Delta = x(t - \Delta)$, где $\Delta$ — малая положительная постоянная, характеризующая запаздывание, при этом запись (1) понимается в координатной форме

$$d^2x_i/dt^2 + \lambda_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x_1, \ldots, x_n, x_{1\Delta}, \ldots, x_{n\Delta}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{x}_{1\Delta}, \ldots, \dot{x}_{n\Delta}).$$

В системе (1) выполним замену переменных, положив

$$x_i = a_i \sin\varphi_i, \quad dx_i/dt = \lambda_i a_i \cos\varphi_i, \quad \varphi_i = \lambda_i t + \varphi_0 \tag{2}$$

и считая $a > 0$, относительно амплитуд $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и полных фаз $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A(a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta) \\ d\varphi/dt &= \lambda + \varepsilon B(a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \end{aligned} \tag{3}$$

где обозначено: $a_\Delta(t) = a(t - \Delta)$, $\varphi_\Delta(t) = \varphi(t - \Delta)$, компоненты в $A$ и $B$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_i &= \lambda_i^{-1} f_i(a\sin\varphi, a_\Delta \sin\varphi_\Delta, a\lambda\cos\varphi, a_\Delta\lambda\cos\varphi_\Delta)\cos\varphi_i, \\ B_i &= -(a_i\lambda_i)^{-1} f_i(a\sin\varphi, a_\Delta\sin\varphi_\Delta, a\lambda\cos\varphi, a_\Delta\lambda\cos\varphi_\Delta)\sin\varphi_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Первое приближение к решениям уравнений (3) зададим выражениями

$$a = b + \varepsilon U^{(1)}(b, \theta), \quad \varphi = \theta + \varepsilon V^{(1)}(b, \theta), \tag{5}$$

при этом $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, функции $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ вычисляются по формулам [4]

$$\begin{aligned} \{U^{(1)}; V^{(1)}\} = \Sigma\,(A_{kp}(b, b);\ B_{kp}(b, b)/i(k + p, \lambda))\exp\{-i(p, \lambda\Delta)\} \times \\ \times \exp\{i(k + p, \theta)\}, \end{aligned} \tag{6}$$

в которых $A_{kp}$, $B_{kp}$ — коэффициенты Фурье функций $A(b, b, \theta, \theta - \lambda\Delta)$, $B(b, b, \theta, \theta - \lambda\Delta)$,

$$\{A; B\} = \Sigma\,\{A_{kp}(b, b);\ B_{kp}(b, b)\}\exp\{i(k, \theta)\}\exp\{i(p, \theta - \lambda\Delta)\}.$$

В выражениях (5) $b$, $\theta$ — решения уравнений первого приближения. Поскольку $\Delta$ достаточно малое, то запаздывания у медленно изменяющихся величин в осредненных уравнениях можно опустить. Кроме того, пользуясь разложением $\varphi(t - \Delta)$ в ряд Тейлора, приближенно можно положить $\Delta\varphi = \lambda\Delta$, где $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_\Delta$. Тогда систему уравнений первого приближения можно записать в виде

$$\begin{aligned} db/dt &= \varepsilon A^{(1)}(b, b, \lambda\Delta), \\ d\theta/dt &= \lambda + \varepsilon B^{(1)}(b, b, \lambda\Delta), \end{aligned} \tag{7}$$

где $A^{(1)}(b, b, \lambda\Delta)$, $B^{(1)}(b, b, \lambda\Delta)$ получаются усреднением правых частей системы (3) по $\varphi$,

$$\{A^{(1)};\ B^{(1)}\} = (2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \{A(b, b_\Delta, \varphi, \varphi - \lambda\Delta);\ B(b, b_\Delta, \varphi, \varphi - \lambda\Delta)\}\, d\varphi. \quad (8)$$

Первые приближения к решениям уравнений (1) строятся по первым приближениям (5) согласно формуле

$$x = b\sin\theta + \varepsilon(U^{(1)}\sin\theta + bV^{(1)}\cos\theta), \quad (9)$$

где $b$, $\theta$ — решения уравнений первого приближения (7), а $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ — находятся по формулам (6).

Систему уравнений (3) перепишем в виде

$$da_i/dt = (\varepsilon/\lambda_i) \sum_{|k|+|k'|+|l|+|l'|\geqslant 0}^{N} \bar{f}_{k,k',l,l'} \sin^k\varphi \sin^{k'}\varphi_\Delta \cos^l\varphi \cos^{l'}\varphi_\Delta \cos\varphi_i,$$

$$d\varphi_i/dt = \lambda_i - (\varepsilon/a_i\lambda_i) \sum_{|k|+|k'|+|l|+|l'|\geqslant 0}^{N} \bar{f}_{k,k',l,l'} \sin^k\varphi \sin^{k'}\varphi_\Delta \cos^l\varphi \cos^{l'}\varphi_\Delta \sin\varphi_i, \quad (10)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k' = (k'_1, \dots, k'_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l' = (l'_1, \dots, l'_n)$ — целочисленные векторы, $\bar{f}_{k,k'l,l'} = f_{k,k',l,l'}a^{k+k'+l+l'}\lambda^{l+l'}$. Тогда, воспользовавшись равенствами

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{2^{n+m}(n+m)!}, & p = 2n, \quad q = 2m, \\ 0 — & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \quad (11)$$

и формулами (8), уравнения первого приближения запишем в виде

$$db_i/dt = \varepsilon/\lambda_i \sum_{|k|+|k'|+|l|+|l'|\geqslant 0}^{N} \bar{f}_{k,k',l,l'} I(k, k', l_1, \dots, l_i + 1, \dots, l_n, l')$$

$$d\theta_i/dt = \lambda_i - \varepsilon/b_i\lambda_i \sum_{|k|+|k'|+|l|+|l'|\geqslant 0}^{N} \bar{f}_{k,k',l,l'} I(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k', l, l').$$

Учитывая равенства (11), систему уравнений (7) перепишем в виде

$$db_i/dt = (\varepsilon/\lambda_i)A_i(b, b, \lambda\Delta),$$
$$d\theta_i/dt = \lambda_i - (\varepsilon/b_i)\lambda_i B_i(b, b, \lambda\Delta). \quad (12)$$

Анализируя эти уравнения, видим, что $A_i(b, b, \lambda\Delta) \not\equiv 0$ лишь тогда, когда функция $f_i(x, x_\Delta, \dot{x}, \dot{x}_\Delta)$, $i = \overline{1, n}$, содержит слагаемые вида

$$f^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,\dot{x}_i + \bar{f}^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,\dot{x}_{i\Delta} \quad (13)$$

и $B_i(b, b, \lambda\Delta) \not\equiv 0$ лишь тогда, когда функция $f_i(x, x_\Delta, \dot{x}, \dot{x}_\Delta)$ содержит слагаемые вида

$$f^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,x_i + \bar{f}^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,x_{i\Delta}. \quad (14)$$

Таким образом, отсутствие в правой части системы (1) слагаемых вида (13) и (14) приводит к тому, что уравнения первого приближения имеют тривиальные решения $a = a_0$, $\theta = \lambda t + \varphi_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$, $\varphi_0 = \mathrm{const}$. В этом случае рассмотрение уравнений первого приближения не уточняет анализ решений, который мы получаем в нулевом приближении, положив в системе (3) $\varepsilon = 0$. Это имеет место, например, для всех систем (1), правая часть которых содержит лишь четные степени, т. е. слагаемые вида $x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}$, $x_{1\Delta}^{k_1'}, \ldots, x_{n\Delta}^{k_n'}, \dot{x}_1^{l_1}, \ldots, \dot{x}_n^{l_n}, \dot{x}_{1\Delta}^{l'}, \ldots, \dot{x}_{n\Delta}^{l_n'}$ с четной суммой показателей $k_1 + \ldots + k_n + k_1' + \ldots + k_n' + l_1 + \ldots + l_n + l_1' + \ldots + l_n' = 2p$.

Если в системе (1) отсутствуют слагаемые вида (13), то уравнения первого приближения уточняют лишь фазу колебаний, при отсутствии слагаемых вида (14) — лишь амплитуду колебаний. Уравнения (1), у которых совпадают либо члены (13), либо члены (14), либо те и другие, имеют в первом приближении либо амплитудные, либо фазовые, либо те и другие уравнения.

Для того чтобы для системы (3) существовал асимптотически устойчивый инвариантный тор, заполненный квазипериодическими решениями, необходимо, чтобы правая часть системы (1) содержала слагаемые вида (13) для всех $i = \overline{1, n}$. Более того, эти слагаемые должны быть полиномами не ниже третьей степени.

В качестве примера выпишем уравнения первого приближения для системы уравнений (1), правая часть которой — полином четвертой степени. С этой целью запишем слагаемые (13) и (14):

$$f^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,\dot{x}_i + \bar{f}^{(i)}(x^2, x_\Delta^2\ \dot{x}^2\ \dot{x}_\Delta^2)\,\dot{x}_{i\Delta} = \alpha_i \dot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} (\beta_{ij} x_j^2 + \beta_{ij}' x_{j\Delta}^2 +$$

$$+ \gamma_{ij} \dot{x}_j^2 + \gamma_{ij}' \dot{x}_{j\Delta}^2)\,\dot{x}_i + \bar{\alpha}_i \dot{x}_{i\Delta} + \sum_{j=1}^{n} (\bar{\beta}_{ij} x_j^2 + \bar{\beta}_{ij}' x_{j\Delta}^2 + \bar{\gamma}_{ij} \dot{x}_j^2 + \bar{\gamma}_{ij}' \dot{x}_{j\Delta}^2)\,\dot{x}_{i\Delta},$$

$$f^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, x^2, x_\Delta^2)\,x_i + \bar{f}^{(i)}(x^2, x_\Delta^2, \dot{x}^2, \dot{x}_\Delta^2)\,x_{i\Delta} = \alpha_i' x_i + \sum_{j=1}^{n} (\beta_{ij}' x_j^2 + \bar{\beta}_{ij}' x_{j\Delta}^2 +$$

$$+ \gamma_{ij}' \dot{x}_j^2 + \gamma_{ij}' \dot{x}_{j\Delta}^2)\,x_i + \sum_{j=1}^{n} (\tilde{\beta}_{ij} x_j^2 + \tilde{\beta}_{ij}' x_{j\Delta}^2 + \tilde{\gamma}_{ij} \dot{x}_j^2 + \tilde{\gamma}_{ij}' \dot{x}_{j\Delta}^2)\,x_{i\Delta} + \bar{\alpha}_i' x_{i\Delta}.$$

Поскольку $b(t)$ изменяется мало, $x_j(t - \Delta) = x_j(t) - \dot{x}_j(t)\Delta + O(\Delta^2)$, $\dot{x}_j(t - \Delta) = \dot{x}_j(t) - \ddot{x}_j(t)\Delta + O(\Delta^2)$, то правые части уравнений (12) определяются выражениями

$$A_i(b, b, \lambda\Delta) = (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)\,b_i\lambda_i/2 + (1/4)\sum_{j=1}^{n} (\beta_{ij} + \beta_{ij}' + \bar{\beta}_{ij} + \bar{\beta}_{ij}')\,b_j^2 b_i \lambda_i +$$

$$+ (1/4)\sum_{j=1}^{n} (\gamma_{ij} + \gamma_{ij}' + \bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}')\,b_j^2 b_i \lambda_j^2 \lambda_i + (1/8)(\beta_{ii} + \beta_{ii}' + \bar{\beta}_{ii} + \bar{\beta}_{ii}')\,b_i \lambda_i^3 +$$

$$+ (3/8)(\gamma_{ii} + \gamma_{ii}' + \bar{\gamma}_{ii} + \bar{\gamma}_{ii}')\,b_i^3 \lambda_i^3 + (1/8)\,\bar{\beta}_{ii} b_i^3 \lambda_i^3\,\Delta + (1/4)\,\bar{\gamma}_{ii}' b_i^3 \lambda_i^5\,\Delta + O(\Delta^2),$$

$$B_i(b, b, \lambda\Delta) = (\alpha_i' + \bar{\alpha}_i')\,b_i/2 + (1/4)\sum_{j=1}^{n} (\beta_{ij}' + \bar{\beta}_{ij}' + \tilde{\beta}_{ij} + \tilde{\beta}_{ij}')\,b_j^2\,b_i +$$

$$+ (1/4)\sum_{j=1}^{n} (-\gamma_{ij}' - \bar{\gamma}_{ij}' + \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ij}')\,b_j^2 b_i \lambda_j^2 + (1/8)(-\gamma_{ii}' - \bar{\gamma}_{ii}' + \tilde{\gamma}_{ii} + \tilde{\gamma}_{ii}') \times$$

$$\times b_i^3\,\lambda_i^2 + (3/8)(\beta_{ii}' + \bar{\beta}_{ii}' + \tilde{\beta}_{ii} + \tilde{\beta}_{ii}')\,b_i^3 + O(\Delta^2).$$

Найдем квазистатические положения равновесия системы (12), приравнивая выражения $A_i(b, b, \lambda\Delta)$ нулю и беря положительные корни.

Так, для системы двух уравнений (1) для определения квазистатических положений равновесия (стационарных амплитуд) получим уравнения

$$(\mu_{11} + \xi_1\Delta)\,b_1^2 + \mu_{12} b_2^2 = -p_1, \quad \mu_{21} b_1^2 + (\mu_{22} + \xi_2\Delta)\,b_2^2 = -p_2, \qquad (15)$$

где $\mu_{11} = \beta_{11} + \beta'_{11} + \bar{\beta}'_{11} + 3(\gamma_{11} + \gamma'_{11} + \bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}'_{11})\lambda_1^2$, $\mu_{12} = 2(\beta_{12} + \beta''_{12} + \bar{\beta}'_{12}) + 2(\gamma_{12} + \gamma'_{12} + \bar{\gamma}_{12} + \bar{\gamma}'_{12})$, $\mu_{21} = 2(\beta_{21} + \beta'_{21} + \bar{\beta}_{21} + \bar{\beta}'_{21}) + 2(\gamma_{21} + \gamma'_{21} + \bar{\gamma}_{21} + \bar{\gamma}'_{21})\lambda_1^2$, $\mu_{22} = \beta_{22} + \beta'_{22} + \bar{\beta}_{22} + \bar{\beta}'_{22} + 3(\gamma_{22} + \gamma'_{22} + \bar{\gamma}_{22} + \bar{\gamma}'_{22})\lambda_2^2$, $p_1 = 4\alpha_1 + 4\bar{\alpha}_1$, $p_2 = 4\alpha_2 + 4\bar{\alpha}_2$, $\xi_1 = \bar{\beta}_{11}\lambda_1^2 + 2\bar{\gamma}_{11}\lambda_1^4$, $\xi_2 = \beta_{22}\lambda_2^2 + 2\bar{\gamma}'_{22}\lambda_2^4$. Полагая $\Delta = 0$, мы получаем систему

$$\mu_{11}b_1^2 + \mu_{12}b_2^2 = -p_1, \quad \mu_{21}b_1^2 + \mu_{22}b_2^2 = -p_2,$$

для которой имеют место аналогичные результаты, полученные в [3]. При $\Delta \neq 0$ основной определитель системы (15) имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} \mu_{11} + \xi_1\Delta & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} + \xi_2\Delta \end{vmatrix},$$

так что эта система имеет решение относительно $b_1^2, b_2^2$, когда $D \neq 0$, и эти решения —

$$-\{p_1(\mu_{22} + \xi_2\Delta) - p_2\mu_{12}\}/D = b_1^2, \quad -\{p_2(\mu_{11} + \xi_1\Delta) - p_1\mu_{21}\}/D = b_2^2. \quad (16)$$

Из (16) следует, что рассматриваемая система уравнений имеет квазистатическое положение равновесия, когда выполняются неравенства

$$\{p_1(\mu_{22} + \xi_2\Delta) - p_2\mu_{12}\}/D < 0, \quad \{p_2(\mu_{11} + \xi_1\Delta) - p_1\mu_{21}\}/D < 0. \quad (17)$$

Неравенства (17) выполняются, когда

$$\Delta < \min\{(p_2\mu_{12} - p_1\mu_{22})/(p_1\xi_2),\ (p_1\mu_{21} - p_2\mu_{11})/(p_2\xi_1)\}. \quad (18)$$

Поскольку характеристическое уравнение матрицы $H$, построенной для положений (16), имеет вид

$$\lambda^2 - [(\mu_{11} + \xi_1\Delta)b_1^2 + (\mu_{22} + \xi_2\Delta)b_2^2]\lambda + Db_1^2b_2^2 = 0,$$

где $b_1^2$, $b_2^2$ — выражения (16), то в окрестности этих положений есть квазипериодические решения системы (1), когда для нее не выполняются оба приведенные ниже соотношения $(\mu_{11} + \xi_1\Delta)b_1^{} + (\mu_{21} + \xi_2\Delta)b_2^2 = 0$, $D < 0$. Более того, указанные решения заполняют асимптотически устойчивый инвариантный тор, когда выполняются неравенства

$$(\mu_{11} + \xi_1\Delta)b_1^2 + (\mu_{21} + \xi_2\Delta)b_2^2 < 0, \quad D > 0. \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (18) и (19) в рассматриваемой системе из двух уравнений имеется асимптотически устойчивый инвариантный тор, заполненный квазипериодическими решениями.


1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Лекции по методу усреднения в нелинейной механике.— К. : Наук. думка, 1966.—467 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Условно периодические колебания в нелинейных системах.— В кн.: Математическая физика. К. : Наук. думка, 1972, вып. 12, с. с. 86—105.
4. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— К. : Вища школа, 1979.— 247 с.



Киев. гос. ун-т



Поступила в редакцию 20.04.83