АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР • ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 35, № 2, 1983

Научный журнал основан в 1949 г. Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 519.4

А. Ф. Баранник, Л. Ф. Баранник

Скрещенные групповые кольца с условием тривиальности решений уравнения $x^n - \mu = 0$

Пусть F — конечное расширение поля рациональных чисел Q, R — кольцо всех целых величин поля F, R^* — мультипликативная группа R, Z — кольцо целых чисел, ω_n — первообразный корень из 1 степени n, G — конечная группа порядка $|G|$, $o(g)$ — порядок элемента $g \in G$, $\Lambda = (G, R, \lambda)$ — скрещенное групповое кольцо группы G и кольца R, соответствующее системе факторов $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} \in R^*$; $a, b \in G$), $\mathfrak{Z}(\Lambda)$ — центр Λ, $\widetilde{\Lambda} = F \otimes_R \Lambda$. Если L — подгруппа группы G, то под (L, R, λ) мы будем понимать подкольцо кольца Λ, соответствующее сужению системы факторов $\{\lambda_{a,b}\}$ группы G на подгруппу L. Пусть $U(\Lambda) = \Lambda^*$ — мультипликативная группа кольца Λ, $V(\Lambda) = U(\Lambda)/R^*$, $PV(\Lambda)$ — подгруппа группы $V(\Lambda)$, порожденная элементами конечного порядка. Через $\{u_g \mid g \in G\}$ обозначим естественный R-базис кольца Λ, т. е. базис, удовлетворяющий условиям: 1) u_e — единичный элемент Λ (e — единица G); 2) $u_a u_b = \lambda_{a,b} u_{ab}$ ($\lambda_{a,b} \in R^*$; $a, b \in G$).

Элемент $vR^* \in V(\Lambda)$ называется тривиальным, если $v = \lambda u_g$, где $\lambda \in R^*$, u_g — элемент данного естественного базиса.

В настоящей статье находятся необходимые и достаточные условия, при которых $PV(\Lambda) \cong G$, т. е. группа $V(\Lambda)$ содержит только тривиальные элементы конечного порядка. В теоремах 1—3 эта задача полностью решена для скрещенного группового кольца конечной группы G и кольца Z. В случае, когда $\Lambda = (G, R, \lambda)$ и $R \neq Z$, задача решена при условии, что G нильпотентна и имеет нечетный порядок или G абелева и F имеет комплексный изоморфизм в поле комплексных чисел. Аналогичные вопросы для групповых колец рассматривались в работах [1—5]. Из полученных нами результатов и работы [6] вытекает, в частности, что в отличие от групповых колец класс исследуемых колец не совпадает с классом инволютивных скрещенных групповых колец с тождеством $xx^* = x^*x$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная абелевая группа, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$. Для того чтобы $PV(\Lambda) \cong G$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*: 1) *Λ — коммутативное кольцо*; 2) *$\widetilde{\Lambda}$ — прямая сумма тел кватернионов над Q.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Λ— некоммутативное кольцо, $\widetilde{\Lambda} = Q \otimes_Z \Lambda$. В силу леммы 7 из [7] Λ содержит подкольцо с определяющими соотношениями $u^{2^n} = -1$, $v^{2^m} = -1$, $uv = -vu$, $n, m \geqslant 1$. Если $n \geqslant m$ и $n > 1$, то $(u^{2^{n-m}}v)^{2^m} = u^{2^n}v^{2^m} = 1$, а значит, $u(u^{2^{n-m}}v) = (u^{2^{n-m}}v)u$. Из этого равенства следует, что $uv=vu$. А это противоречит условию $uv = -vu$. Таким образом, если базисные элементы u, v кольца Λ не коммутируют, то $u^2 = v^2 = -1$. Отсюда на основании леммы 2.2 из [8] вытекает, что G — 2-группа.

Поскольку любой базисный элемент u_g, $o(g) \geqslant 4$, кольца Λ принадлежит $\mathfrak{Z}(\Lambda)$, то $\Lambda \cong \Lambda' \otimes_Z ZH$, где Λ' — Z — центральное скрещенное групповое кольцо элементарной 2-группы и кольца Z. Но тогда [9] $\Lambda' \cong \Lambda_1 \otimes \otimes_Z \Lambda_2 \otimes_Z \ldots \otimes_Z \Lambda_r$, где каждое кольцо Λ_i изоморфно Z-кольцу $\mathfrak{M}$ с определяющими соотношениями: $u^2 = -1$, $v^2 = -1$, $uv = -vu$. Если $r > 1$, то $\widetilde{\Lambda}$ содержит алгебру $Q(\omega_4) \otimes_Z \Lambda_1$ всех 2×2-матриц над полем $Q(\omega_4)$, а это невозможно в силу [2]. Значит, $r = 1$. По тем же соображениям $\exp H \leqslant 2$.

Достаточность. Если Λ — коммутативное кольцо, то на основании леммы 1.1 из [8] $PV(\Lambda) \cong G$. Теперь предположим, что $\widetilde{\Lambda}$ — прямая сумма тел кватернионов. Тогда $\Lambda = \mathfrak{M} \otimes_Z ZH$, где $H = 1$ или H — элементарная 2-группа. Пусть xZ^* — элемент конечного порядка группы $V(\Lambda)$. Элемент x допускает разложение $x = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv$, где $\alpha_i \in ZH$, $u^2 = v^2 = -1$, $uv = -vu$, $i = 0, 1, 2, 3$. Если $\alpha_0 \neq 0$, то в силу леммы 1.1 из [8] $x = \alpha_0$. Значит, $x = \gamma u_h$ ($\gamma \in Z^*$, $h \in H$). Пусть, однако, $\alpha_0 = 0$; $x = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv$, и поэтому $x^2 = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2$. В силу предложения 1.2 из [8] xZ^* имеет порядок 2, вследствие чего $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \pm 1$. Это соотношение возможно лишь в том случае, если одно из α_i равно $\pm u_h$, а остальные два равны 0. Предположим, например, что $\alpha_1 = \pm u_h$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ($h \in H$). Тогда $x = \pm u_h u$. Достаточность доказана.

Замечание. Теорема 1 допускает и такую формулировку. Пусть G — конечная абелева группа, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$. $PV(\Lambda) \cong G$ тогда и только тогда, когда Λ — коммутативное кольцо или $\Lambda \cong \mathfrak{M} \otimes_Z ZH$, где $H = 1$ или H — элементарная 2-группа.

Лемма 1. *Пусть $G = \{a, b\}$ — неабелева 2-группа, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$ и базисные элементы u_a, u_b кольца Λ удовлетворяют условию $u_a^{o(a)} = 1$, $u_b^{o(b)} = 1$. $PV(\Lambda) \cong G$ тогда и только тогда, когда G — группа кватернионов и $\Lambda = ZG$.*

Доказательство. Пусть $PV(\Lambda) \cong G$ и Λ не является коммутативным кольцом. Согласно лемме 7 из [7] $u_b^{-1}u_a u_b = u_a^r$, где $r \not\equiv 1 \pmod{o(a)}$. Пусть $|G/\{a\}| = 2^k$. Тогда $u_b^{2^k} = \alpha u_a^l$, $\alpha = \pm 1$. Если $\alpha = 1$, то Λ — групповое кольцо и в силу [2] G — группа кватернионов.

Пусть $\alpha = -1$, f — такой минимальный идемпотент центра алгебры $\widetilde{\Lambda}$, что $\xi = u_a f$ — первообразный корень степени $o(a)$ из f. На основании [2], [10] $\widetilde{\Lambda} f$ — тело ранга 4 над своим центром K. Отсюда вытекает, что $[Q(\xi) : K] = 2$, а потому $(u_b f)^2 \in K$. Так как $\sqrt{-1} \notin K$, то $(u_b f)^2 = -f$, вследствие чего $u_b^{2^k} = -u_a^{2^{n-1}}$, где 2^n — порядок a.

Поскольку для каждого минимального идемпотента f_1 центра алгебры $\widetilde{\Lambda}$ $(u_b f_1)^2$, $(u_a f_1)^2 \in K_1$, K_1 — центр $\widetilde{\Lambda} f_1$, то u_b^2, $u_a^2 \in \mathfrak{Z}(\Lambda)$. Отсюда в силу [2], [10] следует, что $\xi^2 = -f$, т. е. $n = 2$.

Таким образом, мы доказали, что если Λ не является групповым кольцом, то $u_a^4 = 1$, $u_b^2 = -u_a^2$, $u_b^{-1}u_a u_b = u_a^3$. Гомоморфным образом $\widetilde{\Lambda}$ является Q-алгебра с определяющими соотношениями: $v^2 = -1$, $\omega^2 = 1$, $\omega^{-1}v\omega = -v$. Но такая алгебра содержит нильпотентный элемент. Полученное противоречие доказывает, что G — группа кватернионов и $\Lambda = ZG$.

Вторая часть леммы вытекает из результатов [2] и леммы 1.1 из [8]. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — неабелева 2-группа, G_1 — абелев нормальный делитель G, $G \mid G_1 = \{aG_1\}$, $o(a) = 2^m$, $u_a^{o(a)} = -1$, (G_1, Z, λ) — коммутативное кольцо. Если $\widetilde{\Lambda} = Q \otimes_Z (G, Z, \lambda)$ не содержит нильпотентных элементов, то $m = 1$ и выполняется одно из условий:*

1) $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{-1}$ *для всех* $g \in G_1$;

2) $G = K \rtimes \{a\}$, $(K, Z, \lambda) = ZK$ — *коммутативное кольцо и* $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{-1}$ *для всех* $g \in K$;

3) $G = H \rtimes \{a\}$, H — *группа Гамильтона,* $(H, Z, \lambda) = ZH$ *и* $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{\pm 1}$ *для всех* $g \in H$.

Доказательство. Кольцо (G_1, Z, λ) задается такими определяющими соотношениями: $u_{g_1}^{2^{n_1}} = \pm 1$, $u_{g_2}^{2^{n_2}} = 1, \ldots, u_{g_s}^{2^{n_s}} = 1$. Допустим, что $s = 1$ и $u_a^{-1} u_{g_1} u_a = u_{g_1}^t$; f — такой минимальный идемпотент центра алгебры $\widetilde{\Lambda}$, что $\mathfrak{B} = \widetilde{\Lambda} f$ — некоммутативная алгебра. Пусть $\xi = u_{g_1} f$, $v = u_a f$, $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{B}$. В силу [10] $[\mathfrak{Z}(\xi) : \mathfrak{Z}] = 2$. Отображение $\xi \to v^{-1} \xi v = \xi^t$ линейно продолжается до $\mathfrak{Z}$-автоморфизма поля $\mathfrak{Z}(\xi)$, вследствие чего $v^2 \in \mathfrak{Z}$, а потому $v^2 = -1$. Отсюда вытекает, что $m = 1$. Поскольку $\xi \xi^t \in \mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{B}$ — тело, то по [10] $t = -1$.

Рассмотрим случай $s > 1$. На основании леммы 7 из [7] $\{g_i\} \Delta G$, значит, $u_a^{-1} u_{g_i} u_a = u_{g_i}^{\pm 1}$, $i = 2, \ldots, s$. Пусть $N = \{a, g_2, \ldots, g_s\}$. Если бы для некоторых k_1, k_2, $2 \leqslant k_1$, $k_2 \leqslant s$, $u_a^{-1} u_{g_{k_1}} u_a = u_{g_{k_1}}$, $u_a^{-1} u_{g_{k_2}} u_a = u_{g_{k_2}}^{-1}$, то $(N, Q, \lambda) \cong C_1 \otimes_Q C_2$, где C_1 — скрещенная групповая алгебра циклической группы $\{g_{k_1}\}$ и поля Q. Так как в силу [10] центр простой некоммутативной компоненты алгебры $\widetilde{\Lambda}$ не содержит $\sqrt{-1}$, то $g_{k_1}^2 = 1$. Значит, $u_a^{-1} u_{g_i} u_a = u_{g_i}^{-1}$ для всех $i = 2, \ldots, s$ или для всех $i = 2, \ldots, s$ $u_a^{-1} u_{g_i} u_a = u_{g_i}$.

Если $u_{g_1}^{o(g_1)} = 1$, то $u_a^{-1} u_{g_1} u_a = u_{g_1}^{-1}$, а потому $m = 1$.

Пусть $u_{g_1}^{2^{n_1}} = -1$. Очевидно, $u_a^{-1} u_{g_1} u_a = u_{g_1}^{t_1} u_{g_2}^{t_2} \ldots u_{g_s}^{t_s}$, где $t_1 \not\equiv 0 \pmod{2^{n_1}}$. Допустим, что $t_1 \not\equiv 1 \pmod{2^{n_1}}$. Гомоморфным образом алгебры $\widetilde{\Lambda}$ является Q-алгебра с определяющими соотношениями $v_{g_1}^{2^{n_1}} = -1$, $v_a^{2^m} = -1$, $v_a^{-1} v_{g_1} v_a = v_{g_1}^{t_1}$. Мы получили рассмотренный случай $s = 1$. Поэтому $m = 1$, $t_1 = -1$. Пусть $h = g_2^{t_2} \ldots g_s^{t_s}$. Если $o(h) \geqslant 2$, то гомоморфным образом $\widetilde{\Lambda}$ является Q-алгебра с определяющими соотношениями $\omega_{g_1}^{2^{n_1}} = -1$, $\omega_a^2 = -1$, $\omega_a^{-1} \omega_{g_1} \omega_a = -\omega_{g_1}^{-1}$. Такая алгебра не является телом. Получено противоречие. Значит, $h = 1$.

Пусть $t_1 \equiv 1 \pmod{2^{n_1}}$. На основании [10] $u_a u_{g_1} \neq u_{g_1} u_a$. Как и в предыдущих случаях, заключаем, что $n_1 = 1$, $m = 1$, $t_1 = \pm 1$. Если $u_a^{-1} u_{g_1} u_a = u_{g_1}^{-1}$, то получаем условие 1). Пусть $u_a^{-1} u_{g_1} u_a = u_{g_1}^{t_1} u_h$, где h — элемент порядка 2 группы $T = \{g_2\} \times \ldots \times \{g_s\}$. Обозначим $u_b = u_{g_1} u_a$. Тогда $u_b^2 = \pm u_h$, $u_b^4 = 1$.

Пусть $H = \{b, T\}$. На основании леммы 1 (H, Z, λ) — коммутативное кольцо или $(H, Z, \lambda) = ZH$ и H — гамильтонова группа. Если имеем второй случай, то в силу леммы 7 из [7] и проведенных рассуждений для $s = 1$ $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{\pm 1}$ для любого $g \in H$. Предположим, что (H, Z, λ) — коммутативное кольцо. Имеем $u_a^2 = -1$, $u_a^{-1} u_b u_a = u_b^3$, $u_a^{-1} u_d u_a = u_d$, $d \in T$. При $u_b^2 = u_h$ $(H, Z, \lambda) = ZH$ и $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{-1}$ для всех $g \in H$. Пусть $u_b^2 = -u_h$. Если $\exp T = 2$, то $T = \{h\} \times T_1$. Положим $K = \{b\} \times T_1$. Тогда $(K, Z, \lambda) = ZK$, $G = K \rtimes \{a\}$ и $u_a^{-1} u_g u_a = u_g^{-1}$ для всех $g \in K$.

Допустим, что $\exp T > 2$. Пусть $n_i \geqslant 2$ при $2 \leqslant i \leqslant s$. Тогда $o(g_1 g_i) = 2^{n_i}$. Положим $v_{g_i} = u_{g_1} u_{g_i}$. Очевидно, $v_{g_i}^{2^{n_i}} = 1$. Если бы $u_a^{-1} v_{g_i} u_a = v_{g_i}$, то $u_a^{-1}u_{g_1}u_a=u_{g_1}$. Следовательно, $u_a^{-1}v_{g_i}u_a=v_{g_i}^{-1}$. Отсюда получаем, что $u_a^{-1}u_{g_1}u_a=u_{g_i}^{-2}u_{g_1}$. Предположив $n_i\geqslant 2$, $n_j\geqslant 2$, $i\neq j$, мы получили бы $n_i=n_j=2$, $g_i^2=g_j^2$. Значит, T — группа типа (4) или (4, 2, ..., 2). Пусть $n_2=2$, $u_c=u_au_{g_2}$, $G_0=\{b,c\}$. Тогда G_0 — группа кватернионов, $G=H\leftthreetimes\{a\}$, где $H=G_0\times T/\{g_2\}$, $u_a^{-1}u_gu_a=u_g^{\pm 1}$ $(g\in H)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — конечная неабелева 2-группа, $\Lambda=(G, Z, \lambda)$. Для того чтобы $PV(\Lambda)\cong G$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

1) *G — гамильтонова группа и $\Lambda=ZG$;*

2) *$G=H\times G_1$, $G_1=G_0\leftthreetimes W$, где $H=1$ или H — элементарная 2-группа, G_0 — группа кватернионов, W — группа типа (2) или (2, 2), $\Lambda=ZH\otimes_Z(G_1,Z,\lambda)$, причем в разложении $Q\otimes_Z(G_1,Z,\lambda)$ в прямую сумму простых компонент встречаются лишь тело кватернионов над Q и мнимое квадратичное поле $Q(\omega_4)$;*

3) *$G=H\leftthreetimes\{a\}$, (H,Z,λ) — коммутативное кольцо, $u_a^2=-1$ и $u_a^{-1}u_hu_a=u_h^{-1}$ для любого элемента $h\in H$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим два случая. 1. Пусть G содержит группу кватернионов G_0. На основании лемм 1 и 2 $(G_0,Z,\lambda)=ZG_0$, т. е. это кольцо задается определяющими соотношениями: $u_a^4=1$, $u_a^2=u_b^2$, $u_b^{-1}u_au_b=u_a^3$. Пусть $g\in G$, $g\notin G_0$, $B=\{G_0,g\}$, $\Lambda_1=(B,Z,\lambda)$. Если $u_g^{o(g)}=-1$, то в силу леммы 2 и [10] $o(g)=2$ и $u_g^{-1}u_hu_g=u_h^{-1}$ для некоторого элемента h порядка 4 группы G_0. Пусть $u_g^8=1$. Из леммы 1 вытекает, что $u_g\in\mathfrak{Z}(\Lambda_1)$. Так как $o(bg)=8$, то $u_bu_g\in\mathfrak{Z}(\Lambda_1)$ и, значит, $u_b\in\mathfrak{Z}(\Lambda_1)$, что невозможно. Следовательно, $\exp G=4$ и, если $o(g)=4$, то $u_g^{o(g)}=1$.

Обозначим через N централизатор подгруппы G_0 в группе G и пусть $A=G_0N$. Докажем, что $G=A$. Предположим, что в G существует элемент g, не содержащийся в A, и пусть $u_g^{o(g)}=1$. Если $o(g)=2$, то $g\in N$, а значит, $g\in A$. Пусть $o(g)=4$ и $g\notin N$; тогда ввиду леммы 1 $u_g^2=u_a^2$. Можно считать, что $u_g^{-1}u_au_g=u_a^{-1}$, $u_g^{-1}u_bu_g=u_b^{-1}$, вследствие чего $abg\in N$, а потому $g\in A$. Таким образом, если существует элемент $g\notin A$, то $u_g^2=-1$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $u_g^{-1}u_au_g=u_a^{-1}$, $u_g^{-1}u_bu_g=u_b^{-1}$. Но тогда, как и выше, получаем, что $g\in A$. Полученное противоречие доказывает, что $G=A$.

Из приведенных рассуждений вытекает, что для любого $g\in N$ $u_g^{o(g)}=1$. Поэтому в силу леммы 7 из [7] $\{g\}\triangle N$. Следовательно, N — абелева группа или гамильтонова группа. Отсюда, в частности, вытекает, что $(N,Z,\lambda)=ZN$. Если $u_g^4=1$, $g\in N$, то, очевидно, $u_g^2=-u_a^2$ и, значит, $g^2=a^2$. Рассмотрим вначале случай, когда N — гамильтонова группа. Тогда $N=N_0\times H$, где $N_0=\{c,d\}$ — группа кватернионов, H — либо единичная группа, либо элементарная группа. Положим $s=ac$, $t=bd$. Очевидно, $s^2=t^2=1$ и группа G представима в виде $G=H\times G_1$ где $G_1=G_0\leftthreetimes W$, $W=\{s\}\times\{t\}$. Кроме того, $(G,Z,\lambda)=ZH\otimes_Z(G_1,Z,\lambda)$, $(G_0,Z,\lambda)=ZG_0$ и $(W,Z,\lambda)=\mathfrak{M}$ — Z-кольцо с определяющими соотношениями $u_s^2=-1$, $u_t^2=-1$, $u_su_t=-u_tu_s$.

Пусть N — абелева группа. Если $\exp N=2$, то G — гамильтонова группа и $(G,Z,\lambda)=ZG$. Если $\exp N=4$, то $N=\{c\}\times H$, где $c^4=1$, H — либо единичная группа, либо элементарная 2-группа. Положим $s=ac$. Тогда $s^2=1$ и группа G представима в виде $G=H\times G_1$, где $G_1=G_0\leftthreetimes W$, $W=\{s\}$. Кроме того, $(G,Z,\lambda)=ZH\otimes_Z(G_1,Z,\lambda)$, $(G_0,Z,\lambda)=ZG_0$ и $(W,Z,\lambda)=\mathfrak{R}$ — Z-кольцо с определяющим соотношением $u_s^2=-1$.

Пусть

$$e_1=\frac{1}{8}(1+u_a)(1+u_a^2)(1+u_b),\quad e_2=\frac{1}{8}(1+u_a)(1+u_a^2)(1-u_b),$$

$$e_3 = \frac{1}{8}(1-u_a)(1+u_a^2)(1+u_b), \quad e_4 = \frac{1}{8}(1-u_a)(1+u_a^2)(1-u_b),$$

$$e_5 = \frac{1}{2}(1-u_a^2). \tag{1}$$

Известно, что e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 — полная система минимальных попарно ортогональных идемпотентов алгебры QG_0. Легко проверить, что эти идемпотенты принадлежат центру алгебры $(G_1, Q, \lambda) = Q \otimes_Z (G_1, Z, \lambda)$.

Если $(W, Z, \lambda) = \mathfrak{N}$, то $(G_1, Q, \lambda) e_j \cong Q(\omega_4)$, $j = 1, 2, 3, 4$, а $(G_1, Q, \lambda) e_5$ — некоммутативная скрещенная групповая алгебра группы типа $(2, 2, 2)$ и поля Q. В силу [2] $(G_1, Q, \lambda) e_5 \cong \overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}}$, где $\overline{\mathfrak{M}} = Q \otimes_Z \mathfrak{M}$.

Если $(W, Z, \lambda) = \mathfrak{M}$, то при $j = 1, 2, 3, 4$ $(G_1, Q, \lambda) e_j \cong \overline{\mathfrak{M}}$, а $(G_1, Q, \lambda) e_5$ — скрещенная групповая алгебра группы типа $(2, 2, 2, 2)$ и поля Q. Значит, $(G_1, Q, \lambda) e_5 \cong \overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}}$.

2. Пусть G не содержит группу кватернионов. Обозначим через $\Lambda' = (L, Z, \lambda)$ подкольцо кольца Λ, порожденное теми базисными элементами u_g, $g \in G$, для которых $u_g^{o(g)} = 1$. Если $u_a^{o(a)} = 1$, $u_b^{o(b)} = 1$, $u_a u_b \neq u_b u_a$, то в силу леммы 1 $\{a, b\}$ — группа кватернионов. Следовательно, Λ' — коммутативное кольцо, а L — абелев нормальный делитель.

Так как группа G неабелева, то $\exp G > 2$. Если $exp\ L = 2$, то в G существует элемент a порядка 4, не содержащийся в L. Ввиду леммы 2 a перестановочен с каждым элементом подгруппы L. В этом случае через H обозначим максимальную абелеву подгруппу группы G, содержащую L и a. Если $\exp L > 2$, то через H обозначим максимальную абелеву подгруппу G, содержащую L. Из теоремы 1 вытекает, что кольцо $\Lambda_0 = (H, Z, \lambda)$ коммутативное. Пусть N — подгруппа группы G, такая что $H \subset N$ и $[N : H] = 2$. Тогда $N = \{g, H\}$, $H \triangle N$, $u_g^{o(g)} = -1$ и ввиду леммы 2 $o(g) = 2$. Кроме того, $u_g^{-1} u_h u_g = u_h^{-1}$ для всех $h \in H$.

Докажем далее, что $N = G$. Предположим, что $N \neq G$. Тогда будет существовать подгруппа P такая, что $N \triangle P$, $[P : N] = 2$. Пусть $P = \{b, N\}$. Покажем, что $H \triangle \{H, b\}$. Действительно, ввиду леммы 7 из [7] можно считать, что кольцо Λ_0 задается определяющими соотношениями $u_{h_1}^{2^{n_1}} = -1$, $u_{h_2}^{2^{n_2}} = 1, \ldots, u_{h_s}^{2^{n_s}} = 1$, где $n_2 \geqslant n_3 \geqslant \ldots \geqslant n_s$. Пусть $n_1 > 1$. Если $u_b^{-1} u_{h_1} u_b = \pm u_g u_h$, $h \in H$, то $u_{h_1}^2 = -1$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, $u_b^{-1} u_{h_1} u_b = \pm u_h$. Поэтому $H \triangle \{H, b\}$. Пусть $n_1 = 1$. Тогда $n_2 \geqslant 2$, и в силу леммы 7 из [7] $\{h_1 h_2\} \triangle G$, $\{h_2\} \triangle G$. Значит, $\{h_1, h_2\} \triangle G$, и поэтому $H \triangle \{H, b\}$. Но тогда на основании леммы 2 $u_b^2 = -1$ и $u_b^{-1} u_h u_b = u_h^{-1}$ для всех $h \in H$. Так как $u_b u_g$ коммутирует со всеми базисными элементами Λ_0, то $bg \in H$, а значит, $b \in N$. Это доказываетчто $N = G$.

Достаточность. Если выполняется условие 1), то $PV(\Lambda) \cong G$ в силу [2]. Допустим, что выполняется условие 2) и покажем, что $V(\Lambda) \cong G$. При этом можно считать, что $G = G_1$. Обозначим через e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 полную систему минимальных попарно ортогональных идемпотентов центра алгебры QG_0 (см. (1)). По условию Λe_j есть $Z[\omega_4]$ или $\mathfrak{M} \otimes_Z ZT$, где T — элементарная 2-группа, поэтому мультипликативная группа Λe_j тривиальна ($j = 1, 2, 3, 4, 5$).

Пусть y — обратимый элемент Λ. Тогда $y = \pm v_1 u_{g_1} e_1 \pm \ldots \pm v_5 u_{g_5} e_5$, где v_j — элемент естественного базиса кольца (W, Z, λ), u_{g_j} — базисный элемент ZG_0. Если бы, например, $v_1 = v_2$, $v_1 \neq v_j$ для $j = 3, 4, 5$, то $e_1 + e_2 = (\pm u_{g_1} e_1 \pm u_{g_2} e_2)^4 \in ZG_0$, а это невозможно в силу неразложимости кольца ZG_0. Следовательно, $v_1 = \ldots = v_5$, $y = v_1(\pm u_{g_1} e_1 \pm \ldots \pm u_{g_5} e_5)$. Поскольку $v_1^{-1} y$ — обратимый элемент и в кольце ZG_0 все обратимые элементы тривиальны, то $v_1^{-1} y = \pm u_g$ $(g \in G_0)$, а значит, $y = \pm v_1 u_g$.

Теперь предположим, что выполняется условие 3). В [6] доказано, что Λ удовлетворяет соотношению $xx^* = x^*x$, где $x = \Sigma \alpha_g u_g$ — произвольный элемент Λ, а $x^* = \Sigma \alpha_g u_g^{-1}$. Пусть xZ^* — элемент конечного порядка.

Тогда $x^m = \pm 1$, $(x^*)^m = (x^m)^* = \pm 1$, а значит, $(xx^*)^m = 1$. Так как $xx^* = \sum_{g\in G} \alpha_g^2 + \sum_{h\neq 1} \gamma_h u_h$, то на основании леммы 1.1 из [8] $\Sigma\alpha_g^2 = 1$, откуда получаем, что $x = \pm u_a$, $a \in G$.

Теорема 3. *Пусть G — конечная неабелева группа порядка $|G| \neq 2^d$, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$. Для того чтобы $PV(\Lambda) \cong G$, необходимо и достаточно, чтобы $G = H \rtimes \{a\}$, (H, Z, λ) — коммутативное кольцо, $u_a^2 = -1$, $u_a^{-1} u_h u_a = u_h^{-1}$, $h \in H$.*

Доказательство. Необходимость. На основании [2] и леммы 7 из [7] $G = N \times G_2$, где N — абелева группа нечетного порядка, а G_2 — 2-группа, удовлетворяющая одному из условий теорем 1, 2. Если G_2 содержит группу кватернионов G_0, то G содержит группу $F = N \rtimes G_0$. Так как $(F, Z, \lambda) = ZF$, то в силу [2] $PV(\Lambda) \cong G$. Получено противоречие.

Пусть $G_2 = S \rtimes \{a\}$, где (S, Z, λ) — коммутативное кольцо, $u_a^2 = -1$, $u_a^{-1} x u_a = x^*$ для любого $x \in (S, Z, \lambda)$ ($x \to x^*$ — инволюция (S, Z, λ)). Допустим, что $(S, Z, \lambda) \neq ZS$. Кольцо (S, Z, λ) задается определяющими соотношениями

$$u_c^{2^n} = -1,\ u_{c_1}^{2^{n_1}} = 1, \dots, u_{c_k}^{2^{n_k}} = 1.$$

В силу [2] и леммы 7 из [7] $G = T \rtimes \{c, a\}$, T — абелева группа, $(T, Z, \lambda) = ZT$. Пусть Λ содержит некоммутативное подкольцо с определяющими соотношениями

$$u^{p^m} = 1,\ u_c^{2^n} = -1,\ u_c^{-1} u u_c = u^r, \qquad p \neq 2.$$

Обозначим через $t = 2^l$ мультипликативный порядок r по модулю p^m, а через Γ — кольцо $Z[u_c^t]$. Если $n \geqslant 2$, то по теореме Дирихле в Λ существует обратимый элемент $y = \alpha_0 + \alpha_1 u_c + \dots + \alpha_{t-1} u_c^{t-1}$, где $\alpha_j \in \Gamma$, причем хотя бы два коэффициента отличны от нуля. Элемент $y^{-1} u y Z^*$ является элементом конечного порядка группы $V(\Lambda)$. Методом от противного легко установить, что $y^{-1} u y \neq \rho u_c^j u^i$, $\rho \in \Gamma$, $0 \leqslant j < t$, т. е. $y^{-1} u y$ — нетривиальная единица. Поэтому $n = 1$. Поскольку $r^2 \equiv 1 \pmod{p^m}$ и $p \neq 2$, то $r = -1$.

Предположим, что Λ содержит подкольцо с определяющими соотношениями

$$u^{p^m} = 1,\ v^q = 1,\ u_c^2 = -1,\ u_c^{-1} u u_c = u^{-1},\ u_c^{-1} v u_c = v, \quad q \neq 2.$$

Согласно лемме 9 из [2] при $q > 3$ в кольце Λ существует обратимый элемент $y = \delta_0 + \delta_1 u_c$, где δ_0, $\delta_1 \in Z[v]$, δ_0, $\delta_1 \neq 0$. Легко проверить, что $y^{-1} u y Z^*$ — нетривиальный элемент конечного порядка. Полученное противоречие доказывает, что если $u_c^{-1} u u_c = u^{-1}$, то $u_c^{-1} v u_c = v^{-1}$ для любого базисного элемента нечетного порядка. В этом же случае $\exp S = 2$. Аналогичный вывод делаем и об элементе u_a. Поскольку в таком случае $u_c u_a$ коммутирует со всеми элементами u_h, $h \in T$, и $u_a^{-1}(u_c u_a) u_a = (u_c u_a)^{-1}$, то $G = H \rtimes \{a\}$, где $H = \{T, ca\}$, (H, Z, λ) — коммутативное кольцо, $u_a^{-1} x u_a = x^*$ для любого $x \in (H, Z, \lambda)$ (x^* — образ x при инволюции). Если u_c коммутирует со всеми элементами u_h, $h \in T$, то $H = \{T, c\}$. Случай, когда u_a коммутирует со всеми элементами u_n, $n \in N$, невозможен в силу теоремы 1. Случай $(S, Z, \lambda) = ZS$ рассматривается аналогично. Необходимость доказана.

Достаточность теоремы доказывается с применением инволюции точно так же, как и достаточность теоремы 2.

Следствие 1. Пусть G — конечная группа, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$. Если центр G содержит элемент порядка 8, то $PV(\Lambda) \cong G$ тогда и только тогда, когда Λ — коммутативное кольцо.

Следствие вытекает непосредственно из теорем 2, 3.

Следствие 2. Пусть $|G| \neq 2^d$, $\Lambda = (G, Z, \lambda)$. Если центр G содержит элемент порядка 4, то $PV(\Lambda) \cong G$ тогда и только тогда, когда Λ — коммутативное кольцо.

Теорема 4. *Пусть F — конечное расширение поля Q, R — кольцо всех целых величин поля F, G — нильпотентная группа, $\Lambda = (G, R, \lambda)$.*

Если $|G| \not\equiv 0 \pmod 2$ *или* G *— абелева группа и* F *имеет комплексные* Q*-изоморфизмы в поле комплексных чисел, то* $PV(\Lambda) \trianglelefteq\!\!\!\!\!/\; G$ *тогда и только тогда, когда* Λ *— коммутативное кольцо.*

Доказательство. Поскольку все случаи рассматриваются аналогично, то ограничимся случаем, когда G — абелева группа нечетного порядка. Покажем, что если Λ — некоммутативное кольцо, то $PV(\Lambda) \trianglelefteq\!\!\!\!\!/\; G$. Можно предполагать, что Λ задается определяющими соотношениями $u^{p^n} = \alpha$, $v^{p^m} = \beta$, $v^{-1}uv = \varepsilon u$, где $\alpha, \beta, \varepsilon \in R^*$, $\varepsilon^p = 1$ (p простое). Очевидно, центр $\mathfrak{Z}(\Lambda)$ кольца Λ порождается элементами u^p, v^p.

Если $F = Q(\omega_3)$, $\omega_3^3 = 1$, то $\alpha^3 = \pm 1$, $\beta^3 = \pm 1$, а значит, $\tilde{\Lambda}$ содержит алгебру 3×3-матриц над некоторым полем. В силу [2] $PV(\Lambda) \trianglelefteq\!\!\!\!\!/\; G$. Пусть $F \neq Q(\omega_3)$. На основании теоремы Дирихле нетрудно получить, что Λ содержит обратимый элемент $x = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1}$, $\alpha_i \in \mathfrak{Z}(\Lambda)$, причем среди коэффициентов α_i хотя бы два отличны от нуля. Очевидно, $x^{-1}vxR^*$ — элемент конечного порядка группы $V(\Lambda)$. Если $x^{-1}vx = \mu uv$, $\mu \in \mathfrak{Z}(\Lambda)$, то $(\mu u)^p = 1$, $v^{-1}(\mu u)v = \varepsilon(\mu u)$, а поэтому в силу [2] $PV(\Lambda) \cong G$. Пусть $x^{-1}vx = \mu v$, $\mu \in \mathfrak{Z}(\Lambda)$, P — максимальный идеал R, содержащий p, R_p — P-адическое замыкание R, $\tilde{P} = R_p P$, $\Lambda_p = R_p \otimes_R \Lambda$. Можно считать, что $\alpha, \beta \equiv 1 \pmod{\tilde{P}}$. Так как $\mu^p = 1$, то $\mu = \gamma u^r v^s$, где $\gamma \equiv 1 \pmod{\tilde{P}}$. Поэтому $\mu \equiv u^r v^s \pmod{\tilde{P}\Lambda_p}$, $\alpha_0 \equiv \alpha_0 u^r v^s \pmod{\tilde{P}\Lambda_p}, \ldots, \alpha_{p-1} \equiv \alpha_{p-1} u^r v^s \pmod{\tilde{P}\Lambda_p}$. Из этих сравнений вытекает, что $\alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1} \equiv u^r v^s (\alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1}) \pmod{\tilde{P}\Lambda_p}$, откуда $u^r v^s \equiv 1 \pmod{\tilde{P}\Lambda_p}$, т. е. $\mu \in R_p$. В таком случае только один из коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ отличен от нуля. Получено противоречие. Следовательно, $PV(\Lambda) \trianglelefteq\!\!\!\!\!/\; G$. Теорема доказана.

1. *Higman G.* The units of groups rings— Proc. London Math. Soc. 1940, **46**, p. 231—248.
2. *Берман С. Д.* Об уравнении $x^m = 1$ в целочисленном групповом кольце.— Укр. мат. журн. 1955, **7**, № 3 с. 253—261.
3. *Cohn J. A., Livingstone D.* On the structure of group algebras I.— Canad. J. Math., 1965, **17**, № 4, p. 583—593.
4. *Бовди А. А.* Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца I.— Сиб. мат. журн. 1968, **9**, № 3, с. 495—498.
5. *Бовди А. А.* Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца, II.— Там же, 1970, **11**, № 3, с. 492—511.
6. *Семирот М. С.* Схрещені групові кільця з тотожністю $xx^* = x^*x$.— У кн.: Матеріали I конференції молодих науковців Західного наукового центру АН УРСР. Секція математики та механіки, № 313—74 Деп. ВИНИТИ 1974 р. (Ужгород, 1973), с. 28—37.
7. *Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф.* Скрещенные групповые кольца с тривиальной мультипликативной группой.— В кн.: Материалы XXXI Итоговой науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секция мат. наук № 3131—78 Деп, ВИНИТИ 1978 г. (Ужгород, 1978), с. 119—136.
8. *Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Об уравнении $x^n = \mu$ в целочисленном скрещенном групповом кольце.— В кн.: Материалы XXXI Итоговой науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секция мат. наук. № 3131—78 Деп, ВИНИТИ 1978 г. (Ужгород, 1978), с. 98—118.
9. *Баранник Л. Ф.* Об индексе Шура проективных представлений конечных групп.— Мат. сб. 1971, **86**. № 1, с. 110—120.
10. *Roquette P.* Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotenter Gruppen.— Arch. Math. 1958. **9**. s. 241—250.

Полтавский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.06.79