УДК 517.925.3

С. Д. Борисенко

Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \; t \neq t_i, \qquad (1)$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x),$$

где $A(t)$ — непрерывная при $t \geqslant t_0 \geqslant 1$ матрица, функции $f(t, x)$, $I_i(x)$ таковы, что $f(t, 0) = 0$, $I_i(0) = 0$ для всех $t \geqslant t_0 \geqslant 1$ и $i = 1, 2, \ldots$, причем

$$\| f(t, x) \| + \| I_i(x) \| \leqslant L \| x \|, \; L = \text{const} > 0 \;\; \forall x \, (\| x \| \leqslant H) \qquad (2)$$

равномерно по t и i.

Вопрос устойчивости решений систем вида (1) изучался в работах [1—4], некоторые результаты по технической устойчивости рассмотрены в [5].

Относительно моментов времени t_i и матрицы $A(t)$ будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to\infty} t_i = \infty$ и система

$$dx/dt = A(t)x \qquad (3)$$

вполне правильна [6], т. е. она правильна по Ляпунову, причем существует нормальная фундаментальная система решений $X(t, t_0)$, обладающая конечными характеристическими степенями β_k, $k = \overline{1, n}$, и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t}\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau - \sigma_\alpha t\right] = \sigma_\beta, \qquad (4)$$

где $\sigma_\alpha = \sum\limits_k \alpha_k$, $\sigma_\beta = \sum\limits_k \beta_k$, α_k — характеристические показатели решений, входящих в фундаментальную систему $X(t, t_0)$ с учетом кратности. Например, если $A(t) = A + \dfrac{A_1}{t} + \dfrac{A_2(t)}{t^{1+\varepsilon}}$, где A — матрица, обладающая простыми характеристическими корнями, $\| A_2(t) \| < \eta$, $\eta = \text{const} > 0$ и $\varepsilon > 0$, то система (3) вполне правильна [6].

Сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть система (3) вполне правильна. Тогда для матрицанта $X(t, t_0)$ линейной системы с импульсным воздействием*

$$dx/dt = A(t)x, \; t \neq t_i, \; \Delta x|_{t=t_i} = Ix \qquad (5)$$

справедлива оценка

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant c e^{\bar{\alpha}(t-t_0)} \left[\frac{t}{t_0}\right]^{\bar{\beta}} t_0^{\varepsilon} \alpha^{i(t_0, t)}, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 1, \qquad (6)$$

где $c = \text{const} > 0$, $\bar{\alpha} = \max\limits_i \alpha_k$, $\bar{\beta} > \beta = \max\limits_i \beta_k$, ε — *произвольное сколь угодно малое положительное число,* $\alpha^2 = \max\limits_j \lambda_j((E + I)^T (E + I))$, $i(u, v)$ —

количество точек $\{t_i\}$, принадлежащих $[u, v] \in [t_0, \infty)$; матрицу $E + I$ считаем невырожденной.

Доказательство. Предположим $W(t, \tau) = W(t) W^{-1}(\tau)$ — матрицант системы (3), для которого выполнено условие (4). Тогда соответствующая нормированная фундаментальная матрица решений системы (5) примет вид

$$X(t, t_0) = W(t, t_i) \prod_{t_i \geqslant t_j > t_0 \geqslant 1} (E + I) W(t_j, t_{j-1}). \tag{7}$$

Учитывая оценку для $W(t, \tau)$, полученную в работе [6], имеем

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant \| W(t, t_i) \| \prod_{t_i \geqslant t_j > t_0 \geqslant 1} \| E + I \| \| W(t_j, t_{j-1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant c e^{\overline{\alpha}(t-t_0)} t^{\overline{\beta}} t_0^{\varepsilon - \overline{\beta}} \alpha^{i(t_0, t)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть последовательность моментов $\{t_i\}$, в которые происходит возмущение, удовлетворяет условию

$$p_1 \tau \leqslant i(t^*, t^* + \tau) \leqslant p_2 \tau, \quad t^* \in [t_0, \infty), \tag{8}$$

где p_i — некоторые положительные постоянные.

Из леммы 1 получаем следующий критерий асимптотической устойчивости.

Теорема 1. *Предположим матрица $A(t)$ такова, что система (3) вполне правильна. Последовательность $\{t_i\}$ удовлетворяет условию (8). Тогда, если*

$$\overline{\beta} < 0, \ \overline{\alpha} + p_i \ln \alpha \leqslant 0 \begin{cases} i = 2, & \alpha \geqslant 1, \\ i = 1, & 0 < \alpha < 1, \end{cases} \tag{9}$$

то нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Действительно, так как всякое решение системы (5) имеет вид $x(t) = X(t, t_0) x_0$, $(x(t_0) = x_0)$, то с учетом (8) получаем

$$\| x(t) \| \leqslant \| X(t, t_0) \| \| x_0 \| \leqslant c t^{\overline{\beta}} t_0^{\varepsilon - \overline{\beta}} e^{\overline{\alpha}(t-t_0)} \alpha^{i(t_0, t)} \| x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant c t^{\overline{\beta}} t_0^{\varepsilon - \overline{\beta}} e^{(\overline{\alpha} + p_i \ln \alpha)(t-t_0)} \| x_0 \|,$$

откуда следует, что $\| x(t) \| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

Пусть: а) система (3) вполне правильна; б) характеристические показатели $\alpha_k \leqslant 0$, характеристические степени таковы, что $\overline{\beta} < 0$; в) выполнено условие (8). Тогда решение $x = 0$ системы (5) асимптотически устойчиво, если только $|\alpha| < 1$.

Рассмотрим систему (1) в предположении, что $I_i(x) = B_i x + I_i^*(x)$, где B_i — постоянные матрицы, $f(t, x)$ и $I_i^*(x)$ подчинены условию (2) равномерно по t и i.

Теорема 2. *Предположим, что матрица $A(t)$ такая же, как в теореме 1. Последовательность $\{t_i\}$ удовлетворяет условию* (8). *Тогда, если только $\overline{\beta} < 0$,*

$$\overline{\alpha} + \ln \alpha^{p_i} (1 + kL)^{p_2} + kL < 0 \begin{cases} i = 2, & \alpha \geqslant 1, \\ i = 1, & 0 < \alpha < 1, \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha^2 = \max \lambda_j ((E + B_i)^T (E + B_i))$, *то решение $x = 0$ системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $X(t, \tau)$ — матрицант линейной системы

$$dx/dt = A(t) x, \ t \neq t_i, \ \Delta x |_{t = t_i} = B_i x. \tag{11}$$

Из представления решения в виде

$$x(t) = X(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)\, f(\tau, x(\tau))\, d\tau + \sum_{t_i > t_0} X(t, t_i)\, I_i^*(x(t_i)) \tag{12}$$

с учетом оценки $\| X(t, \tau) \| \leqslant k e^{(\varepsilon_1 + \overline{\alpha})(t-\tau)} \left[\frac{t}{\tau}\right]^{\overline{\beta}} \alpha^{i(\tau, t)}$, где $k = k(\varepsilon_1)$, ε_1 — некоторая постоянная, следует неравенство

$$\left[\frac{t}{t_0}\right]^{-\overline{\beta}} e^{-(\overline{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t-t_0)} \| x(t) \| \leqslant k \| x_0 \| +$$

$$+ kL \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\tau}{t_0}\right]^{-\overline{\beta}} e^{(\overline{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(\tau - t_0)} \| x(\tau) \| \, d\tau +$$

$$+ kL \sum_{t_i > t_0} \left[\frac{t_i}{t_0}\right]^{-\overline{\beta}} e^{(\overline{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t_i - t_0)} \| x(t_i) \|. \tag{13}$$

Применяя к (13) лемму Гронуолла — Беллмана для кусочно-непрерывных функций [3], получаем

$$\left[\frac{t}{t_0}\right]^{\overline{\beta}} e^{-(\overline{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t-t_0)} \| x(t) \| \leqslant k \| x_0 \| (1 + kL)^{p_2(t-t_0)} e^{kL(t-t_0)},$$

или

$$\| x(t) \| \leqslant k \left[\frac{t}{t_0}\right]^{-\overline{\beta}} e^{(\varepsilon_1 + \overline{\alpha} + \ln \alpha^{p_i}(1+kL)^{p_2} + kL)(t-t_0)} \| x_0 \|. \tag{14}$$

С учетом (10) из (14) следует требуемый результат.

Когда $\alpha_k \leqslant 0$, $\overline{\beta} < 0$, $I_i(x) = B_i x + I_i^*(x)$, асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1) следует из неравенства $\ln \alpha^{p_i} (1 + kL)^{p_2} + kL < 0$.

Приведем утверждение, дающее достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы, подвергающейся импульсному воздействию на фиксированных поверхностях, в предположении, что они задаются непрерывно дифференцируемыми функциями $t = t_i(x)$ такими, что $t_i(x) \underset{i \to \infty}{\to} \infty$ равномерно по x.

Теорема 3. *Пусть система дифференциальных уравнений*

$$dx/dt = A(t)\, x + f(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x|_{t = t_i(x)} = B_i x + I_i^*(x) \tag{15}$$

такова, что 1) система (3) вполне правильна 2); последовательность $\{t_i\}$ удовлетворяет условию (8); 3) функции $f(t, x)$ и $I_i^*(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной L; 4) для характеристических показателей и характеристических степеней соответствующей нормальной фундаментальной матрицы имеют место неравенства (10); 5) справедливы соотношения

$$\sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant 1} \left\langle \frac{\partial t_i (x + \sigma (B_i x + I_i^*(x)))}{\partial x},\ B_i x + I_i^*(x) \right\rangle \leqslant 0,$$

$$\left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \right\| \leqslant L, \quad L \left(\sup_t \| A(t) \| + L\right) H < 1. \tag{16}$$

Тогда тривиальное решение системы (15) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Как следствие теоремы 3 может быть сформулировано аналогичное утверждение для случая, когда характеристические показатели α_k неположительны. Условия (10) обобщают аналогичные ограничения, полученные в работе [4].

2. Предположим, что $f(t, x)$ в области $\Omega = \{t, x : t \in J = [t_0, \infty),\ t_0 \geqslant 1,\ \|x\| \leqslant H,\ H = \text{const} > 0\}$ удовлетворяет условию усиленной нелинейности

$$\| f(t, x) \| \leqslant b(t) \| x \|^m, \quad m > 0,\ m \neq 1, \tag{17}$$

где $b(t)$ — положительная, непрерывная функция.

Приведем аналог леммы Бихари [7] для кусочно-непрерывных функций.

Л е м м а 2. *Если неотрицательная кусочно-непрерывная функция удовлетворяет неравенству*

$$u(t) \leqslant c + \sum_{t_i > t_0} \beta_i u(t_i - 0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau) u^m(\tau)\, d\tau, \quad m > 0,\ m \neq 1, \tag{18}$$

где $c \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $v(\tau) \geqslant 0$, t_i — *точки разрыва первого рода функции* $u(t)$, *то имеет место оценка*

$$u(t) \leqslant c \prod_{t_i > t_0} (1 + \beta_i) \Big[1 - (m-1) \prod_{t_i > t_0} (1 + \beta_i)^{m-1} c^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}} \tag{19}$$

для всех $t \geqslant t_0$ *таких, что*

$$c^{m-1} (m-1) \prod_{t_i > t_0} (1 + \beta_i)^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau < 1. \tag{20}$$

Если же $0 < m < 1$, то справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant \prod_{t_i > t_0} (1 + \beta_i) \Big[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{\frac{1}{1-m}} \quad \forall t > t_i > t_0. \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m > 1$. Рассмотрим интервал $[t_0, t_1)$. Очевидно (18) можно записать $u(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(\tau) u^m(\tau)\, d\tau$. Используя лемму Бихари, имеем $u(t) \leqslant c\Big[1 - (m-1) c^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}}$, т. е. неравенство (19) справедливо для $t \in [t_0, t_1)$ таких, что $(m-1) c^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau < 1$.

Пусть $t \in [t_1, t_2)$. Тогда

$$u(t) \leqslant c + \beta_1\Big[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} v(\tau) \Big[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{\tau} v(\sigma)\, d\sigma\Big]^{\frac{m}{1-m}} d\tau + \int_{t_1}^{t} v(\tau) u^m(\tau)\, d\tau =$$

$$= (1 + \beta_1 \Big[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}} + \int_{t_1}^{t} v(\tau) u^m(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда получаем

$$u(t) \leqslant [c^{1-m} (1 + \beta_1)^{1-m} + (1 + \beta_1)^{1-m} (1-m) \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (1-m) \int_{t_1}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}} \leqslant c(1 + \beta_1)[1 + (1-m) \times$$

$$\times (1 + \beta_1)^{m-1} c^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Если предположить о справедливости (19) на интервале $[t_{k-1}, t_k)$, то для $t \in [t_k, t_{k+1})$ будут выполняться неравенства

$$u(t) \leqslant c + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j) \left[c^{1-m} + (1-m) \int_{0}^{t_1} v(\tau)\, d\tau\right]^{-\frac{1}{m-1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} v(\sigma) \prod_{j=1}^{i-1} (1+\beta_j) \left[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{\sigma} v(\tau)\, d\tau\right]^{-\frac{1}{m-1}} d\sigma +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} v(\tau)\, u^m(\tau)\, d\tau \leqslant \prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j)\, c \Big[1 + (1-m)\, c^{m-1} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j)^{m-1} \int_{t_0}^{t_k} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}} + \int_{t_k}^{t} v(\tau)\, u^m(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом,

$$u(t) \leqslant \Big\{\Big[\prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j)\Big]^{1-m} \Big[c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^{t_k} v(\tau)\, d\tau \prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j)^{1-m}\Big] +$$

$$+ (1-m) \int_{t_k}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big\}^{-\frac{1}{m-1}} \leqslant C \prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j) \Big[1 - (m-1)\, c^{m-1} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} (1+\beta_j)^{m-1} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big]^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Это и доказывает утверждение леммы.

Теорема 4. *Пусть система* (1) *такова, что* 1) $I_i(x) = B_i x + I_i^*(x)$; 2) *система* (3) *вполне правильна*; 3) *функция* $f(t, x)$ *подчинена оценке* (17) *с* $m > 1$, *а импульсы* $I_i^*(x)$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянными* L_i; 4) *имеют место неравенства*

$$\bar{\beta} < 0,\ \bar{\alpha} + p_i \ln \alpha < 0,\ \prod_{t_i > t_0} (1 + kL_i) \leqslant p < \infty,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \tau^{\bar{\beta}(m-1)} e^{(\bar{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(m-1)\tau}\, b(\tau)\, d\tau \leqslant l_1 < \infty; \tag{22}$$

5) *для последовательности* $\{t_i\}$ *выполнено условие* (8).

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение, удовлетворяющее при $t \in [t_0, t_0 + T)$, $T \leqslant \infty$ системе уравнений (1) с $I_i(x) = B_i x + I_i^*(x)$. Обозначим через $X(t, \tau)$ матрицант системы (11), которому отвечает нормальная фундаментальная система решений $W(t, \tau)$ уравнений (3) с конечными характеристическими степенями β_k, $k = \overline{1, n}$. Тогда будут выполняться неравенства

$$\| x(t) \| \leqslant \| X(t, t_0) \| \, \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| X(t, \tau) \| \, \| f(\tau, x(\tau)) \| \, d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i > t_0} \| X(t, t_i) \| \, \| I_i^*(x(t_i)) \| \leqslant k \left[\frac{t}{t_0}\right]^{\bar{\beta}} \| x_0 \| \, e^{(\bar{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t-t_0)} +$$

$$+ k \int_{t_0}^{t} \left[\frac{t}{\tau}\right]^{\bar{\beta}} e^{(\bar{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t-\tau)} b(t) \, \| x(\tau) \|^m \, d\tau + k \sum_{t_i > t_0} L_i \left[\frac{t}{t_i}\right]^{\bar{\beta}} \times$$

$$\times e^{(\bar{\alpha}+\varepsilon_1+p_i \ln\alpha)(t-t_i)} \, \| x(t_i) \|,$$

откуда

$$\left[\frac{t}{t_0}\right]^{-\bar\beta} e^{-(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(t-t_0)} \| x(t) \| \leqslant k \| x_0 \| +$$

$$+ k \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\tau}{t_0}\right]^{\bar\beta(m-1)} e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(\tau-t_0)} b(\tau) \left\{ \left[\frac{\tau}{t_0}\right]^{-\bar\beta} e^{-(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(\tau-t_0)} \| x(\tau) \| \right\}^m d\tau +$$

$$+ k \sum_{t_i>t_0} L_i \left[\frac{t_i}{t_0}\right]^{-\bar\beta} e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(t_i-t_0)} \| x(t_i) \|. \tag{23}$$

Применяя к последнему неравенству лемму 2, получаем оценку

$$\| x(t) \| \leqslant e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(t-t_0)} \left[\frac{t}{t_0}\right]^{\bar\beta} \prod_{t_i>t_0} (1+kL_i) \Big\{ 1-(m-1) \prod_{t_i>t_0} (1+kL_i)^{m-1} \times$$

$$\times [k \| x_0 \|]^{m-1} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\tau}{t_0}\right]^{\bar\beta(m-1)} e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(\tau-t_0)} b(\tau)\, d\tau \Big\}^{-\frac{1}{m-1}},$$

выполняющуюся для всех $t \geqslant t_0$, $t_i < t$ таких, что

$$\prod_{t_i>t_0} (1+kL_i)^{m-1} [k \| x_0 \|]^{m-1} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\tau}{t_0}\right]^{\bar\beta(m-1)} e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(\tau-t_0)} b(\tau)\, d\tau < 1.$$

Из условий теоремы, соотношения

$$\| x(t) \| \leqslant e^{(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)(t-t_0)} \left[\frac{t}{t_0}\right]^{\bar\beta} pk \| x_0 \| \times$$

$$\times \{ 1-(m-1)\, p\, [k \| x_0 \|]^{m-1} t_0^{\bar\beta(1-m)} l_1 e^{-(\bar\alpha+\varepsilon_1+p_i\ln\alpha)t_0} \}^{-\frac{1}{m-1}}$$

следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1).

Следствие. Предположим, что $b(t) = O(e^{\gamma t})$, $t \to \infty$ и выполнены условия 1) — 3), 5) теоремы 4. Тогда при

$$\bar\beta < 0,\ \bar\alpha + p_i \ln\alpha < 0,\ \gamma < -(\bar\alpha + p_i \ln\alpha),\ \prod_{t_i>t_0} (1+kL_i) < \infty \tag{24}$$

нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим систему, подвергающуюся импульсному воздействию на заданных поверхностях, т. е. исследуем систему (15). Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет оценке (17) при $m > 1$. Имеет место теорема.

Теорема 5. *Пусть в системе* (15) *функции* $f(t, x)$, $I_i^*(x)$, $t_i(x)$ *определены и непрерывны в области* Ω. *Система* (3) *вполне правильна. Имеют место соотношения*

$$\| I_i^*(x) - I_i^*(y) \| \leqslant L_i \| x-y \| \quad \forall x,\ y \in \Omega, \quad \left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \right\| \leqslant L,$$

$$\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant1} \left\langle \frac{\partial t_i(x+\sigma(B_i x + I_i^*(x)))}{\partial x},\ B_i x + I_i^*(x) \right\rangle \leqslant 0,$$

$$L < \frac{1}{\sup_{t\in J} \| A(t) \| H + l_2 H^m},$$

где $l_2 = \mathrm{const} > 0\,(b(t) < l_2)$, $L = \max_i L_i$. *Последовательность* $\{t_i\}$ *подчине-*

на условию (8). *Тогда, если имеют место неравенства* (22), *то тривиальное решение системы* (15) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство основывается на идее доказательства теоремы 6 из работы [3], а также на применении леммы 2.

Замечание 2. Когда $m < 1$, могут быть получены условия притяжения нулевого решения системы (15), причем это притяжение будет равномерным по x_0.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 224 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 11, с. 1981—1992.
4. *Самойленко А. М. Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием.— Там же, 1981, **17**, № 11, с. 1995—2002.
5. *Борисенко С. Д.* Исследование устойчивости и притяжимости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: Препринт 82.35.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— 35 с.
6. *Демидович Б. П.* Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем.— Мат. сб., 1965, **66**, № 3, с. 344—354.
7. *Bihari J.* A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations.— Acta math. Acad. Scient. Hung., 1956, **7**, N 1, p. 81—94.

Киевский
государственный университет

Поступила
в редакцию 21.02.82