УДК 519.21

А. В. Савченко (Ірпінь Київ. обл.)

ВИПРАВЛЕНА $T(q)$-ВІРОГІДНА ОЦІНКА В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЛІНІЙНІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

We study a generalized linear structural regression model with measurement errors. The dispersion parameter is assumed to be known. The corrected $T(q)$-likelihood estimator for the regression coefficients is constructed. In the case where q depends on the sample size and tends to 1 as the sample size infinitely increases, we establish a sufficient conditions of strong consistency and asymptotic normality of the estimator.

Изучается обобщенная линейная структурная модель регрессии с погрешностями измерения. Параметр рассеяния предполагается известным. Построена исправленная $T(q)$-правдоподобная оценка для коэффициентов регрессии. Получены достаточные условия строгой состоятельности и асимптотической нормальности оценки в случае, когда q зависит от объема выборки и стремится к 1 при неограниченном возрастании объема выборки.

1. Вступ. У статті вивчається загальна модель нелінійної регресії з похибками у змінних, де відгук має умовний розподіл спеціального вигляду відносно прихованої змінної. За невідомого розподілу прихованої змінної виправлена (Corrected Score, скорочено CS) оціночна процедура дає консистентну оцінку [1, 2]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку при малих і середніх обсягах вибірки. У роботах [3, 4] побудовано модифікацію CS оцінки, що стійкіша для малої й середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. У даній статті розвинено іншу ідею: модифікувати CS оцінку для малих і середніх обсягів вибірки.

$T(q)$-вірогідній оцінці за відсутності похибок у змінних присвячено низку статей. У роботах [5, 6] вивчаються властивості оцінки шляхом асимптотичного аналізу і комп'ютерних моделювань. Показано, що для малих і середніх обсягів вибірки вибором q можна змінювати зсув оцінки заради точності, що суттєво може зменшити середньо-квадратичне відхилення. Встановлено необхідну і достатню умову асимптотичної нормальності й ефективності оцінки, якщо q прямує до 1 та обсяг вибірки є великим.

Метою цієї статті є розгляд виправленої $T(q)$-вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання. У статті [7] наведено виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку у випадку показникової структурної моделі регресії з похибками вимірювання. У даній роботі ми розглядаємо значно ширший клас моделей, який включає, зокрема, лінійну, пуассонівську, гамма-модель. Параметр розсіяння вважаємо відомим. Для лінійної моделі з похибками вимірювання було проведено чисельне моделювання, результати якого тут не наводяться. Моделювання показало, що $T(q)$-вірогідна оцінка дозволяє надійно оцінити параметри регресії для малої вибірки за наявності аномальних спостережень у регресорі.

Позначимо через $\mathbf{E}$ математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, через $\mathbf{D}$ дисперсію, а через $\mathbf{Cov}$ коваріаційну матрицю. Математичне сподівання $\mathbf{E}_b f$ береться за умови, що b — істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування. В евклідовому просторі розглядається норма, що дорівнює сумі модулів координат.

Статтю побудовано таким чином. У пункті 2 описано загальну модель спостережень. У пункті 3 наведено виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку параметрів регресії. У пункті 4 доведено асимптотичну нормальність оцінки, а також наведено приклади конкретних моделей. Пункт 5 містить висновки.

2. Модель спостережень. Припустимо, що відгук y при фіксованому неспостережуваному випадковому регресорі η має умовну щільність розподілу відносно деякої σ-скінченної міри ν_Y на борельовій σ-алгебрі $B(R)$ в R:

$$f(y/\eta) = \exp\left(\frac{y\eta - C(\eta)}{\phi} + c(y,\phi)\right).$$

Тут функція $C(\cdot)$ є двічі неперервно диференційовною, заданою на деякому відкритому проміжку $I \subset R$, $C''(\eta) > 0$, $\eta \in I$. Параметр розсіяння $\phi > 0$ вважається відомим, $c(y,\phi)$ — борельова функція, що не залежить від η. Припустимо, що $\eta = r(\beta_0 + \beta_1\xi)$, де ξ — випадковий скалярний регресор з невідомим розподілом, причому $|\xi| \le \text{const}$ майже напевно (м. н.), $\beta = (\beta_0; \beta_1)^T$ — невипадковий вектор параметрів регресії, який потрібно оцінити. Це відповідає так званій *узагальненій лінійній моделі* регресії [8, с. 162]. Випадковість ξ означає, що розглядається структурна модель регресії. Замість ξ спостерігається сурогатна змінна $x = \xi + \delta$, де $\delta \sim N(0, \sigma_\delta^2)$, $\sigma_\delta^2 > 0$. Випадкова величина δ називається похибкою вимірювання і припускається незалежною від ξ та y. Вважаємо дисперсію похибки σ_δ^2 відомою.

Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i = (y_i, x_i)$, $i = \overline{1,n}$. Позначимо $f(y,\eta,\beta) = f(y/\eta)$. Далі ми будемо нехтувати аргументами функцій C' та C'': $C' = C'(r(\beta_0 + \beta_1\xi))$, $C'' = C''(r(\beta_0 + \beta_1\xi))$.

Справджуються формули $\mathbf{E}(y/\eta) = C'(\eta)$, $\mathbf{D}(y/\eta) = \phi C''(\eta)$ [8, с. 162].

Для $u > 0$, $q > 0$ введемо перетворення Бокса – Кокса

$$T(q,u) = \begin{cases} \dfrac{u^{1-q} - 1}{1-q}, & q \ne 1, \\ \ln u, & q = 1. \end{cases}$$

$T(q)$-вірогідну оціночну функцію визначено так:

$$S^{(q)}(y,\eta,\beta) = \phi \frac{\partial}{\partial\beta} T(q, f(y,\eta,\beta)) = \phi f^{-q} \frac{\partial f}{\partial\beta} = \phi f^{1-q}(y,\eta,\beta) \frac{\partial}{\partial\beta} \ln f(y,\eta,\beta) =$$

$$= f^{1-q}(y,\eta,\beta)(y - C')r'(\beta_0 + \beta_1\xi)(1;\xi)^T.$$

Для $q = 1$ функція $S^{(q)}$ збігається з оціночною функцією методу максимальної вірогідності.

За відсутності похибки вимірювання $S^{(q)}$ розглядалась у [5, 6]. Якщо параметр $q = q_n$ залежить від n та $\sqrt{n}\,(q_n - 1) \to 0$ при $n \to \infty$, то $T(q)$-вірогідна оціночна функція дає консистентну оцінку β з тією ж ефективністю, що й оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю

$$\widehat{\beta}_n = \arg\max_{\beta\in\Theta} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f(y_i, \xi_i, \beta)\right),$$

де параметрична множина $\Theta \subset R^2$.

3. Виправлена $T(q)$-вірогідна оцінка та її консистентність. Розкладемо оціночну функцію $S^{(q)}(y, \eta, \beta)$ в ряд за степенями $(1-q)$:

$$S^{(q)}(y, \eta, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n (\ln f)^n}{n!} (y - C') r'(\beta_0 + \beta_1 \xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n}{n!\,\phi^n} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_i \ge 0, i=1,2,3}} (y - C'(\eta))\,(y\eta)^{n_1}\, (-1)^{n_2} C^{n_2}(\eta) \times$$

$$\times\, (\phi c(y,\phi))^{n_3}\, C_n^{n_1,n_2,n_3} r'(\beta_0 + \beta_1 \xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Нижче будуть накладені умови, що гарантують збіжність цього степеневого ряду.

Нехай $\beta = (\beta_0; \beta_1)^T \in \Theta$, b є істинним значенням β, Θ — компактна множина в R^2.

Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$ так, що для всіх β з Θ виконується м. н.

$$\mathbf{E}_b\left(S_C^{(q)}(y, x, \beta) / y, \xi\right) = S^{(q)}(y, \eta, \beta). \tag{3.1}$$

Ця задача зводиться до розв'язання базових рівнянь

$$\mathbf{E}\left(f_{k,l}^{(q)}(x, \beta) / \xi\right) = \eta^k C^l(\eta)\, r'(\beta_0 + \beta_1 \xi)\,(1; \xi)^T, \qquad k \ge 0, \quad l \ge 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{E}\left(g_{k,l}^{(q)}(x, \beta) / \xi\right) = \eta^k C^l(\eta) C'(\eta)\, r'(\beta_0 + \beta_1 \xi)\,(1; \xi)^T, \qquad k \ge 0, \quad l \ge 0. \tag{3.3}$$

Розв'язання рівнянь (3.2) та $\mathbf{E}\left(h_{k,l}^{(q)}(x, \beta) / \xi\right) = \eta^k C^l(\eta)$ еквівалентне розв'язуванню рівнянь (3.2) та (3.3), тому що перетвореннями отримаємо

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial h_{k,l}^{(q)}(x,\beta)}{\partial\beta}\bigg/\xi\right) = \left(k\eta^{k-1}C^{l}(\eta)+\eta^{k}l\,C^{l-1}(\eta)\,C'(\eta)\right)r'(\beta_0+\beta_1\xi)\,(1;\xi)^{T},$$

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial h_{k,l}^{(q)}(x,\beta)}{\partial\beta} - kf_{k-1,l}^{(q)}(x,\beta)\bigg/\xi\right) = l\eta^{k}C^{l-1}(\eta)\,C'(\eta)\,r'(\beta_0+\beta_1\xi)\,(1;\xi)^{T}.$$

Нехай кожне з рівнянь (3.2) та (3.3) має розв'язок, тоді розв'язок рівняння (3.1) зображується у вигляді

$$S_C^{(q)}(y,x,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q)^n}{n!}\frac{1}{\phi^n}\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_i\ge 0,\, i=1,2,3}} y^{n_1+1}f_{n_1,n_2}^{(q)}(x,\beta)(-1)^{n_2}\left(\phi c(y,\phi)\right)^{n_3}C_n^{n_1,n_2,n_3} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q)^n}{n!}\frac{1}{\phi^n}\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_i\ge 0,\, i=1,2,3}} y^{n_1}g_{n_1,n_2}^{(q)}(x,\beta)(-1)^{n_2+1}\left(\phi c(y,\phi)\right)^{n_3}C_n^{n_1,n_2,n_3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}u_n(y,x;\beta,q)+\sum_{n=0}^{\infty}v_n(y,x;\beta,q) \tag{3.4}$$

за умови $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\|u_n\|/y,\xi\right)<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\|v_n\|/y,\xi\right)<\infty$.

Виправлена $T(q)$-вірогідна оцінка $\widehat{\beta}_n(q)$ визначається як вимірний розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}S_C^{(q)}(y_i,x_i,\beta) = 0, \quad \beta\in\Theta. \tag{3.5}$$

Якщо розв'язок рівняння (3.5) не існує, то покладемо $\widehat{\beta}_n(q)=0$.

Означення 3.1. *Для послідовності випадкових величин* $\{U_n : n\ge 1\}$ *послідовність тверджень* $A_n(U_n)$ *виконується зрештою, якщо існує випадкова подія* Ω_0, $\mathrm{P}(\Omega_0)=1$, *така, що* $\forall\omega\in\Omega_0$ $\exists N=N(\omega)$ $\forall n\ge N$: $A_n\left(U_n(\omega)\right)$ *виконується.*

Нехай

$$\begin{pmatrix} h_1(x,\beta)\\ h_2(x,\beta)\end{pmatrix} = h(x,\beta) = f_{0,0}^{(1)}(x,\beta), \qquad \begin{pmatrix} z_1(x,\beta)\\ z_2(x,\beta)\end{pmatrix} = z(x,\beta) = g_{0,0}^{(1)}(x,\beta)$$

— розв'язки рівнянь (3.2) та (3.3) при $k=l=0$,

$$\begin{pmatrix} S_1(y_i,x_i,\beta,q_n)\\ S_2(y_i,x_i,\beta,q_n)\end{pmatrix} = S_C(y_i,x_i,\beta,q_n) := S_C^{(q_n)}(y_i,x_i,\beta),$$

$$S_C^{(1)}(y,x,\beta) = yh(x,\beta) - z(x,\beta), \qquad S_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i, x_i, \beta, 1),$$

$$\Phi_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q_n) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right), \tag{3.6}$$

$$L^2\left(\Omega, \mathrm{P}; u_1\right) = \left\{u \text{ — випадкова величина на } \Omega: \mathbf{E}u^2 u_1 < \infty\right\},$$

де $u_1 = C''\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\left(r'(b_0 + b_1\xi)\right)^2 \geq 0$ м. н.

Знайдемо

$$\mathbf{E}_b yh(x,\beta) = \mathbf{E}\mathbf{E}_b\left(yh(x,\beta)/x,\xi\right) = \mathbf{E}h(x,\beta)\,\mathbf{E}_b\left(y/\xi\right) = \mathbf{E}h(x,\beta)C'\left(r(b_0 + b_1\xi)\right) =$$

$$= \mathbf{E}\mathbf{E}\left(h(x,\beta)C'\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)/\xi\right) = \mathbf{E}C'\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\mathbf{E}\left(h(x,\beta)/\xi\right) =$$

$$= \mathbf{E}C'\left(r(b_0 + b_1\xi)\right) r'(\beta_0 + \beta_1\xi)\,(1;\xi)^T.$$

Лема 3.1 [11, с. 161]**.** *Нехай* $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ *— імовірнісний простір,* Θ *— компактна підмножина* R^m. *Спостерігаються незалежні однаково розподілені в* R^k *випадкові вектори* Z_i, $i = \overline{1,n}$, *розподіл яких залежить від* $\beta \in \Theta$. *Для заданої борельової функції* q: $\Theta \times R^k \to R^m$ *розглянемо* $S_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(\beta, Z_i)$, $\beta \in \Theta$. *Нехай істинне значення параметра* β *дорівнює* b, *причому* b *є внутрішньою точкою* Θ. *Нехай виконуються такі умови*:

1) $q(\cdot, Z) \in C^1(\Theta)$ *м. н.*; $\mathbf{E}_b\|q(\beta, Z)\| < \infty$, $\beta \in \Theta$;

2) *функція* $S_\infty(\beta, b) := \mathbf{E}_b q(\beta, Z)$ *неперервна по* β *на* Θ;

3) $\mathbf{E}_b \left\| \dfrac{\partial q(\beta, Z)}{\partial \beta^T} \right\| < \infty$, $\beta \in \Theta$;

4) $V := \left.\dfrac{\partial S_\infty(\beta, b)}{\partial \beta^T}\right|_{\beta = b}$ *— невироджена матриця*; (3.7)

5) $S_\infty(\beta, b) = 0$, $\beta \in \Theta$, *тоді і тільки тоді, коли* $\beta = b$.

Нехай випадкові вектор-функції $\Phi_n(\beta) = \Phi_n(\beta, \omega)$, $n \geq 1$, *із значеннями в* R^m *задовольняють умови*:

6) *для всіх* $\beta \in \Theta$: $\Phi_n(\beta) \to 0$ *м. н. при* $n \to \infty$, $\Phi_n(\cdot) \in C^1(\Theta)$ *м. н.*;

7) $\sup_{n \geq 1} \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \dfrac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T} \right\| < \infty$ *м. н.*

Тоді справджуються такі твердження:

а) *зрештою існує розв'язок оціночного рівняння* $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0$, $\beta\in\Theta$;

б) *оцінка* $\widehat{\beta}_n$ *параметра* β, *для якої зрештою виконується* $S_n\left(\widehat{\beta}_n\right)+\Phi_n\left(\widehat{\beta}_n\right)=0$, *є строго консистентною*.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються такі умови*:

1) *показник* q *залежить від обсягу вибірки*, $q=q_n$, *причому* $0<q_n\le 1$, $n\ge 1$, *та* $q_n\to 1$ *при* $n\to\infty$;

2) *параметрична множина* Θ *є компактною в* R^2, *а істинне значення* b *параметра* β *є внутрішньою точкою* Θ;

3) $h_i(x,\cdot)\in C^1(\Theta)$, $z_i(x,\cdot)\in C^1(\Theta)$ *м. н. та при кожному* $\beta\in\Theta$: $\mathbf{E}_b|yh_i(x,\beta)|<\infty$, $\mathbf{E}\,|z_i(x,\beta)|<\infty$, $i=1,2$ (*тут і далі неперервна диференційовність функцій на* Θ *означає*, *що функції визначені в деякому околі* Θ *і неперервно диференційовні*);

4) $\mathbf{E}_b\sup_{\beta\in\Theta}\left|y\dfrac{\partial h_i(x,\beta)}{\partial\beta_j}\right|<\infty$, $\mathbf{E}\sup_{\beta\in\Theta}\left|\dfrac{\partial z_i(x,\beta)}{\partial\beta_j}\right|<\infty$, $i=1,\,2$, $j=0,\,1$;

5) $r(\beta_0+\beta_1\xi)$ *не є сталою на множині* P*-міри* 1, *а* ξ *не є сталою на множині додатної міри* P;

6) *радіус збіжності наступних степеневих рядів відносно* λ *є додатним*:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\phi^{m+1}m!}\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m+1\\ m_i\ge 0,\ i=1,2,3}}C_m^{m_1,m_2,m_3}\phi^{m_3}\mathbf{E}_b\sup_{0\le\lambda\le\tilde{\delta},\,\beta\in\Theta}\left\|f^{(q)}_{m_1,m_2}(x,\beta)\right\||c(y,\phi)|^{m_3}\,|y|^{m_1+1},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\phi^{m+1}m!}\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m+1\\ m_i\ge 0,\,i=1,2,3}}C_m^{m_1,m_2,m_3}\phi^{m_3}\mathbf{E}_b\sup_{0\le\lambda\le\tilde{\delta},\,\beta\in\Theta}\left\|g^{(q)}_{m_1,m_2}(x,\beta)\right\||c(y,\phi)|^{m_3}\,|y|^{m_1},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\phi^{m}m\,!}\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m\\ m_i\ge 0,\,i=1,2,3}}C_m^{m_1,m_2,m_3}\phi^{m_3}\mathbf{E}_b\sup_{0\le\lambda\le\tilde{\delta},\,\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta}f^{(q)}_{m_1,m_2}(x,\beta)\right\||c(y,\phi)|^{m_3}\,|y|^{m_1+1},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\phi^{m}m\,!}\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m\\ m_i\ge 0,\,i=1,2,3}}C_m^{m_1,m_2,m_3}\phi^{m_3}\mathbf{E}_b\sup_{0\le\lambda\le\tilde{\delta},\,\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta}g^{(q)}_{m_1,m_2}(x,\beta)\right\||c(y,\phi)|^{m_3}\,|y|^{m_1},$$

де $\tilde{\delta}$ — *деяке фіксоване число з проміжку* $(0,1)$.

Тоді зрештою рівняння (3.5) *має розв'язок*.

Визначимо оцінку $\widehat{\beta}_n(q_n)$ як розв'язок рівняння (3.5), якщо такий розв'язок існує; в протилежному випадку покладемо $\widehat{\beta}_n(q_n)=0$.

Теорема 3.2. *За умов теореми* 3.1 *оцінка* $\widehat{\beta}_n(q_n)$ *є строго консистентною*, *тобто* $\widehat{\beta}_n(q_n)\to b$ *з імовірністю* 1 *при* $n\to\infty$, *де* b — *істинне значення* β.

***Доведення теорем* 3.1 *та* 3.2.** Перевіримо умови леми 3.1. Маємо оціночне рівняння (3.5), в якому $q = q_n \to 1$ при $n \to \infty$. Запишемо це рівняння у вигляді $S_n(\beta) + \Phi_n(\beta) = 0$, $\beta \in \Theta$. Позначимо

$$q(\beta, y, x) := S_C^{(1)}(y, x, \beta) = \begin{pmatrix} yh_1(x,\beta) - z_1(x,\beta) \\ yh_2(x,\beta) - z_2(x,\beta) \end{pmatrix}.$$

Маємо $q(\cdot, y, x) \in C^1(\Theta)$ м. н. та для всіх $\beta \in \Theta$

$$\mathbf{E}_b \|q(\beta, y, x)\| \le \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_b |yh_1(x,\beta)| / x, \xi\right) +$$

$$+ \mathbf{E}\left(\mathbf{E}|z_1(x,\beta)| / \xi\right) + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_b |yh_2(x,\beta)| / \xi\right) + \mathbf{E}\left(|z_2(x,\beta)| / \xi\right) < \infty.$$

Враховуючи умови 2, 3 теореми 3.1, переконуємося, що умову 1 леми 3.1 виконано.

Далі, гранична оціночна функція

$$S_\infty(\beta, b) := \mathbf{E}_b q(\beta, y, x) = \mathbf{E}\mathbf{E}_b \begin{pmatrix} yh_1(x,\beta) - z_1(x,\beta) \\ yh_2(x,\beta) - z_2(x,\beta) \end{pmatrix} \Big/ \xi =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{E}r'(\beta_0 + \beta_1\xi)\left(C'(r(b_0 + b_1\xi)) - C'(r(\beta_0 + \beta_1\xi))\right) \\ \mathbf{E}\xi r'(\beta_0 + \beta_1\xi)\left(C'(r(b_0 + b_1\xi)) - C'(r(\beta_0 + \beta_1\xi))\right) \end{pmatrix}$$

неперервна по β на Θ, тому умову 2 леми 3.1 виконано.

Маємо

$$\mathbf{E}_b \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial q(\beta, y, x)}{\partial \beta^T} \right\| =$$

$$= \mathbf{E}_b \sup_{\beta \in \Theta} \left(\left| \frac{\partial}{\partial \beta_0}\left(yh_1(x,\beta) - z_1(x,\beta)\right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left(yh_1(x,\beta) - z_1(x,\beta)\right) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| y\frac{\partial h_2(x,\beta)}{\partial \beta_0} - \frac{\partial z_2(x,\beta)}{\partial \beta_0} \right| + \left| y\frac{\partial h_2(x,\beta)}{\partial \beta_1} - \frac{\partial z_2(x,\beta)}{\partial \beta_1} \right| \right) < \infty.$$

Тут використано умову 4 теореми 3.1, і тому умова 3 леми 3.1 виконується.

Далі, згідно з (3.7)

$$-V = -\frac{\partial S_\infty}{\partial \beta^T}(b, b) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}u_1 & \mathbf{E}\xi u_1 \\ \mathbf{E}\xi u_1 & \mathbf{E}\xi^2 u_1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{E} S_C^{(1)}}{\partial \beta^T},$$

де $u_1 = C'' \cdot (r')^2$, функція C'' розглядається з аргументом $r(b_0 + b_1\xi)$, функція r — з аргументом $b_0 + b_1\xi$. Згідно з постановкою задачі $C'' > 0$ і умовою 5 теореми 3.1 $r(\beta_0 + \beta_1\xi)$ не є сталою на множині P-міри 1, тому $\mathbf{E}u_1 > 0$. З нерівності Коші випливає, що $\left(\mathbf{E}\xi\sqrt{u_1}\sqrt{u_1}\right)^2 \le \mathbf{E}\xi^2 u_1\, \mathbf{E}u_1$, звідки

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{E}u_1 & \mathbf{E}\xi u_1 \\ \mathbf{E}\xi u_1 & \mathbf{E}\xi^2 u_1 \end{pmatrix} \ge 0 .$$

Тут насправді виконується строга нерівність, бо $\left(\xi\sqrt{u_1}\right)\Big/\sqrt{u_1} = \xi$ не є сталою величиною внаслідок умови 5 теореми 3.1. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, отримуємо, що матриця $-V$, визначена згідно з (3.7), є додатно визначеною, V — від'ємно визначеною і невиродженою, тому умову 4 леми 3.1 виконано.

Якщо $\beta = b$, то $S_\infty(b, b) = 0$. Для перевірки умови 5 леми 3.1 припустимо, що існує таке $\beta \ne b$, що $S_\infty(\beta, b) = 0$, і позначимо $f(\beta) = S_\infty(\beta, b)$, $g(t) = \left(f(tb + (1-t)\beta), b - \beta\right)$. Тоді за припущенням $g(0) = g(1) = 0$. За теоремою Ролля існує таке $\tau \in (0,1)$, що $g'(\tau) = 0$ і

$$(b - \beta)^T \left(\left.\frac{\partial S_\infty(\beta, b)}{\partial \beta^T}\right|_{\beta=\bar\beta} \right)(b - \beta) = 0, \tag{3.8}$$

де точка $\bar\beta$ розташована на відрізку з кінцями b та β. Аналогічно, як і при перевірці умови 4 леми 3.1, приходимо до висновку, що матриця $\left(\left.\frac{\partial S_\infty(\beta, b)}{\partial \beta^T}\right|_{\beta=\bar\beta} \right)$ є від'ємно визначеною для всіх $b \in \Theta$. Отримали суперечність з рівністю (3.8). Таким чином, рівняння $S_\infty(\beta, b) = 0$ має єдиний розв'язок на Θ. Крім того, $S_\infty(\beta, b) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\beta = b$.

Перевіримо умову 6 леми 3.1. Щоб обґрунтувати збіжність

$$\sup_{\beta\in\Theta} \|\Phi_n(\beta)\| \to 0 \quad \text{з імовірністю } 1,$$

оцінимо

$$\|\Phi_n(\beta)\| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|S_C(y_i, x_i, \beta, q_n) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1)\| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2} \sup_{q_n \le \gamma_n \le 1,\, \beta\in\Theta} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \beta, \gamma_n)}{\partial q} \right| |q_n - 1| .$$

Нехай n_0 — такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1 - \tilde\delta$, де $\tilde\delta \in (0,1)$ виберемо пізніше. Для збіжності

$$|q_n - 1| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sup_{q_n \le \gamma_n \le 1,\, \beta \in \Theta} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \beta, \gamma_n)}{\partial q} \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

використаємо посилений закон великих чисел та умову 1 теореми 3.1. Потрібно, щоб для кожного $k = 1, 2$

$$\exists \tilde{\delta} > 0: \ \mathbf{E}_b \sup_{1-\tilde{\delta} \le \gamma \le 1,\, \beta \in \Theta} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \beta, \gamma)}{\partial q} \right| < \infty.$$

Оцінимо $x \le |x| \le |\xi| + |\delta|$, $|\beta_0| \le C_0$, $|\beta_1| \le C_1$. Враховуючи зображення (3.4), приходимо до умови 6 теореми 3.1.

Перевіримо умову 7 леми 3.1. Нехай n_0 — такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1 - \tilde{\delta}$, де $\tilde{\delta}$ вибирається так, що задовольняє умову 6 леми 3.1. Нагадаємо, що $\Phi_n(\beta)$ задається формулою (3.6). Маємо

$$\sup_{n \ge 1} \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T} \right\| \le$$

$$\le \sup_{n \ge n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\beta \in \Theta,\, 1-\tilde{\delta} \le q \le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right) \right\| + \sup_{n < n_0} \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T} \right\|.$$

Доданок $\sup_{n < n_0} \sup_{\beta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T} \right\|$ є скінченним м. н. Із збіжності за посиленим законом великих чисел (використовуємо умови 4, 6 теореми 3.1, щоб забезпечити скінченність математичного сподівання від супремума)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\beta \in \Theta,\, 1-\tilde{\delta} \le q \le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right) \right\| \to$$

$$\to \mathbf{E} \sup_{\beta \in \Theta,\, 1-\tilde{\delta} \le q \le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right) \right\|, \quad n \to \infty \quad \text{м. н.}$$

випливає обмеженість м. н. послідовності

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\beta \in \Theta,\, 1-\tilde{\delta} \le q \le 1} \left\| \frac{\partial}{\partial \beta^T} \left(S_C(y_i, x_i, \beta, q) - S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right) \right\| : \ n \ge 1 \right\}.$$

Отже, всі умови леми 3.1 виконано, а отже, теореми 3.1 та 3.2 доведено.

4. Приклади моделей та асимптотична нормальність оцінки. Умови теорем 3.1 і 3.2 виконуються, зокрема, у показниковій структурній моделі з похибками вимірювання, для якої

$$f(y/\eta) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1\xi - e^{\beta_0+\beta_1\xi}y\right), \qquad \eta = -e^{\beta_0+\beta_1\xi},$$

$$y \geq 0, \qquad \phi = 1, \qquad C(\eta) = -\ln(-\eta) = -\beta_0 - \beta_1\xi, \qquad r(x) = -e^x, \qquad c(y,\phi) = 0,$$

$$u_1 = C''\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\left(r'(b_0 + b_1\xi)\right)^2 = 1, \qquad h_1(x,\beta) = -\exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right),$$

$$h_2(x,\beta) = -\left(x - \beta_1\sigma_\delta^2\right)\exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right), \qquad z_1(x,\beta) = -1, \qquad z_2(x,\beta) = -x.$$

Цей випадок розглянуто у [7].

Іншим прикладом є пуассонівська модель [8, с. 162], яка теж є узагальненою лінійною моделлю з функціями

$$\eta = \beta_0 + \beta_1\xi, \qquad \phi = 1, \qquad C(\eta) = e^\eta, \qquad r(x) = x, \qquad c(y,\phi) = -\ln(y!),$$

$$u_1 = C''\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\left(r'(b_0 + b_1\xi)\right)^2 = e^{b_0+b_1\xi}, \qquad h_1(x,\beta) = 1, \qquad h_2(x,\beta) = x,$$

$$z_1(x,\beta) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right), \qquad z_2(x,\beta) = \left(x - \beta_1\sigma_\delta^2\right)\exp\left(\beta_0 + \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$$

Цей випадок розглянуто у [10].

Лінійна структурна модель з похибками вимірювання має вигляд

$$y = \beta_0 + \beta_1\xi + \varepsilon, \qquad x = \xi + \delta,$$

де змінна ε не залежить від ξ та δ і має нормальний розподіл $\varepsilon \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, дисперсії σ_ε^2 та σ_δ^2 вважаємо відомими. Ця модель є частковим випадком узагальненої лінійної моделі з функціями

$$f(y/\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}}\exp\left(\frac{y\eta - C(\eta)}{\phi} + c(y,\phi)\right),$$

$$\eta = \beta_0 + \beta_1\xi, \qquad C(\eta) = \frac{\eta^2}{2}, \qquad r(x) = x, \qquad \phi = \sigma_\varepsilon^2,$$

$$c(y,\phi) = -\frac{y^2}{2\phi}, \qquad u_1 = C''\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\left(r'(b_0 + b_1\xi)\right)^2 = 1,$$

$$h_1(x,\beta) = 1, \qquad h_2(x,\beta) = x, \qquad z_1 = \beta_0 + \beta_1 x, \qquad z_2 = \beta_0 x + \beta_1 x^2 - \beta_1\sigma_\delta^2.$$

Рівняння (3.2) і (3.3) набирають вигляду

$$\mathbf{E}\left(f_{k,l}^{(q)}(x,\beta) \big/ \xi \right) = (\beta_0 + \beta_1 \xi)^k \frac{1}{2^l} (\beta_0 + \beta_1 \xi)^{2l} (1; \xi)^T ,$$

$$\mathbf{E}\left(g_{k,l}^{(q)}(x,\beta) \big/ \xi \right) = (\beta_0 + \beta_1 \xi)^k \frac{1}{2^l} (\beta_0 + \beta_1 \xi)^{2l} (\beta_0 + \beta_1 \xi) (1; \xi)^T ,$$

звідки знаходимо функції $f_{k+1,l}^{(q)}(x,\beta) = g_{k,l}^{(q)}(x,\beta)$. Маємо

$$\mathbf{E}\left(f_{k,l}^{(q)}(x,\beta) \big/ \xi \right) = \frac{1}{2^l} \sum_{i=0}^{k+2l} C_{k+2l}^i \beta_0^{k+2l-i} (\beta_1 \xi)^i (1; \xi)^T .$$

Відомо, що розв'язком рівняння

$$\mathbf{E}\left(t_j(\xi + \delta) / \xi \right) = \xi^j , \quad j \geq 0 ,$$

є функція

$$t_j(x) = H_j\left(\frac{x}{\sigma_\delta} \right) \sigma_\delta^j ,$$

$$H_j(z) = (-1)^j \exp\left(\frac{z^2}{2} \right) \left(\exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) \right)^{(j)}$$

— многочлен Ерміта [9, с. 169]. Тоді вектор-функція

$$f_{k,l}^{(q)}(x,\beta) = \frac{1}{2^l} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k+2l} C_{k+2l}^i \beta_0^{k+2l-i} \beta_1^i \sigma_\delta^i H_i\left(\frac{x}{\sigma_\delta} \right) \\ \sum_{i=0}^{k+2l} C_{k+2l}^i \beta_0^{k+2l-i} \beta_1^i \sigma_\delta^{i+1} H_{i+1}\left(\frac{x}{\sigma_\delta} \right) \end{pmatrix}$$

складається з многочленів степеня $k + 2l$ та $k + 2l + 1$ відповідно. Диференціюванням $\mathbf{E}\left(y^{n-1} / \eta \right)$ по η знаходимо $\mathbf{E}\left(y^n / \eta \right)$ і методом математичної індукції доводимо, що це буде поліном n-го степеня відносно ξ. Для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} u_n$, щоб забезпечити додатний радіус збіжності, вимагаємо виконання умови $|u_n| \leq C^n \cdot n!$. Теорему 3.1 для лінійної моделі переформулюємо таким чином.

Теорема 4.1. *Нехай у лінійній структурній моделі з похибками вимірювання виконуються такі умови*:

1) *показник* q *залежить від обсягу вибірки*, $q = q_n$, *причому* $0 < q_n \leq 1$, $n \geq 1$, *та*

$q_n \to 1$ при $n \to \infty$;

2) *параметрична множина Θ є компактною в R^2, а істинне значення b параметра β є внутрішньою точкою Θ;*

3) *існує $K > 0$ таке, що $|\xi| \le K$ м. н., де K — невідома стала*; *крім того, ξ не є сталою*;

4) $\beta_1 \ne 0$.

Тоді зрештою рівняння (3.5) *має розв'язок*.

У гамма-моделі

$$f\left(y/\eta\right) = \frac{1}{\Gamma(p)}\left(\frac{p}{\omega}\right)^{p} y^{p-1}\exp\left(-\frac{yp}{\omega}\right), \quad y > 0, \qquad \omega = \exp\left(\beta_0 + \beta_1\xi\right),$$

значення $p > 0$ вважаємо відомим, $x = \xi + \delta$. Гамма-модель є узагальненою лінійною моделлю з функціями

$$\eta = -\omega^{-1}, \qquad C(\eta) = -\ln(-\eta) = \ln\omega,$$

$$r(x) = -e^{-x}, \qquad \phi = \frac{1}{p}, \qquad c(y,\phi) = \frac{1}{\phi}\ln\left(\frac{y}{\phi}\right) - \ln\left(y\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)\right),$$

$$u_1 = C''\left(r(b_0 + b_1\xi)\right)\left(r'\left(b_0 + b_1\xi\right)\right)^2 = 1, \qquad h_1(x,\beta) = \exp\left(-\beta_0 - \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right),$$

$$h_2(x,\beta) = \left(x + \beta_1\sigma_\delta^2\right)\exp\left(-\beta_0 - \beta_1 x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right), \qquad z_1(x,\beta) = 1, \qquad z_2(x,\beta) = x.$$

Рівняння (3.2) і (3.3) набирають вигляду

$$\mathbf{E}\left(f_{k,l}^{(q)}(x,\beta)/\xi\right) = (-1)^k e^{-(k+1)(\beta_0+\beta_1\xi)}\left(\beta_0 + \beta_1\xi\right)^l (1;\xi)^T,$$

$$\mathbf{E}\left(g_{k,l}^{(q)}(x,\beta)/\xi\right) = (-1)^k e^{-k(\beta_0+\beta_1\xi)}\left(\beta_0 + \beta_1\xi\right)^l (1;\xi)^T.$$

Розглянемо функцію $f_{k,l}^{(q)}(x,\beta) = (-1)^k e^{-(k+1)(\beta_0+\beta_1 x)}P_{l+1}(x)$, де $P_{l+1}(x)$ — многочлен степеня $l+1$. Підставляючи це зображення у щойно згадане рівняння та прирівнюючи коефіцієнти при степенях ξ в лівій і правій частинах, отримуємо невідомі коефіцієнти у многочлені $P_{l+1}(x)$. Аналогічно знаходимо $g_{k,l}^{(q)}(x,\beta)$. Без жодних змін теорема 4.1 переноситься на випадок гамма-моделі.

Означення 4.1. *Послідовність випадкових величин $\{\xi_n : n \ge 1\}$ на одному ймовірнісному просторі називається стохастично обмеженою, якщо* $\sup_{n\ge1} \mathrm{P}\{|\xi_n| > C\} \to 0$,

$C \to +\infty$, *і позначається* $\xi_n = O_p(1)$. *Позначимо* $\eta_n = o_p(1)$, *якщо* $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, $n \to \infty$.

***Зауваження* 4.1**. Умова $\xi_n = O_p(1)$ рівносильна такій:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathrm{P}\{|\xi_n| > C\} \to 0, \quad C \to +\infty.$$

Сформулюємо допоміжні твердження, що використовуються у доведенні теореми 4.2.

Лема 4.1. *Якщо послідовність випадкових векторів збігається за розподілом, то вона стохастично обмежена.*

Лема 4.2. *Має місце* $O_p(1)\, o_p(1) = o_p(1)$.

Лема 4.3 (лема Слуцького [12, с. 334])**.** *Нехай* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, $n \to \infty$. *Тоді* $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi$, $n \to \infty$.

Лема 4.4. *Нехай* $\{\xi_n, \eta_n, n \ge 1\}$ — *послідовності випадкових величин, такі, що* $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$, $n \to \infty$, $\xi_n \ge 0$ *м. н.*, $\xi_n \eta_n \le z_n$ *м. н.*, $z_n = O_p(1)$. *Тоді має місце* $\xi_n = O_p(1)$.

Лема 4.5 (наслідок леми Слуцького)**.** *Нехай* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$, $n \to \infty$. *Тоді* $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} a\xi$, $n \to \infty$.

Теорема 4.2 (про асимптотичну нормальність)**.** *Нехай виконуються умови теореми* 3.1 *та додатково виконуються такі умови*:

1) $\sqrt{n}(1 - q_n) \to 0$, $n \to \infty$;

2) $\mathbf{E}_b \sup_{\beta\in\Theta} \left| y \dfrac{\partial^2 h_i(x,\beta)}{\partial\beta_j\, \partial\beta_k} \right| < \infty$, $\mathbf{E} \sup_{\beta\in\Theta} \left| \dfrac{\partial^2 z_i(x,\beta)}{\partial\beta_j\, \partial\beta_k} \right| < \infty$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$;

3) $\mathbf{E}\,\|z(x,\beta)\|^2 < \infty$, $\mathbf{E}\,\|h(x,\beta)\|^2 < \infty$.

Тоді $\sqrt{n}\left(\widehat{\beta}_n(q_n) - b\right) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$, *де* b *є істинним значенням* β,

$$\Sigma = V^{-1} B V^{-1}, \qquad V = -\begin{pmatrix} \mathbf{E}u_1 & \mathbf{E}\xi u_1 \\ \mathbf{E}\xi u_1 & \mathbf{E}\xi^2 u_1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = C'' \cdot (r')^2, \qquad B = \mathbf{Cov}_b\, S_C^{(1)}(y, x, b).$$

Функція C *та її похідні розглядаються з аргументом* $r(b_0 + b_1\xi)$, r' *розглядається з аргументом* $b_0 + b_1\xi$, $b = (b_0; b_1)^T$.

***Зауваження* 4.2.** Асимптотична коваріаційна матриця оцінки $\widehat{\beta}_n(q_n)$ збігається з асимптотичною коваріаційною матрицею оцінки, побудованої методом виправленої оціночної функції при $q = 1$.

***Доведення теореми* 4.2.** Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, q_n) = 0, \tag{4.1}$$

де $q_n \to 1$ при $n \to \infty$ (ця рівність виконується зрештою), оціночну функцію S_C введено перед формулюванням теореми 3.1. Помноживши на $\sqrt{n}$, запишемо рівність (4.1) у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} S_C\left(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, 1\right) + \sqrt{n}\Phi_n\left(\widehat{\beta}_n\right) = 0 .$$

Згідно з теоремою 3.2 $\widehat{\beta}_n \to b$ м. н. Оскільки b — внутрішня точка Θ, то $\widehat{\beta}_n$ зрештою стає також внутрішньою точкою Θ. Врахувавши $\mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1) = 0$, розкладемо $S_C\left(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, 1\right)$ у ряд Тейлора за третім аргументом в околі b, тоді

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, b, 1) - \mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1)\right) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y_i, x_i, b, 1) \sqrt{n} \left(\widehat{\beta}_n - b\right) + \sqrt{n}\Phi_n\left(\widehat{\beta}_n\right) + \sqrt{n}\,\mathrm{rest} = 0 , \tag{4.2}$$

де $\mathrm{rest} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i$, R_i — залишок розкладу $S_C\left(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, 1\right)$ у ряд Тейлора за третім аргументом в околі b. За центральною граничною теоремою

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, b, 1) - \mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1)\right) \xrightarrow{d} N(0, B) \tag{4.3}$$

при $n \to \infty$, де $B = \mathbf{Cov}_b\left(S_C(y, x, b, 1)\right)$. Згідно з (4.3) та лемою 4.1 послідовність

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, b, 1) - \mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1)\right) = O_p(1).$$

За посиленим законом великих чисел з імовірністю 1

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y_i, x_i, b, 1) \to \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y, x, b, 1) := -V$$

— невироджена матриця, як доведено в теоремі 3.1. Для матриць будемо використовувати норму $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{2} \left| a_{ij} \right|$.

Далі встановимо, що

$$\sqrt{n}\,\mathrm{rest} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{4.4}$$

Зафіксуємо $\Delta > 0$ так, що $\left\{ \beta : \|\beta - \beta_0\| \le \Delta \right\} \subset \Theta$. Тоді м. н. при всіх $n \ge n_\Delta(\omega)$ виконується $\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| \le \Delta$. При $n \ge n_\Delta(\omega)$ маємо

$$\sqrt{n}\,\|\mathrm{rest}\| \le \frac{1}{n} \sup_{\|\beta-b\|\le\Delta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right\| \sqrt{n}\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| \left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\|\beta-b\|\le\Delta} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} S_C(y_i, x_i, \beta, 1) \right\| \sqrt{n}\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| \left\|\widehat{\beta}_n - b\right\|.$$

Врахуємо стохастичну обмеженість $\sqrt{n}\left(\widehat{\beta}_n - b\right)$, яку доведемо пізніше, та консистентність оцінки $\widehat{\beta}_n$. Тоді з нерівності $\sqrt{n}\,\|\mathrm{rest}\| \le \sqrt{n}\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| o_P(1)$ та леми 4.2 отримаємо $\sqrt{n}\|\mathrm{rest}\| = o_P(1)$. Використаємо посилений закон великих чисел. Згідно з умовою 2 теореми 4.2 виконується

$$\mathbf{E}_b \sup_{\|\beta-b\|\le\Delta} \left\| \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} S_C(y, x, \beta, 1) \right\| < \infty .$$

Множина $\left\{\beta = (\beta_0, \beta_1) : (\beta_0 - b_0)^2 + (\beta_1 - b_1)^2 \le \Delta^2\right\}$ є підмножиною $\{\beta = (\beta_0, \beta_1) : |\beta_0 - b_0| \le \Delta,\ |\beta_1 - b_1| \le \Delta\}$. Оцінимо $x \le |x| \le |\xi| + |\delta|$, $|\beta_0| \le C_0$, $|\beta_1| \le C_1$, де $C_0 = |b_0| + \Delta$, $C_1 = |b_1| + \Delta$.

Доведемо, що з імовірністю 1

$$\sqrt{n} \sup_{\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\|\le\Delta} \left\|\Phi_n\left(\widehat{\beta}_n\right)\right\| \to 0 . \tag{4.5}$$

Для цього оцінимо

$$\sup_{\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\|\le\Delta} \left\|\Phi_n\left(\widehat{\beta}_n\right)\right\| \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\|\le\Delta} \left\| S_C(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, q_n) - S_C(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, 1) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sup_{\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\|\le\Delta} \sup_{q_n \le \gamma_n \le 1} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \widehat{\beta}_n, \gamma_n)}{\partial q} \right| |q_n - 1| .$$

Нехай n_0 — такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1 - \tilde{\delta}$. Зафіксуємо $\Delta > 0$ таке, що $\{\beta : \|\beta - b\| \le \Delta\} \subset \Theta$. Тоді м. н. при всіх $n \ge n_\Delta(\omega)$ виконується $\left\|\widehat{\beta}_n - b\right\| \le \Delta$. При $n \ge n_\Delta(\omega)$ та $n \ge n_0$ для збіжності

$$\sqrt{n}\,|q_n - 1| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sup_{\|\beta-b\|\le\Delta,\, 1-\tilde{\delta}\le\gamma\le 1} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \beta, \gamma)}{\partial q} \right| \to 0 , \quad n \to \infty ,$$

використовуємо посилений закон великих чисел та умову 1 теореми 4.2. Потрібно, щоб для кожного $k = 1, 2$

$$\exists \tilde{\delta} > 0: \ \mathbf{E}_b \sup_{\|\beta - b\| \le \Delta,\, 1-\tilde{\delta} \le \gamma \le 1} \left| \frac{\partial S_k(y_i, x_i, \beta, \gamma)}{\partial q} \right| < \infty .$$

Нагадаємо, що

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, b, 1) - \mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1) \right) = O_p(1) .$$

Із (4.5) випливає, що $\sqrt{n}\, \Phi_n\left(\hat{\beta}_n\right) = o_p(1)$. Застосувавши леми 4.1 і 4.3, остаточно отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(S_C(y_i, x_i, b, 1) - \mathbf{E}_b S_C(y_i, x_i, b, 1) \right) + \sqrt{n} \Phi_n\left(\hat{\beta}_n\right) = O_p(1) .$$

Нагадаємо, що залишок rest уведено в (4.2). З міркувань, що доводять (4.4), зрозуміло, що $\sqrt{n}\, \|\mathrm{rest}\| = \sqrt{n}\, \left\|\hat{\beta}_n - b\right\| o_p(1)$.

Враховуючи (4.3) – (4.5) та лему 4.3, з рівності (4.2) при $n \to \infty$ отримуємо

$$O_p(1) + \left(-V + o_p(1)\right) \left(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - b)\right) = 0 . \tag{4.6}$$

Помножимо (4.6) на V^{-1} і одержимо

$$O_p(1) + \left(-I + o_p(1)\right) \left(\sqrt{n}\, (\hat{\beta}_n - b)\right) = 0 ,$$

звідки випливає рівність

$$\left\|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - b)\right\| \left(1 - o_p(1)\right) = O_p(1) . \tag{4.7}$$

Застосувавши до (4.7) лему 4.4, де $\xi_n = \left\|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - b)\right\|$, $\eta_n = o_p(1)$, $z_n = O_p(1)$, отримаємо, що $\xi_n = O_p(1)$ і (4.4) справджується. Згідно з формулами (4.2) – (4.5) та лемами 4.1 – 4.5 виконується

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_n - b\right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta^T} S_C(y_i, x_i, b, 1) \right)^{-1} \left(-u_n - \sqrt{n}\, \mathrm{rest} - \sqrt{n}\, \Phi_n\left(\hat{\beta}_n\right)\right) \xrightarrow{d}$$

$$\xrightarrow{d} N\left(0, V^{-1} \Sigma V^{-1}\right).$$

5. Висновки. Вивчається узагальнена лінійна модель регресії з нормально розподіленою похибкою вимірювання. Припускається, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання і параметр розсіяння є відомими. Щоб оцінити невідомий параметр, побудовано виправлену $T(q)$-вірогідну оцінку. Наведено достатні умови її строгої консистентності та асимптотичної нормальності. $T(q)$-вірогідна оцінка має таку ж асимптотичну коваріаційну матрицю, як і оцінка, побудована методом виправленої оціночної функції при $q = 1$. Загальні теореми застосовано до конкретних моделей: показникової, пуассонівської, лінійної, гамма-моделі. У подальшому планується розглянути випадок, коли параметр розсіяння є невідомим, а також порахувати функції впливу [9] (гл. 7), щоб обґрунтувати робастні властивості моделі за наявності аномальних спостережень регресора.

1. *Kukush A.*, *Schneeweiss H.* Comparing different estimators in a non-linear measurement error model. I // Math. Meth. Statist. – 2005. – **14,** № 1. – P. 53 – 79.
2. *Schneeweiss H.*, *Kukush A.* Comparing the efficiency of structural and functional methods in measurement error models // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – Вип. 80. – С. 119 – 129.
3. *Cheng C.-L.*, *Schneeweiss H.* Polynomial regression with errors in the variables // J. R. Statist. Soc. B. – 1998. – **60.** – P. 189 – 199.
4. *Kukush A.*, *Markovsky I.*, *Van Huffel S.* Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model $AXB = C$ // Metrika. – 2003. – **57,** № 3. – P. 253 – 285.
5. *Ferrari D.*, *Yang Y.* Maximum L_q-likelihood estimation // Ann. Statist. – 2010. – **38,** № 2. – P. 753 – 783.
6. *Kolev N.* Maximum $T(q)$-likelihood estimation: a new method and its application in risk management // Actuarial Sci. & Finance: Proc. 6th Conf. (Samos, Greece, June 3 – 6, 2010). – Samos, 2010. – P. 22.
7. *Савченко А. В.* Виправлення $T(q)$-вірогідної оцінки в показниковій структурній моделі з похибками вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 172 – 181.
8. *Carroll R. J.*, *Ruppert D.*, *Stefanski L. A.*, *Crainiceanu C.* Measurement error in nonlinear models: a modern perspective. – 2 nd ed. – London; New York: Chapman & Hall, 2006. – 488 p.
9. *Cheng C.-L.*, *Van Ness J. W.* Statistical regression with measurement error. – London: Arnold Publ., 1999. – 262 p.
10. *Савченко А.* Модифікована оцінка максимальної вірогідності в пуассонівській структурній моделі з похибками вимірювання // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. математика, механіка. – 2012. – Вип. 28. – С. 26 – 31.
11. *Усольцева О. С.* Консистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – Вип. 82. – С. 156 – 162.
12. *Ширяев А.* Вероятность: В 2 кн. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – Кн. 1. – 520 с.

Одержано 05.01.14