УДК 517.956.223

А. В. Заворотинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. нац. пед. ун-т)

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

We consider elliptic boundary-value problems in which the elliptic operator is a polynomial function of a small parameter and the boundary conditions contain additional unknown functions. It is shown that the ellipticity with small parameter is not only sufficient but also necessary for the *a priori* estimation of the solutions to this problem in the corresponding special functional spaces depending on the parameter.

Розглядаються еліптичні крайові задачі, в яких еліптичний оператор поліноміально залежить від малого параметра, а крайові умови містять додаткові невідомі функції. Доведено, що умова еліптичності з малим параметром є не лише достатньою, але і необхідною для апріорної оцінки розв'язків задачі у відповідних функціональних просторах, залежних від параметра.

Введение. Эллиптические операторы с параметром играют важную роль в теории эллиптических уравнений и ее приложений. Среди них особый интерес представляют эллиптические краевые задачи с малым параметром, рассмотренные в работах [1 – 3]. Также важными для приложений являются и эллиптические задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области, которые были исследованы в работах [4 – 6].

В настоящей работе исследуется общая эллиптическая краевая задача с малым параметром и дополнительными неизвестными функциями на границе области. Показано, что эллиптичность с малым параметром является не только достаточным, но и необходимым условием для получения априорной оценки для исследуемой задачи в специальных функциональных пространствах, зависящих от параметра. Это исследование является продолжением работ автора [7 – 9].

Отметим, что рассматриваемый класс задач тесно связан со слабо эллиптическими граничными задачами [10, 11]. Такие задачи возникают, в частности, в теории параболических уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени [12], и получаются при замене „малого” параметра ε на „большой” параметр $\lambda = 1/\varepsilon > 0$ (подробнее см. [13]).

1. Постановка задачи. Пусть G — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей ∂G, которая является бесконечно гладким замкнутым многообразием размерности $n-1$. Как обычно, $\overline{G} := G \cup \partial G$.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области G, содержащую параметр ε:

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A_{2m-j}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \qquad x' \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{2}$$

Здесь $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu > 0$, $A_{2m-j}(x, D)$ — линейный дифференциальный оператор (л.д.о.) в $\overline{G}$, $B_j(x, D)$ — граничный л.д.о. на ∂G, $C_{j,k}(x', D')$ — касательный л.д.о. на ∂G. Коэффициенты этих операторов — комплекснозначные бесконечно гладкие функции на $\overline{G}$ и ∂G соответственно, а порядки удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \le 2m - j, \qquad \operatorname{ord} B_j = m_j, \qquad \operatorname{ord} C_{j,k} \le m_j + \alpha_k,$$

где $m_j, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ и

$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \le \ldots \le m_{m+\varkappa}. \tag{3}$$

Как обычно, $C_{j,k} \equiv 0$, если $m_j + \alpha_k < 0$.

Задача (1), (2) кроме неизвестной функции $u(x)$, $x \in \overline{G}$, содержит $\varkappa$ дополнительных неизвестных функций $\sigma_1(x'), \ldots, \sigma_\varkappa(x')$, $x' \in \partial G$. Поэтому число краевых условий равно $m + \varkappa$.

Сформулируем условия, которым удовлетворяет задача (1), (2). Пусть $x \in \overline{G}$. Обозначим

$$A^0(x, \xi, \varepsilon) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A^0_{2m-j}(x, \xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

где $A^0_{2m-j}(x, \xi)$ — главный символ оператора $A_{2m-j}(x, D)$. Заметим, что функция $A^0(x, \xi, |\xi|^{-1})$ однородная по ξ порядка 2μ.

***Условие* 1.** Существует $C > 0$ такое, что

$$|A^0(\xi, \varepsilon)| \ge C|\xi|^{2\mu}(1 + \varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu} \tag{4}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $\varepsilon > 0$.

Это условие *эллиптичности с малым параметром* оператора $A^0(x, D, \varepsilon)$ в точке $x \in \overline{G}$.

***Замечание* 1.** Неравенство (4) равносильно следующим условиям:

$$A^0_{2m}(x, \xi) \neq 0, \qquad A^0_{2\mu}(x, \xi) \neq 0, \qquad A^0(x, \xi, \varepsilon) \neq 0 \tag{5}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $\varepsilon > 0$ [3] (предложение 1.2).

Отметим, что два первых неравенства в (5) означают эллиптичность операторов $A^0_{2m}(x, \xi)$ и $A^0_{2\mu}(x, \xi)$.

Пусть $x' \in \partial G$ и U — достаточно малая окрестность точки x' из топологии в ∂G. Выберем в U локальные координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ такие, что x_n — расстояние от точки $x \in U$ до границы ∂G. Запишем в этих координатах символы $A^0_{2m-j}(x', \xi)$ и $A^0(x, \xi, \varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$. Полученные полиномы обозначим через $A^0_{2m-j}(\xi)$ и $A^0(\xi, \varepsilon)$ соответственно.

Предположим, что выполняется условие 1 в точке $x = x'$. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда уравнения $A^0(\xi', \tau, \varepsilon) = 0$ и $A^0_{2\mu}(\xi', \varepsilon) = 0$ не имеют вещественных τ-корней. Обозначим через $m^\pm(\xi', \varepsilon)$ и $\mu^\pm(\xi', \varepsilon)$ число корней соответственно первого и второго уравнений, лежащих в полуплоскости $\mathbb{C}_\pm := \{\tau \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} \tau \gtrless 0\}$. Поскольку эти корни непрерывно зависят от ξ' и ε, числа $m^\pm(\xi') = m^\pm(\xi', \varepsilon)$ не зависят от $\varepsilon > 0$ при каждом фиксированном ξ'. В случае $n \ge 3$ множество $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ связно и поэтому числа $m^\pm(\xi')$ и $\mu^\pm(\xi')$ также не зависят от ξ'.

***Условие* 2.** Для каждого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ выполняются равенства

$$m^+(\xi') = m^-(\xi') = m, \qquad \mu^+(\xi') = \mu^-(\xi') = \mu$$

Это условие *правильной эллиптичности с малым параметром* оператора $A^0(x', D, \varepsilon)$ в точке $x' \in \partial G$.

Заметим, что при $n \ge 3$ равенство $\mu^+(\xi') = \mu^-(\xi')$ выполняется автоматически [3].

Как и прежде, $x' \in \partial G$. Запишем в локальных координатах главные символы операторов $B_j(x', D)$ и $C_{j,k}(x', D')$. Полученные полиномы обозначим соответственно через $B_j^0(\xi)$ и $C_{j,k}^0(\xi')$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задаче (1), (2) перейдем к локальным координатам в окрестности точки x', отбросим младшие члены дифференциальных операторов, положим $f \equiv 0$ и применим преобразование Фурье по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (1) на полуоси $t := x_n > 0$:

$$A^0(\xi', D_t, \varepsilon)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$(B_j^0(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{7}$$

Здесь гладкая функция $v(t)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ искомые, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ — произвольно заданные комплексные числа. Задача (6), (7) зависит от параметров $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\varepsilon > 0$. Она называется *граничным символом* задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$.

Нас будут интересовать решения, удовлетворяющие условию

$$v(t) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{8}$$

***Условие* 3.** Для любых $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, $\varepsilon > 0$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (6) – (8) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$.

Это аналог условия Лопатинского для краевой задачи (1), (2) при фиксированном ε.

Следующие условия были получены автором в работе [7]. Это аналоги условий Лопатинского и касаются разрешимости краевой задачи для оператора $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ в предельных случаях $\varepsilon \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ (ср. с [3]).

Пусть $r \in \{m, \mu\}$. Рассмотрим краевую задачу

$$A_{2r}^0(\xi', D_t)v(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{9}$$

$$(B_j^0(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{10}$$

***Условие* 4.** Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (8) – (10) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ при $r = m$.

***Условие* 5.** Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (8) – (10) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ при $r = \mu$.

Поскольку при $\varepsilon = 0$ оператор $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ совпадает с оператором $A_{2\mu}^0(\xi', D_t)$ порядка $2\mu < 2m$, при малых $\varepsilon > 0$ требуются поправки к решению задачи (6), (7), позволяющие удовлетворить оставшимся $m - \mu$ краевым условиям. Эти поправки являются решением краевой задачи

$$A^0(0, D_t, 1)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{11}$$

$$(B^0(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{12}$$

***Условие* 6.** Для любых $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (8), (11), (12) имеет единственное решение $v(t)$.

Определение. *Краевая задача* (1), (2) *называется эллиптической с малым параметром, если в произвольной точке* $x \in \overline{G}$ *выполняется условие* 1 *и в произвольной точке* $x' \in \partial G$ *выполняются условия* 2 – 6.

2. Функциональные пространства, зависящие от параметра. Введем необходимые нам функциональные пространства. Пусть $r,\ s \in \mathbb{R}$.

Под пространством $H^{r,s} = H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, $r \geq s$, понимается совокупность элементов соболевского пространства H^r, снабженная нормой

$$\|u\|_{r,s} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s (1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{(r-s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{13}$$

где через $\hat{u}(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функции $u(x)$.

Пусть $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$. Введем обозначение

$$\Xi_{\rho,\sigma}(\xi,\varepsilon) = \begin{cases} |\xi|^\sigma (1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{(\rho-\sigma)/2}, & \sigma \geq 0, \\ \varepsilon^{-\sigma}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{\rho/2}, & \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Определим $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ как фактор-пространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)/H^{r,s}(\mathbb{R}^n)_-$, где $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)_-$ — подпространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений), сосредоточенных в полупространстве $\mathbb{R}^n_- = \{(x,t),\ t \leq 0\}$.

Поскольку при $\varepsilon > 0$ пространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ является подмножеством соболевского пространства $H^r(\mathbb{R}^n)$, при $r > \ell + 1/2$, $\ell = 0, \ldots, r$ определен оператор следа $\mathcal{T}_\ell \colon u(x) \to D_n^\ell u(x',0)$. Мы укажем нормы, в которых операторы следа будут равномерно ограниченными при $\varepsilon \to 0$. Использовав обозначения (14), определим пространство $\mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ функций $f(x')$ с нормой

$$\|f, \mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})\| = \begin{cases} \|f, \mathbb{R}^{n-1}\| + \|\Xi_{\rho,\sigma}(D',\varepsilon) f, \mathbb{R}^{n-1}\|, & \sigma \geq 0, \\ \|\Xi_{\rho,\sigma}(D',\varepsilon) f, \mathbb{R}^{n-1}\|, & \sigma < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Аналоги пространства $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ на многообразии G с гладкой границей ∂G определяются стандартным образом. $H^{r,s}(G)$ — пространство сужений на G распределений из $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, а $\mathcal{H}^{r,s}(\partial G)$ состоит из всех распределений на ∂G, которые в локальных координатах принадлежат $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1})$ (см. [3, 10]).

3. Основной результат. Пусть, для простоты, числа r и s целые, выполнены условие (3) и неравенства

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \qquad r > m_j + \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{16}$$

Краевой задаче (1), (2) сопоставляется непрерывный оператор

$$\mathcal{A} : (u, \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa) \longrightarrow (f, g_1, \ldots, g_{m+\varkappa}),$$

действующий в паре пространств

$$H^{r,s}(G) \times \prod_{i=1}^{\varkappa} \mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2, s+\alpha_i-1/2}(\partial G) \to H^{r-2m, s-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\partial G). \tag{17}$$

В работе автора [9] доказано достаточное условие для существования следующей априорной оценки (константа C не зависит от u, σ и ε):

$$\|u;G\|_{r,s}+\sum_{i=1}^{\varkappa}\|\sigma_i;\mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2,s+\alpha_i-1/2}(\partial G)\|\leq$$

$$\leq C\left(\|A(x,D,\varepsilon)u;G\|_{r-2m,s-2\mu}+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\|g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G)\|+\|u;G\|\right). \tag{18}$$

Оказывается, что эллиптичность с малым параметром является не только достаточным, но и необходимым условием для получения априорной оценки для исследуемой задачи. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть числа* r, s *удовлетворяют неравенствам* (16) *и неравенству* $m_{\mu+\varkappa}+\dfrac{1}{2}\leq$ $\leq s<m_{\mu+\varkappa+1}+\dfrac{1}{2}$. *Если априорная оценка* (18) *справедлива, то задача* (1), (2) *является эллиптической с малым параметром.*

4. Доказательство. С помощью метода локализации („замораживания коэффициентов”) доказательство сводится к доказательству соответствующей теоремы для модельных областей R^n и R^n_+. Ключевым моментом доказательства является вывод условий 1 – 6 из априорной оценки в полупространстве R^n_+. Отметим основные этапы доказательства. Рассмотрим следующую задачу в полупространстве R^n_+:

$$A(D',D_n,\varepsilon)u(x)=f(x),\quad x_n>0,$$

$$(B_j(D',D_n)u)(x',0)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{jk}(D')\sigma_k(x')=g_j(x'),\quad j=1,\ldots,m+\varkappa. \tag{19}$$

Необходимость условий 1 *и* 2. Необходимость этих условий показана в работе [3] и основывается на неравенстве

$$\int\limits_0^\infty(|\xi|^{2s}(1+\varepsilon|\xi|)^{r-s}-C^2|\xi|^{2s-2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{r-s-2m+2\mu}|A(\xi,\varepsilon)|^2)|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\leq 0,$$

в котором u — гладкая функция с носителем в R^n_+. Здесь через $\hat{u}(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функции $u(x)$.

Необходимость остальных условий основана на неравенстве на полуоси для решений задачи (19)

$$C\sum_{l=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\varepsilon)\int\limits_0^\infty|D_n^\ell V(x_n)|^2dx_n+\sum_{j=1}^{\varkappa}\Xi^2_{r+\alpha_j-1/2,s+\alpha_j-1/2}(\xi',\varepsilon)|\sigma_j'(\xi')|^2\leq$$

$$\leq\int\limits_0^\infty|R(D_n-i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi|^2})^{r-s-2m-2\mu}A(\xi',D_n,\varepsilon)LV|^2dx_n+$$

$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\varepsilon)|g_j'(\xi')|^2. \tag{20}$$

Это неравенство выводится из неравенства (18), в котором берется $u(x)=\varphi(x')V(x_n)$ (ср. с [3]).

Необходимость условия 3. Пусть $V(x_n) \in L_2(R^n_+)$ является решением однородного уравнения

$$A(\xi', D_n, \varepsilon)u(x) = f(x), \quad x_n > 0.$$

Тогда это функция будет и решением уравнения

$$A^+(\xi', D_n, \varepsilon)u(x) = f(x), \quad x_n > 0.$$

Следовательно, оценка (20) примет вид

$$C(\xi', \varepsilon)\sum_{l=0}^{r} \|D_n^\ell V(x_n)\|_{L_2(R^n_+)} + \sum_{j=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_j-1/2, s+\alpha_j-1/2}(\xi', \varepsilon)|\sigma'_j(\xi')|^2 \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\xi', \varepsilon)|g'_j(\xi')|^2. \tag{21}$$

Согласно схеме, предложенной в работе [6] (дополнение к § 7), доказывается, что оценка (21) эквивалентна невырожденности матрицы Лопатинского рассматриваемой задачи (см. [13]), что эквивалентно условию 3.

Необходимость условия 5. Положим в неравенстве (20) $\varepsilon = 0$. Тогда, учитывая (18) и неравенство $m_{\mu+\varkappa} + \dfrac{1}{2} \le s < m_{\mu+\varkappa+1} + \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\Xi_{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\xi, 0) = \begin{cases} |\xi|^{s-m_j-1/2}, & j \le \mu + \varkappa, \\ 0, & j > \mu + \varkappa. \end{cases}$$

Следовательно, неравенство (20) принимает вид

$$C\sum_{l=0}^{r} |\xi'|^{2(s-l)} \int_0^\infty |D_n^\ell V(x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\xi'|^{2(s+\alpha_j-1/2)}|\sigma'_j(\xi')|^2 \le$$

$$\le \int_0^\infty |R(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu} A_{2\mu}(\xi', D_n, \varepsilon)LV|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu+\varkappa} |\xi'|^{2(s-m_j-1/2)}|g'_j(\xi')|^2.$$

Аналогично предыдущему рассуждению доказывается, что для системы операторов $\{A_{2\mu}, B_1, \ldots, B_{\mu+\varkappa}, C_{ji}\}$ выполнено условие Лопатинского.

Необходимость условия 4. Умножая обе части (20) на ε^{s-r} и переходя к пределу при $\varepsilon \to \infty$, получаем

$$C\sum_{l=0}^{r} |\xi'|^{2(s-l)} \int_0^\infty |D_n^\ell V(x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\varkappa} |\xi'|^{2(s+\alpha_j-1/2)}|\sigma'_j(\xi')|^2 \le$$

$$\le \int_0^\infty |R(D_n - i|\xi'|)^{s-2m} A_{2m}(\xi', D_n, \varepsilon)LV|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} |\xi'|^{2(s-m_j-1/2)}|g'_j(\xi')|^2.$$

Отсюда следует необходимость условия 4.

Необходимость условия 6. Доказательство выводится из неравенства

$$C\sum_{l=0}^{r}\int\limits_{0}^{\infty}|D_n^{\ell}V(x_n)|^2dx_n \leq$$

$$\leq \int\limits_{0}^{\infty}|(D_n-i|)^{r-s-2m+2\mu}D_n^sQ(D_n)V|^2dx_n + \sum_{j=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa}|B_j(0,D_n)V(0)|^2.$$

Детали см. в [3, 11].

Теорема доказана.

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 5. – С. 3 – 122.
2. *Volevich L. R.* General elliptic boundary value problems with small parameter // Spectral and Evolution Problems: Proc. Twelfth Crimean Autumn Math. School-Symp. Vol. 12. Group of authors. – Simferopol: Taurida Nat. V. Vernadsky Univ., 2002. – P. 171 – 181.
3. *Волевич Л. Р.* Метод Вишика – Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Тр. Моск. мат. о-ва. – 2006. – **67**. – С. 104 – 147.
4. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – x+276 p.
5. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.
6. *Гиндикин С. Г., Волевич Л. Р.* Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. – М.: УРСС, 1999. – 272 с.
7. *Заворотинський А. В.* Еліптичні з малим параметром граничні задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Формальний асимптотичний розв'язок // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер. Математика. – 2011. – **1**, № 1-2. – С. 40 – 46.
8. *Заворотинский А. В.* Эллиптические с малым параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України – 2012. – **9**, № 2. – С. 147 – 164.
9. *Заворотинский А. В.* Об эллиптических с малым параметром краевых задачах // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Техн. науки. – 2013. – № 11. – С. 23 – 30.
10. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* Boundary value problems for a class of elliptic operator pencils // Integ. Equat. Operator Theory. – 2000. – **8**. – P. 410 – 436.
11. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* On elliptic operator pencils with general boundary conditions // Integ. Equat. Operator Theory. – 2001. – **9**. – P. 25 – 40.
12. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Науч. книга, 1998. – 436 с.
13. *Заворотинский А. В.* Слабо эллиптические с параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальной системы решений // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2012. – **23**, № 2. – С. 63 – 75.

Получено 02.04.14