*Замечание 2.* Пусть $m := 1$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$, $\supset\, \in L'$ и $\bot \in L'_0$, где $\supset$, $A$ и $D$ заданы примером 3 работы [1] при $n \geqslant 4$, а $\bot := 0$. Определяя производную унарную связку $\neg$, положив $\neg p := p \supset \bot$, мы имеем $\neg a = 1 - a$ для всех $a \in A$. Тогда, в соответствии с примером 3 работы [1], существует такой определитель равенства $\Im$ для $\mathcal{M}$, что $\neg p, 2 \otimes p \in \Im$. Отметим, что $2 \otimes p \not\preceq \neg p$. Поэтому $\preceq' := \preceq \bigcup \{\langle \nu, \nu' \rangle \in \Im^2 \mid \nu \preceq \neg p, 2 \otimes p \preceq \nu'\}$ — частичное упорядочение на $\Im$. Тогда существует последовательность $\vec{\Im}$, неубывающая относительно $\preceq'$ и, тем самым, относительно $\preceq \subseteq \preceq'$. При этом $\neg p \prec' 2 \otimes p$ и, поэтому, $\neg p = \vec{\Im}_i$ и $2 \otimes p = \vec{\Im}_j$, где $i$, $j \in |\Im|$ и $i < j$. Поскольку $\vdash 2 \otimes p_1 \in \mathrm{Cn}^{(0,l)}_{\mathcal{M}}(\vdash \neg(p_1 \supset p_2))$, учитывая сноску 1, существует такая $L'$-секвенциальная $\Im$-таблица $\mathcal{T}$ ранга $(k, l)$ для $\mathcal{M}$, что $\vdash 2 \otimes p_1 \in \rho_{\mathcal{T}}(\neg(\supset))$. Тогда выполнение запроса $\mathtt{seq}([], [], [2 \otimes \bot], [], [], \mathtt{G})$ в Пролог-программе $\mathcal{P}'$, полученной из $\mathcal{P}$ удалением правила (3) или факта (9), приводит к тому же самому производному запросу, что влечет незавершаемость Пролог-программы $\mathcal{P}'$ на данном запросе.

Таким образом, наличие правила (3) и факта (9) в Пролог-программе $\mathcal{P}$ является существенным для истинности теоремы 1.


1. *Пынько А. П.* Секвенциальные исчисления для конечнозначных логик с определителем равенства // Доп. НАН України. – 2003. – № 8. – С. 69–75.



*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 30.08.2006*



УДК 517.9





**В. В. Семенов, М. В. Кацев**


# Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)*


*We prove that, for any convex, Lipschitz, and lsc function $f$ defined on a weakly compact convex set $X$ in a Banach space $E$ and for any $\varepsilon > 0$, there is $x^* \in E^*$ with $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ such that $f + x^*$ attains its supremum on $X$.*


Відомо, що у рефлексивному банаховому просторі опуклий напівнеперервний знизу функціонал[1] досягає мінімуму на довільній опуклій замкненій та обмеженій множині [1]. Але для задачі максимізації напівнеперервного знизу опуклого функціоналу немає такої елегантної теореми існування. Вже у нескінченновимірному гільбертовому просторі існують опуклі замкнені та обмежені множини, які не містять елемента з максимальною нормою. А завдяки теоремі Джозефсона–Ніссенцвейга [2] у довільному нескінченновимірному лінійному нормованому просторі можна побудувати неперервний опуклий функціонал, не обмежений зверху на замкненій одиничній кулі[2].

[1] Усі функціонали вважаємо власними.

[2] Це спостереження було зроблено у бакалаврській роботі студентом Куриленком Юрієм (факультет кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка).

У недавній роботі [3] розв'язано задачу описання класу заданих у рефлексивному банаховому просторі $E$ напівнеперервних знизу опуклих функціоналів $f$, що досягають свого супремуму на довільній обмеженій замкненій й опуклій підмножині ефективної області $\mathrm{dom}(f)$. Виявляється, це лише ті функціонали $f$, для яких звуження $f|_{\mathrm{dom}(f)}$ секвенціально неперервне в топології $\sigma(E, E^*)$. Нажаль, це дуже вузький клас функціоналів і в прикладних задачах оптимального керування вони, як правило, не зустрічаються.

Виникає природне питання: якщо задача опуклої максимізації нерозв'язна, то чи можна цільовий функціонал як завгодно мало адитивно збурити лінійним неперервним функціоналом так, що збурення досягає максимуму? Позитивну відповідь на питання такого типу називатимемо лінійним варіаційним принципом.

**1. Класичні лінійні варіаційні принципи опуклої оптимізації.** У нелінійному аналізі варіаційними принципами називають групу результатів про те, що напівнеперервну знизу і обмежену знизу функцію на повному метричному просторі можна як завгодно мало збурити так, що збурена функція буде мати мінімум. Це перш за все теореми Екланда [1, 4], Борвейна–Прайса [5] та Девілля [6].

Але першим результатом такого типу була теорема Бішопа–Фелпса [7, 8] від 1963 року.

**Теорема 1** (Бішоп–Фелпс). *Нехай $X$ — непорожня опукла замкнена та обмежена множина в банаховому просторі $E$, тоді множина лінійних неперервних функціоналів, які досягають максимуму на $X$, є щільною в $E^*$.*

Іншими словами, якщо $y^* \in E^*$ і $\varepsilon > 0$, то існує такий $x^* \in E^*$ з $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$, що функціонал $y^* + x^*$ досягає максимуму на $X$.

Широко відоме таке переформулювання теореми 1, що належить Брондстеду і Рокафеллару [9].

**Теорема 2** (Брондстед–Рокафеллар). *Нехай $X$ — непорожня опукла замкнена та обмежена множина в банаховому просторі $E$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ — опуклий напівнеперервний знизу функціонал, обмежений знизу. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий $x^* \in E^*$ з $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$, що функціонал $f + x^*$ досягає мінімуму у деякій точці $x_0 \in X$.*

Якщо банахів простір $E$ має властивисть Радона–Нікодима [8], то результат теореми 2 справедливий для довільного напівнеперервного знизу та обмеженого знизу функціоналу $f\colon E \to \mathbb{R}$ — це відомий варіацийний принцип Стегла [10].

Питання отримання результату типу теореми 2 для задачі максимізації опуклого напівнеперервного знизу функціоналу нетривіальне. Техніка доведення згаданих теорем суттєво пов'язана саме з мінімізаційним характером задачі.

Однією з класичних нескінченновимірних задач опуклої максимизації є проблема обчислення норми лінійного неперервного оператора. Відомо, що коли банахів простір $E$ рефлексивний, то довільний компактний оператор $E \to F$ ($F$ — банахів простір) досягає норми на замкненій одиничній кулі простору $E$. Але, звичайно, існують лінійні неперервні оператори, що не досягають норми.

У роботі [11] Лінденштраусс почав вивчати питання про щільність множини операторів $E \to F$, що досягають норми, у просторі $\mathcal{L}(E, F)$. Йому належить такий результат (див. також [8]).

**Теорема 3** (Лінденштраусс). *Для довільних банахових просторів $E$, $F$ множина неперервних лінійних операторів $\mathcal{A}\colon E \to E$, для яких другі спряжені $\mathcal{A}^{**}\colon E^{**} \to F^{**}$ досягають своєї норми на $\{x \in E^{**}\colon \|x\|_{E^{**}} \leqslant 1\}$, є щільною в просторі лінійних неперервних операторів, які діють з $E$ в $F$.*

Звичайно у випадку рефлексивності простору $E$ результат справедливий без переходу до других спряжених операторів. Деякі узагальнення теореми наведено у роботах [10, 12].

Основний момент доведення теореми 3 — побудова для заданого $\varepsilon > 0$ такого ядерного оператора $\mathcal{B}\colon E \to F$ з нормою, меншою за $\varepsilon$, що $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ досягає норми. Запропонований для цього Лінденштрауссом ітераційний процес можна узагальнити так, щоб отримати бажаний лінійний варіаційний принцип для опуклої максимізації.

**2. Основний результат.** Сформулюємо та доведемо основний результат роботи.

**Теорема 4.** *Нехай $E$ — банахів простір, $f\colon E \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє умову Ліпшица на слабко компактній опуклій множині $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий $x^* \in E^*$ з $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$, що задача*

$$f + x^* \to \sup_X$$

*має розв'язок, причому функціонал $f + x^*$ досягає супремума на $X$ в крайній точці множини $X$.*

**Доведення.** Скористаємось лемою, яка є узагальненням леми Лінденштраусса про досяжність лінійним неперервним оператором своєї норми на замкненій одиничній кулі.

**Лема 1** [3]. *Нехай $X$ — компактна опукла множина локально опуклого простору $E$, $f\colon E \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ — напівнеперервний знизу опуклий функціонал ($X \subseteq \mathrm{dom}(f)$).*

*Тоді якщо існують такі послідовності точок $x_n \in X$, неперервних афінних функціоналів $\phi_n\colon E \to \mathbb{R}$ та нескінченно мала послідовність додатних чисел $\varepsilon_n$, що виконуються умови*[3]

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon f \geqslant \phi_n \quad \text{на} \quad X, \tag{1}$$

$$\forall n \leqslant k\colon \phi_n(x_k) \geqslant \sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon_n, \tag{2}$$

*то функціонал $f$ досягає свого супремуму на множині $X$.*

Без обмеження загальності вважатимемо, що

$$\forall x \in X\colon f(x) \in [1 + 2d(X), m],$$

де $d(X) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X} \|x_1 - x_2\|_E$, $m \in \mathbb{R}$ та функціонал $f$ задовольняє умову Ліпшица з константою 1:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|_E.$$

Нехай $\varepsilon < 1/2$. Оберемо послідовність $\varepsilon_k$ таким чином, щоб виконувалось

$$2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon, \qquad \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_k^2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Будемо індуктивно будувати послідовність опуклих напівнеперервних знизу функціоналів $f_k$ таким чином. Нехай $f_1 = f$.

[3]Взагалі ці умови є не тільки достатними, а ще й необхідними для того, щоб функціонал $f$ досягав свого супремуму на множині $X$.

На $k$-му кроці оберемо таку точку $x_k \in X$, щоб виконувалось

$$f_k(x_k) > \sup_{x\in X} f_k(x) - \varepsilon_k^2$$

та такий неперервний афінний функціонал $\Phi_k$, який задовольняє умову

$$\forall x \in X\colon f_k(x) \geqslant \Phi_k(x) \geqslant f_k(x_k) - \varepsilon_k^2 - 2\|x - x_k\|_E.$$

Тоді нехай

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \frac{\varepsilon_k}{M}\Phi_k(x) f_k(x_k), \qquad \text{де} \qquad M = (m+1)^2.$$

Доведемо за індукцією, що потрібні $\Phi_k$ існують, причому істинні такі твердження:

1) $\forall x \in X\colon \Phi_k(x) > 0$;

2) $\forall x \in X\colon f_k(x) \in \left[1 + 2d(X), m + \sum\limits_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i\right]$;

3) $f_k$ задовольняє умову Ліпшица з константою $1 + \sum\limits_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i$.

Розглянемо дві опуклі множини в просторі $E \oplus \mathbb{R}$:

$$A = \{(x,t)\colon x \in X, t \geqslant f_n(x)\},$$

$$B = \{(x,t)\colon x \in X \bigcup \bar{S}(x_n, 1), t \leqslant f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E\},$$

де $\bar{S}(x_n, 1) = \{x \in E\colon \|x - x_n\|_E \leqslant 1\}$. Оскільки за припущенням індукції $f_n$ задовольняє умову Ліпшица з константою

$$C = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i < 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 2,$$

то дані множини не перетинаються і за теоремою про віддільність опуклих множин [1] (тут ми використали напівнеперервність знизу $f$) існують лінійний неперервний функціонал $\widetilde{l} \in (E \oplus \mathbb{R})^*$ та $\beta \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\forall (x,t) \in A\colon \widetilde{l}(x,t) \geqslant \beta, \tag{3}$$

$$\forall (x,t) \in B\colon \widetilde{l}(x,t) \leqslant \beta. \tag{4}$$

Подамо $\widetilde{l}$ у вигляді $\widetilde{l}(x,t) = l(x) + \alpha t$, де $l \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

З (3) при $t = f_n(x)$ та з (4) при $t = f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E$ отримаємо

$$l(x) + \alpha f_n(x) \geqslant \beta \geqslant l(x) + \alpha(f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E).$$

Отже,

$$f_n(x) \geqslant \frac{\beta - l(x)}{\alpha} \geqslant f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E,$$

тобто можна обрати

$$\Phi_n(x) = \frac{\beta - l(x)}{\alpha}.$$

Тоді $\forall x \in X$ буде виконуватись

$$\Phi_n(x) \geqslant f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E \geqslant 1 + 2d(X) - \varepsilon_n^2 - 2\|x - x_n\|_E > 0.$$

В подальшому нехай $\Phi_n(x) = \beta_n + l_n(x)$, де $\beta_n \in \mathbb{R}$, $l_n \in E^*$. Тоді

$$\sup_{\|x-x_n\|_E=1} l_n(x - x_n) = \sup_{\|x-x_n\|_E=1} (\Phi_n(x) - \Phi_n(x_n)) \geqslant -\Phi_n(x_n) \geqslant -f_n(x_n) \geqslant -(m+1),$$

тобто $\|l_n\|_{E^*} \leqslant m + 1$.

Маємо

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x) f_n(x_n) < m + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \varepsilon_n \frac{\left(m + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\right)^2}{M} < m + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x) f_n(x_n) > f_n(x) \geqslant 1 + 2d(X).$$

Відзначимо, що

$$|\Phi_n(x) - \Phi_n(y)| = |l_n(x - y)| \leqslant \|l_n\|_{E^*}\|x - y\|_E < (m+1)\|x - y\|_E.$$

Звідси

$$|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| \leqslant |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\varepsilon_n}{M} f_n(x_n)|\Phi_n(x) - \Phi_n(y)| <$$
$$< \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \varepsilon_n\frac{(m+1)^2}{M}\right)\|x - y\|_E = \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right)\|x - y\|_E.$$

Таким чином, ми довели коректність побудови та певні її властивості.

Для побудованої послідовності отримуємо

$$\sup_{x\in X}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{M}\Big(\sup_{x\in X} f_n(x)\Big)^2 < \varepsilon_n.$$

Отже, для $n < k$:

$$\sup_{x\in X}|f_k(x) - f_n(x)| < \sum_{i=n}^{k-1}\varepsilon_i < \varepsilon_{n-1}^2. \tag{5}$$

Крім того, для $n < k$ одержимо

$$f_{n+1}(x_k) \geqslant f_k(x_k) - \sup_{x\in X}|f_k(x) - f_{n+1}(x)| > \sup_{x\in X} f_k(x) - \varepsilon_k^2 - \sum_{i=n+1}^{k-1}\varepsilon_i \geqslant \sup_{x\in X} f_k(x) - \varepsilon_n^2.$$

З невід'ємності $\Phi_n$ випливає монотонність послідовності $f_n$, зокрема:

$$\forall n \leqslant k\colon \sup_{x\in X} f_n(x) \leqslant \sup_{x\in X} f_k(x).$$

Звідси, при $n < k$:

$$f_{n+1}(x_k) \geqslant \sup_{x\in X} f_k(x) - \varepsilon_n^2 \geqslant \sup_{x\in X} f_{n+1}(x) - \varepsilon_n^2 \geqslant f_{n+1}(x_n) - \varepsilon_n^2 =$$

$$= f_n(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x_n) f_n(x_n) - \varepsilon_n^2.$$

З іншого боку,

$$f_{n+1}(x_k) = f_n(x_k) + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x_k) f_n(x_n) \leqslant \sup_{x\in X} f_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x_k) f_n(x_n) \leqslant$$

$$\leqslant f_n(x_n) + \varepsilon_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{M}\Phi_n(x_k) f_n(x_n).$$

Шляхом нескладних перетворень одержимо

$$\Phi_n(x_n) - \Phi_n(x_k) \leqslant \frac{2M\varepsilon_n}{f_n(x_n)} < 2M\varepsilon_n,$$

тобто для довільних $n < k$ виконується

$$\Phi_n(x_k) > \Phi_n(x_n) - 2M\varepsilon_n \geqslant f_n(x_n) - \varepsilon_n^2 - 2M\varepsilon_n > \sup_{x\in X} f_n(x) - 2\varepsilon_n^2 - 2M\varepsilon_n. \tag{6}$$

З (5) випливає рівномірна збіжність послідовності $f_n$. Нехай $f_0$ — її границя. Тоді

$$\sup_{x\in X} |f_0(x) - f_n(x)| \leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |f_k(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_{n-1}^2,$$

звідси

$$\sup_{x\in X} f_n(x) \geqslant \sup_{x\in X} f_0(x) - \varepsilon_{n-1}^2.$$

Враховуючи (6) $\forall n < k$, отримаємо:

$$\Phi_n(x_k) > \sup_{x\in X} f_n(x) - 2\varepsilon_n^2 - 2M\varepsilon_n \geqslant \sup_{x\in X} f_0(x) - \varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_n^2 - 2M\varepsilon_n.$$

Крім того,

$$\forall x \in X,\ n \in \mathbb{N}\colon f_0(x) \geqslant f_n(x) \geqslant \Phi_n(x).$$

Таким чином, функціонал $f_0$ задовольняє умови (1), (2) леми 1, тобто він досягає супремуму на множині $X$.

За побудовою $f_0$ має вигляд

$$f_0(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i)\Phi_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i)(\beta_i + l_i(x)) =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i) l_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i)\beta_i.$$

Останній доданок є константою, він не впливає на досяжність супремуму. Тому функціонал

$$f_0'(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i) l_i(x)$$

також досягає супремуму на $X$ (звичайно у крайній точці).

Маємо

$$\|f_0' - f\|_{E^*} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i) l_i \right\|_{E^*} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i) \|l_i\|_{E^*} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i (m+1)^2}{M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, за $x^*$ можна обрати $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_i}{M} f_i(x_i) l_i$.

**3. Зауваження та висновки.** Сформулюємо один корисний варіант варіаційного принципу.

**Теорема 5.** *Нехай $E$ — банахів простір, $f\colon E^* \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал, що задовольняє умову Ліпшица на $\sigma(E^*, E)$-компактній опуклій множині $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in E$ з $\|x\|_E < \varepsilon$, що функціонал $f + x$ досягає супремуму на $X$ у крайній точці множини $X$.*

Міркування доведення повністю аналогічні використаним при доведенні теореми 4. Єдина відмінність — це, звичайно, робота з двоїстою парою $(E^*, E)$ замість $(E, E^*)$.

Теорема 4 знайшла застосування для дослідження операторів, які досягають норми. У роботі [13] поліпшено "рефлексивний" варіант теореми Лінденштраусса про щільність множини досягаючих норми операторів — показано, що ядерне збурення можна взяти з одновимірною областю значень. Також для рефлексивних банахових просторів доведено щільність множини білінійних неперервних відображень, які досягають норми.

Сформулюємо декілька проблем, пов'язаних з узагальненням теореми 4.

*Задача 1.* Нехай задано множину $X$ та зліченну сім'ю функціоналів $\{f_n\}$, які задовольняють умовам з теореми 4. Чи можна для довільного $\varepsilon > 0$ обрати такий $x^* \in E^*$ з $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$, що задачі

$$f_n + x^* \to \sup_X$$

мають розв'язки?

*Задача 2.* Аналогічне питання для зліченної сім'ї множин $\{X_n\}$.

*Задача 3.* Цікаво було б одержати результат типу теореми 4 для задачі векторної максимізації. З деякими результатами для задачі векторної мінімізації можна ознайомитися в [14].

Нехай $E$, $F$ — банахові простори, причому $F$ — напівупорядкований замкненим опуклим гострим конусом $K$, $f\colon E \to F$ — $K$-опуклий $K$-напівнеперервний знизу оператор, $X \subseteq E$. Припустимо, що задача пошуку $K$-максимальних точок множини $f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ не має розв'язків.

Коли можна стверджувати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ з $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$, що задача векторної максимізації

$$f + \mathcal{A} \to K - \sup_X$$

має розв'язок?

1. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – Москва: Мир, 1979. – 399 с.
2. *Behrends E.* New proofs of Rosenthal's $l^1$ theorem and the Josefson-Nissenzweig theorem // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. – 1995. – **43**. – P. 283–295.
3. *Семенов В. В., Ляшко С. И., Кацев М. В.* Замечания о достижимости супремума выпуклым функционалом // Пробл. управления и информатики. – 2006. – № 1–2. – С. 81–86.
4. *Ekeland I.* On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – **47**. – P. 324–353.
5. *Borwein J., Preiss D.* Smooth variational principle with applications to subdifferentiability of convex functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – **303**. – P. 517–527.
6. *Deville R.* Nouveaux principes variationnelles. Sem. Init. 'a l'Analyse (ed. G. Choquet, G. Godefroy, M. Rogalsky, J. Saint-Raymond). 30-e Anne's. – 1990. – **91**, No 21.
7. *Bishop E., Phelps R. R.* The support functional of a convex set. In: Convexity. Proc. Sym. Pure Math. (V. Klee, Ed.) // Amer. Math. Soc. – 1963. – **7**. – P. 27–35.
8. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Выща шк., 1980. – 215 с.
9. *Brondsted A., Rockafellar R. T.* On the subdifferentiability of convex functions // Proc. AMS. – 1965. – **16**. – P. 605–611.
10. *Stegall C.* Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces // Math. Ann. – 1978. – **236**. – P. 171–176.
11. *Lindenstrauss J.* On operators which attain their norm // Israel J. Math. – 1963. – **3**. – P. 139–148.
12. *Zizler V.* On some extremal problems in Banach spaces // Math. Scand. – 1973. – **32**. – P. 214–224.
13. *Семенов В. В.* Про щільність множин лінійних операторів та білінійних форм, що досягяють норми // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 294–296.
14. *Finet C.* Perturbed minimization principles in partially ordered Banach spaces. – Institut de Mathematique et d'Informatique. Universite de Mons-Hainaut. Preprint 2, 2000. – C. 1–16.

*Київський національний університет*
*ім. Тараса Шевченка*

*Надійшло до редакції 07.09.2006*