УДК 517.5

В. В. Миронюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ТА КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ АНІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We describe the Besov anisotropic spaces of periodic functions of several variables in terms of the decomposition representation and establish the exact-order estimates of the Kolmogorov widths and trigonometric approximations of functions from unit balls of these spaces in the spaces L_q.

В терминах декомпозиционного представления охарактеризованы анизотропные пространства Бесова периодических функций многих переменных и установлены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников и тригонометрических приближений функций из единичных шаров этих пространств в пространствах L_q.

1. Функціональні простори та класи. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leqslant p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Означимо кратну різницю порядку $l_j \in \mathbb{N}$ функції $f \in L_p(\pi_d)$ в точці $\boldsymbol{x}$ за змінною x_j з кроком $h_j \in \mathbb{R}$ згідно з формулою

$$\Delta_{h_j, j}^{l_j} f(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{l_j} (-1)^{k + l_j} C_{l_j}^k f(\boldsymbol{x} + k h_j \boldsymbol{e_j}),$$

де $C_{l_j}^k$ — біноміальні коефіцієнти, $\boldsymbol{e_j}$ — одиничний вектор, направлений вздовж осі x_j, $j = \overline{1, d}$.

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta_{h_j}^{l_j} f$, означимо модуль неперервності l_j-го порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$ за змінною x_j, який будемо позначати $\omega_l(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p$, згідно з формулою

$$\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p := \sup_{|h_j| \leqslant t} \left\| \Delta_{h_j, j}^{l_j} f \right\|_p.$$

При $d = 1$ модуль неперервності l-го порядку функції f будемо позначати $\omega_l(f, t)_p$.

Нехай $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_d) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < R_j < l_j$, $j = \overline{1, d}$. Тоді нормований простір $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, означається таким чином:

$$B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}} := \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}} := \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} |f|_{B_{x_j, p, \theta}^{R_j}} < \infty \right\}, \tag{1}$$

де

$$|f|_{B^{R_j}_{x_j,p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\omega_{l_j}(f,\boldsymbol{e_j},t)_p}{t^{R_j}} \right)^{\theta} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leqslant \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \dfrac{\omega_{l_j}(f,\boldsymbol{e_j},t)_p}{t^{R_j}}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ (а також їх аналоги в неперіодичному випадку), з дещо іншою заданою у них нормою, вперше було розглянуто О. В. Бєсовим [1]. У випадку $\theta = \infty$ вони збігаються з просторами $H^{\boldsymbol{R}}_p$, які було введено С. М. Нікольським [2]. Такі функціональні простори прийнято називати анізотропними, оскільки гладкісні властивості функцій із цих просторів, взагалі кажучи, неоднакові по кожній змінній. Якщо ж $\boldsymbol{R} = (r,\ldots,r) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < r < l$, $l \in \mathbb{N}$, то $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ називають ізотропними просторами Бєсова, які далі будемо позначати $B^r_{p,\theta}$.

Під поняттям „класи $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$" будемо розуміти одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \leqslant 1 \right\}.$$

Відповідно одиничні кулі у просторах $H^{\boldsymbol{R}}_p$ та $B^r_{p,\theta}$ позначатимемо $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$ та $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$.

2. Декомпозиційне зображення норми функцій із просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$. У цьому пункті встановлено еквівалентне з точністю до абсолютних сталих зображення норми функцій із просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ (теорема 1). Таке зображення (яке називають декомпозиційним) буде суттєво використовуватися при дослідженні апроксимативних характеристик. Зауважимо, що анізотропні простори Бєсова неперіодичних функцій багатьох змінних (аналоги просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$) з точки зору декомпозиційного опису досліджувались у роботах [1, 3, 4]. Більш детальну інформацію з цього питання можна знайти у книзі [5] (розділ 5).

Перш ніж перейти до формулювання отриманого результату наведемо необхідні позначення та допоміжні твердження, які будемо використовувати в процесі доведення.

Для $\boldsymbol{N} = (N_1,\ldots,N_d) \in \mathbb{N}^d$ розглянемо множину

$$K(\boldsymbol{N},d) := \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon |k_j| \leqslant N_j,\ j = \overline{1,d} \right\}$$

і через $T(\boldsymbol{N},d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік із $K(\boldsymbol{N},d)$:

$$T(\boldsymbol{N},d) = T(N_1,\ldots,N_d) := \left\{ g \colon g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in K(\boldsymbol{N},d)} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \right\},$$

де $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Далі для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$E_{\boldsymbol{N}}(f)_q = E_{N_1,\ldots,N_d}(f)_q := \inf_{g \in T(\boldsymbol{N},d)} \|f - g\|_q.$$

Величину $E_{\boldsymbol{N}}(f)_q$ називають найкращим наближенням функції f за допомогою тригонометричних поліномів із множини $T(\boldsymbol{N},d)$.

Далі запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2, які не залежать від одного істотного по контексту параметра у величинах A та B (наприклад, у наведеному нижче співвідношенні (8) — від функції f) і такі, що $C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$. Якщо тільки $B \leqslant C_2 A$ ($B \geqslant C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Також скрізь нижче запис $[a]$ означатиме цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$.

Теорема А (див., наприклад, [6], розділ 2). *Для довільного полінома $g \in T(\boldsymbol{N}, d)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ виконується порядкова нерівність*

$$\left\| \frac{\partial^{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} g(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} \right\|_p \ll \|g\|_p \prod_{j=1}^{d} N_j^{\alpha_j}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$.

Нерівність (2) називають узагальненою нерівністю Бернштейна.

Лема А (див., наприклад, [6], розділ 2). *Для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, має місце порядкова нерівність*

$$E_{\boldsymbol{N}}(f)_p \ll \sum_{j=1}^{d} \omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, N_j^{-1})_p, \qquad l_j \in \mathbb{N}.$$

Лема Б (див., наприклад, [6], розділ 2). *Нехай f — 2π-періодична неперервна функція, яка l_j разів неперервно диференційовна по змінній x_j. Тоді при $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

$$\left\| \Delta_{h_j, j}^{l_j} f \right\|_p \leqslant |h_j|^{l_j} \left\| \frac{\partial^{l_j} f}{\partial x_j^{l_j}} \right\|_p .$$

Тепер сформулюємо та доведемо отриманий результат.

Теорема 1. *Функція f належить простору $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці $L_p(\pi_d)$ рядом*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \qquad Q_s = Q_{[a_1^s], \ldots, [a_d^s]}, \tag{3}$$

де $a_j = b^{1/R_j}$, $b > 1$, $j = \overline{1, d}$, $Q_{[a_1^s], \ldots, [a_d^s]}$ — *тригонометричні поліноми із множини* $T(2[a_1^s], \ldots \ldots, 2[a_d^s])$, *що задовольняють умови*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|Q_s\|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty, \quad \text{якщо} \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{4}$$

і

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} b^s \|Q_s\|_p < \infty, \quad \text{якщо} \quad \theta = \infty. \tag{5}$$

Більш того, мають місце співвідношення

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}} \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|Q_s\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant \theta < \infty \tag{6}$$

і

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}} \ll \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} b^s \|Q_s\|_p \;\; \text{при} \;\; \theta = \infty. \tag{7}$$

Якщо ж, крім цього, частинні суми n-го порядку ряду (3) *реалізують найкраще наближення* $E_{[a_1^n],\ldots,[a_d^n]}(f)_p$ (*або принаймні його порядок*), *то*

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \quad \textit{при} \;\; 1 \leqslant \theta < \infty \tag{8}$$

і

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p \quad \textit{при} \quad \theta = \infty. \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай f належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ і $g_s \in T(2[a_1^s],\ldots,2[a_d^s])$, $s \in \in \mathbb{Z}_+$, — тригонометричні поліноми такі, що $E_{[a_1^s],\ldots,[a_d^s]}(f)_p \asymp \|f - g_s\|_p$. Покладемо

$$Q_0 = g_0, \qquad Q_s = g_s - g_{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Зрозуміло, що тоді $Q_s \in T(2[a_1^s],\ldots,2[a_d^s])$, причому в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\pi_d)$ справджується рівність

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s.$$

Покажемо справедливість умов (4) та (5). Враховуючи лему A, отримуємо

$$\|Q_0\|_p = \|g_0 - f + f\|_p \leqslant \|g_0 - f\|_p + \|f\|_p \ll \|f\|_p ,$$

$$\|Q_s\|_p = \|g_s - g_{s-1}\|_p \leqslant \|g_s - f\|_p + \|f - g_{s-1}\|_p \ll E_{[a_1^{s-1}],\ldots,[a_d^{s-1}]}(f)_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{d} \omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, [a_j^{s-1}]^{-1})_p \ll \sum_{j=1}^{d} \omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-s})_p, \qquad s \in \mathbb{N}.$$

Звідси, беручи до уваги нерівність $(x + y)^{\eta} \leqslant 2^{\eta}(x^{\eta} + y^{\eta})$, де $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\eta > 0$, маємо

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll \left(\|f\|_p^{\theta} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d} \int\limits_{a_j^{-s}}^{a_j^{-(s-1)}} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}}\right)^{\theta} \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}}\right)^{\theta} \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} = \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} < \infty, \qquad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{10}$$

і

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p \ll \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} \sup_{t>0} \frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}} = \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}} < \infty, \qquad \theta = \infty. \tag{11}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Покажемо справедливість співвідношень (6) та (7).

Нехай спочатку $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді за допомогою елементарних перетворень можемо записати

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}}\right)^\theta \frac{dt}{t} = \ln a_j \int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-u})_p}{a_j^{-uR_j}}\right)^\theta du =$$

$$= \ln a_j \sum_{N=0}^{\infty} \int\limits_N^{N+1} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-u})_p}{a_j^{-uR_j}}\right)^\theta du \ll \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p}{a_j^{-NR_j}}\right)^\theta . \tag{12}$$

Далі, оскільки

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s,$$

то

$$\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \omega_{l_j}(Q_s, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p \, . \tag{13}$$

Застосовуючи послідовно лему Б та узагальнену нерівність Бернштейна (2), маємо

$$\omega_{l_j}(Q_s, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p = \sup_{|h_j| \leqslant a_j^{-N}} \|\Delta_{h_j,j}^{l_j} Q_s\|_p \leqslant \sup_{|h_j| \leqslant a_j^{-N}} |h_j|^{l_j} \left\| \frac{\partial^{l_j} Q_s}{\partial x_j^{l_j}} \right\|_p \ll$$

$$\ll a_j^{-Nl_j} 2^{l_j} [a_j^s]^{l_j} \|Q_s\|_p \ll a_j^{(s-N)l_j} \|Q_s\|_p \qquad \text{при} \qquad s \leqslant N. \tag{14}$$

Якщо $s > N$, то

$$\omega_{l_j}(Q_s, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p \ll \|Q_s\|_p \, . \tag{15}$$

Тепер, беручи до уваги (13) – (15), отримуємо

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p}{a_j^{-NR_j}}\right)^\theta \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} a_j^{(s-N)l_j} \|Q_s\|_p + \sum_{s=N+1}^{\infty} \|Q_s\|_p\right)^\theta \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} a_j^{(s-N)l_j} \|Q_s\|_p\right)^\theta + \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta} \left(\sum_{s=N+1}^{\infty} \|Q_s\|_p\right)^\theta =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{16}$$

Оцінимо кожен із доданків у (16). Виберемо $\beta > 0$ і $\gamma > R_j$ таким чином, щоб $\gamma + \beta < l_j$. Тоді згідно з нерівністю Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$) одержуємо

$$I_1 = \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} a_j^{(s-N)\beta} a_j^{(s-N)(l_j-\beta)} \|Q_s\|_p\right)^\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} a_j^{(s-N)\beta\theta'}\right)^{\theta/\theta'} \left(\sum_{s=0}^{N} a_j^{(s-N)(l_j-\beta)\theta} \|Q_s\|_p^\theta\right)^{\theta/\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{N} b^{N\theta} a_j^{(s-N)(l_j-\beta)\theta}\|Q_s\|_p^\theta = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{N=s}^{\infty} b^{N\theta} a_j^{(s-N)(l_j-\beta)\theta}\|Q_s\|_p^\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{N=s}^{\infty} b^{s\theta} a_j^{(N-s)\gamma\theta} a_j^{(s-N)(l_j-\beta)\theta}\|Q_s\|_p^\theta =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta \sum_{N=s}^{\infty} a_j^{(s-N)(l_j-\beta-\gamma)\theta} \ll \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta, \tag{17}$$

де $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$.

Тепер перейдемо до оцінки величини I_2. Нехай $0<\delta<\alpha<R_j$. Тоді знову, використавши нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta=1$), будемо мати

$$I_2 = \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta}\left(\sum_{s=N+1}^{\infty} a_j^{(N-s)\delta} a_j^{(s-N)\delta}\|Q_s\|_p\right)^\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N=0}^{\infty} b^{N\theta}\left(\sum_{s=N+1}^{\infty} a_j^{(N-s)\delta\theta'}\right)^{\theta/\theta'}\left(\sum_{s=N+1}^{\infty} a_j^{(s-N)\delta\theta}\|Q_s\|_p^\theta\right)^{\theta/\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s=N+1}^{\infty} b^{N\theta} a_j^{(s-N)\delta\theta}\|Q_s\|_p^\theta = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{s-1} b^{N\theta} a_j^{(s-N)\delta\theta}\|Q_s\|_p^\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{s-1} b^{s\theta} a_j^{(N-s)\alpha\theta} a_j^{(s-N)\delta\theta}\|Q_s\|_p^\theta =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta \sum_{N=0}^{s-1} a_j^{(N-s)(\alpha-\delta)\theta} \ll \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta, \tag{18}$$

де $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$.

Отже, враховуючи (12) та (16) – (18), отримуємо

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega_{l_j}(f,\boldsymbol{e_j},t)_p}{t^{R_j}}\right)^\theta \frac{dt}{t} \ll \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta. \tag{19}$$

Для подальших міркувань оцінимо зверху $\|f\|_p$ та $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\omega_{l_j}(f,\boldsymbol{e_j},t)_p}{t^{R_j}}\right)^\theta \frac{dt}{t}$.

Використовуючи нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta=1$) маємо

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{s=0}^{\infty}\|Q_s\|_p \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{-s\theta'}\right)^{1/\theta'}\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta}. \tag{20}$$

Беручи до уваги нерівність $\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p \ll \|f\|_p$ та співвідношення (20), одержуємо

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}}\right)^\theta \frac{dt}{t} \ll \int\limits_1^\infty \frac{\|f\|_p^\theta}{t^{R_j\theta+1}}\, dt \ll \sum_{s=0}^\infty b^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta\,. \tag{21}$$

Таким чином, із (19)–(21) випливає (6).

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, як і у випадку $1 \leqslant \theta < \infty$, отримуємо

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{s=0}^\infty \|Q_s\|_p \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p \sum_{s=0}^\infty b^{-s} \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p \tag{22}$$

і

$$\sup_{t>0} \frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}} \ll \sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p}{b^{-N}} + \sup_{t>1} \frac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j}} \ll$$

$$\ll \sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \sum_{s=0}^\infty b^N \omega_{l_j}(Q_s, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-N})_p + \sup_{t>1}\frac{\|f\|_p}{t^{R_j}} \ll$$

$$\ll \sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{s=0}^N b^N a_j^{(s-N)l_j}\|Q_s\|_p + \sum_{s=N+1}^\infty b^N\|Q_s\|_p\right) + \|f\|_p \ll$$

$$\ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p \sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{s=0}^N a_j^{(s-N)(l_j-R_j)} + \sum_{s=N+1}^\infty b^{(N-s)} + 1\right) \ll$$

$$\ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} b^s\|Q_s\|_p\,. \tag{23}$$

З (22) та (23) випливає (7) і, таким чином, достатність доведено.

У випадку, коли частинні суми n-го порядку ряду (3) реалізують найкраще наближення $E_{[a_1^n],\ldots,[a_d^n]}(f)_p$ (або принаймні його порядок), використовуючи лему А, одержуємо

$$\|Q_0\|_p = \|Q_0 - f + f\|_p \leqslant \|Q_0 - f\|_p + \|f\|_p \ll \|f\|_p\,,$$

$$\|Q_n\|_p = \left\|\sum_{s=0}^n Q_s - \sum_{s=0}^{n-1} Q_s\right\|_p \leqslant \left\|\sum_{s=0}^n Q_s - f\right\|_p + \left\|f - \sum_{s=0}^{n-1} Q_s\right\|_p \ll$$

$$\ll E_{[a_1^{n-1}],\ldots,[a_d^{n-1}]}(f)_p \ll \sum_{j=1}^d \omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, [a_j^{n-1}]^{-1})_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^d \omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, a_j^{-n})_p, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Але тоді, як показано вище, виконуються порядкові нерівності (10) та (11), тому, беручи до уваги (6) та (7), отримуємо (8) та (9) відповідно.

Теорему доведено.

Нижче при дослідженні апроксимативних характеристик ми будемо використовувати теорему 1 у випадку, коли поліноми Q_s побудовані на основі ядер Валле Пуссена. Для того щоб розглянути цей випадок, наведемо необхідні позначення.

Нехай $\boldsymbol{R} = (R_1, \dots, R_d),\ R_j > 0,\ j = \overline{1, d},$ — вектор із означених вище просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$,

$$g(\boldsymbol{R}) := \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{R_j}\right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{g(\boldsymbol{R})}{\boldsymbol{R}} := \left(\frac{g(\boldsymbol{R})}{R_1}, \dots, \frac{g(\boldsymbol{R})}{R_d}\right) := (\rho_1, \dots, \rho_d),$$

$$2^{\boldsymbol{\rho} n} := (2^{\rho_1 n}, \dots, 2^{\rho_d n}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$[2^{\boldsymbol{\rho} n}] := ([2^{\rho_1 n}], \dots, [2^{\rho_d n}]).$$

Позначимо через V_m, $m \in \mathbb{N}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{2m-k}{m} \cos kt, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді в точці $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ багатовимірне ядро Валле Пуссена $V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^{d} V_{N_j}(x_j).$$

Далі через $\mathbb{V}(f, \boldsymbol{R}, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, позначимо згортку функції $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, з багатовимірним ядром $V_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}$, тобто

$$\mathbb{V}(f, \boldsymbol{R}, n)(\boldsymbol{x}) := \left(f * V_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}\right)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) V_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

і покладемо

$$\sigma(f, \boldsymbol{R}, 0) := \mathbb{V}(f, \boldsymbol{R}, 0), \ \ \sigma(f, \boldsymbol{R}, s) := \mathbb{V}(f, \boldsymbol{R}, s) - \mathbb{V}(f, \boldsymbol{R}, s-1), \qquad s \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що довільну функцію $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\pi_d)$ можна зобразити у вигляді ряду (див., наприклад, [6], розділ 2)

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma(f, \boldsymbol{R}, s),$$

частинні суми n-го порядку якого реалізують порядок найкращого наближення $E_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(f)_p$.

Таким чином, у прийнятих позначеннях із теореми 1 випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Функція f належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \|\sigma(f, \boldsymbol{R}, s)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \|\sigma(f, \boldsymbol{R}, s)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{24}$$

Відповідно функція f *належить простору* $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma(f, \boldsymbol{R}, s)\|_p < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma(f, \boldsymbol{R}, s)\|_p .$$

***Зауваження* 1.** При $\theta = \infty$ наслідок 1 отримав В. М. Темляков [6] (розділ 2).

Зазначимо, що з урахуванням нерівностей

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} |\nu_s| \leqslant \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \leqslant \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta} \right)^{1/\theta}, \qquad 1 \leqslant \theta < \theta' < \infty,$$

які виконуються для будь-якої послідовності чисел $\{\nu_s\}_{s=0}^\infty$ (див., наприклад, [5, с. 149]), із наслідку 1 випливають вкладення

$$B^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta'} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{R}}_p, \qquad 1 < \theta < \theta' < \infty. \tag{25}$$

3. Тригонометричні наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\theta}}$ у просторах $\boldsymbol{L_q}$. Спочатку означимо апроксимативні характеристики, які будемо досліджувати у цьому пункті.

Нехай $S(f, \boldsymbol{R}, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, позначає кратну суму Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$, яка визначається таким чином:

$$S(f, \boldsymbol{R}, n)(\boldsymbol{x}) := \left(f * D_{[2^{\rho n}]}\right)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) D_{[2^{\rho n}]}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

де

$$D_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^{d} D_{N_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N_j} \cos k x_j \right), \qquad \boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d,$$

— багатовимірне ядро Діріхле.

Для функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$E^{\boldsymbol{R}}_n(f)_q = E_{[2^{\rho n}]}(f)_q, \qquad \mathcal{E}^{\boldsymbol{R}}_n(f)_q = \|f - S(f, \boldsymbol{R}, n)\|_q$$

і для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ розглянемо апроксимативні характеристики

$$E^{\boldsymbol{R}}_n(F)_q := \sup_{f \in F} E^{\boldsymbol{R}}_n(f)_q \tag{26}$$

та

$$\mathcal{E}^{\boldsymbol{R}}_n(F)_q := \sup_{f \in F} \mathcal{E}^{\boldsymbol{R}}_n(f)_q . \tag{27}$$

Задача полягає у знаходженні точних за порядком оцінок величин (26) та (27) при умові, що роль класу F відіграє $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Зауважимо, що при $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$, порядкові оцінки відповідних величин встановив В. М. Темляков (див. [6], розділ 2). Виділимо цей результат і подамо його у вигляді двох тверджень.

Теорема Б. *Нехай* $1 \leqslant p,\, q \leqslant \infty$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. *Тоді має місце порядкова оцінка*

$$E_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{H}_p^{\boldsymbol{R}})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R}) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+\right)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема В. *Нехай* $1 \leqslant p,\, q \leqslant \infty$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. *Тоді має місце порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{H}_p^{\boldsymbol{R}})_q \asymp \begin{cases} n^d 2^{-ng(\boldsymbol{R})}, & (p,q) \in \{(1,1),\, (\infty,\infty)\}, \\ 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R}) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+\right)} & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Тепер сформулюємо та доведемо отримані результати.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leqslant p,\, q \leqslant \infty$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta < \infty$ *має місце порядкова оцінка*

$$E_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R}) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+\right)}, \tag{28}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що оцінка зверху в (28) випливає із теореми Б внаслідок вкладення (25). Оцінку знизу в (28), знову-таки внаслідок вкладення (25), достатньо встановити при $\theta = 1$. З цією метою в залежності від того, яких значень набувають параметри p і q, розглянемо два випадки. При цьому відмітимо, що метод отримання оцінок знизу буде базуватись на побудові екстремальних функцій.

1. Нехай спочатку $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. В цьому випадку розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_3 2^{-\left(g(\boldsymbol{R}) + 1 - \frac{1}{p}\right)n} \prod_{k=1}^{d} v_{n_k}(x_k),$$

де $v_{n_k}(x_k) = V_{2^{n_k+1}}(x_k) - V_{2^{n_k}}(x_k)$, $n_k = [ng(\boldsymbol{R})/R_k] + 1$, $C_3 > 0$. Покажемо, що $f_1 \in \mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}}$ при деякому виборі сталої $C_3 > 0$. Для цього оцінимо зверху $\|f_1\|_p$ та $|f_1|_{B_{x_j,p,1}^{R_j}}$, $j = \overline{1,d}$.

Беручи до уваги порядкову оцінку (див., наприклад, [7, с. 66])

$$\|v_{n_k}\|_p \asymp 2^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)n_k}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

маємо

$$\|f_1\|_p \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R}) + 1 - \frac{1}{p}\right)n} \prod_{k=1}^{d} \|v_{n_k}\|_p \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R}) + 1 - \frac{1}{p}\right)n} \prod_{k=1}^{d} 2^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)n_k} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R}) + 1 - \frac{1}{p}\right)n} \prod_{k=1}^{d} 2^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)ng(\boldsymbol{R})/R_k} \asymp 2^{-g(\boldsymbol{R})n} < 1. \tag{29}$$

Далі

$$|f_1|_{B^{R_j}_{x_j,p,1}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\omega_{l_j}(f_1, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{R_j+1}}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sup\limits_{|h_j|\leqslant t} \left\| \sum_{k=0}^{l_j} (-1)^{k+l_j} C_{l_j}^k f_1(\boldsymbol{x} + kh_j\boldsymbol{e_j}) \right\|_p}{t^{R_j+1}}\, dt \asymp$$

$$\asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \|v_{n_k}\|_p \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sup\limits_{|h_j|\leqslant t} \left\| \sum_{k=0}^{l_j} (-1)^{k+l_j} C_{l_j}^k v_{n_j}(x_j + kh_j) \right\|_p}{t^{R_j+1}}\, dt \asymp$$

$$\asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \|v_{n_k}\|_p \int\limits_0^{+\infty} \frac{\omega_{l_j}(v_{n_j}, t)_p}{t^{R_j+1}}\, dt =$$

$$= 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \|v_{n_k}\|_p \left(\|v_{n_j}\|_p + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\omega_{l_j}(v_{n_j}, t)_p}{t^{R_j+1}}\, dt - \|v_{n_j}\|_p \right). \qquad (30)$$

Щоб продовжити оцінку (30), скористаємося співвідношенням (24) при $d = 1$. Тоді

$$|f_1|_{B^{R_j}_{x_j,p,1}} \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \|v_{n_k}\|_p \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sR_j} \|\sigma(v_{n_j}, s)\|_p - \|v_{n_j}\|_p \right) =$$

$$= 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} \|v_{n_k}\|_p \left(\sum_{s=n_j}^{n_j+2} 2^{sR_j} \|\sigma(v_{n_j}, s)\|_p - \|v_{n_j}\|_p \right) \ll$$

$$\ll 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} 2^{n_jR_j} \prod_{k=1}^{d} \|v_{n_k}\|_p \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} 2^{ng(\boldsymbol{R})} 2^{\left(1-\frac{1}{p}\right)n} = 1. \qquad (31)$$

Отже, враховуючи (29) та (31), із (1) отримуємо, що функція f_1 при відповідному виборі сталої $C_3 > 0$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Нехай далі $g_n^* \in T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ — поліном найкращого наближення функції f_1 підпростором $T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$. Тоді, з одного боку, використовуючи позначення $(f, g) := (2\pi)^{-d} \int_{\pi^d} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$, на підставі нерівності Гельдера можемо записати

$$\left(f_1 - g_n^*, \prod_{k=1}^{d} v_{n_k} \right) \leqslant \|f_1 - g_n^*\|_q \prod_{k=1}^{d} \|v_{n_k}\|_{q'} \asymp$$

$$\asymp \|f_1 - g_n^*\|_q \prod_{k=1}^{d} 2^{\left(1-\frac{1}{q'}\right)n_k} \asymp 2^{\frac{n}{q}} E_n^{\boldsymbol{R}}(f_1)_q\,, \qquad (32)$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. З іншого боку,

$$\left(f_1 - g_n^*, \prod_{k=1}^{d} v_{n_k}\right) = \left(f_1, \prod_{k=1}^{d} v_{n_k}\right) \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)n} \prod_{k=1}^{d} \|v_{n_k}\|_2^2 \asymp 2^{-\left(g(\boldsymbol{R})-\frac{1}{p}\right)n}. \qquad (33)$$

Таким чином, співставляючи (32) та (33), одержуємо

$$E_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}})_q \geqslant E_n^{\boldsymbol{R}}(f_1)_q \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

2. Нехай тепер $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_4 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \prod_{k=1}^{d} e^{i2^{n_k}x_k},$$

де $n_k = [ng(\boldsymbol{R})/R_k] + 1$, $C_4 > 0$. Як і у випадку 1, можна показати, що f_2 належить $\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}}$ при деякому виборі сталої $C_4 > 0$.

Нехай далі $g_n^{**} \in T([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d)$ — поліном найкращого наближення функції f_2 підпростором $T([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d)$. Тоді, з одного боку, внаслідок нерівності Гельдера можемо записати

$$\left(f_2 - g_n^{**}, \prod_{k=1}^{d} e^{i2^{n_k}x_k}\right) \leqslant \|f_2 - g_n^{**}\|_q \prod_{k=1}^{d} \|e^{i2^{n_k}x_k}\|_{q'} = \|f_2 - g_n^{**}\|_q = E_n^{\boldsymbol{R}}(f_2)_q\,, \qquad (34)$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. З іншого боку,

$$\left(f_2 - g_n^{**}, \prod_{k=1}^{d} e^{i2^{n_k}x_k}\right) = \left(f_2, \prod_{k=1}^{d} e^{i2^{n_k}x_k}\right) \asymp 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \prod_{k=1}^{d} \|e^{i2^{n_k}x_k}\|_2^2 \asymp 2^{-ng(\boldsymbol{R})}. \qquad (35)$$

Таким чином, співставляючи (34) та (35), одержуємо

$$E_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}})_q \geqslant E_n^{\boldsymbol{R}}(f_2)_q \gg 2^{-ng(\boldsymbol{R})}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** Для ізотропних класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^{r}$ порядкову оцінку (28) отримав А. С. Романюк [8].

Теорема 3. *Нехай* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta < \infty$ *має місце порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}})_q \asymp \begin{cases} n^d 2^{-ng(\boldsymbol{R})}, & (p,q) \in \{(1,1),\ (\infty,\infty)\}, \\ 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+\right)} & \textit{в інших випадках}, \end{cases} \qquad (36)$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Внаслідок вкладення (25) оцінки зверху в (36) випливають із відповідних оцінок на класах Нікольського (див. теорему B), а оцінки знизу достатньо встановити при $\theta = 1$. З цією метою в залежності від того, яких значень набувають параметри p і q, розглянемо кілька випадків.

1. Якщо $(p,q)\notin\{(1,1),(\infty,\infty)\}$, то оцінка знизу в (36) випливає із теореми 1 внаслідок очевидної нерівності $E_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta})_q\leqslant\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta})_q$.

2. Нехай тепер $(p,q)=(1,1)$. Розглянемо тригонометричний поліном

$$\varphi_m(t)=\sum_{|k|\leqslant m}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)e^{i(k+m)t},\qquad t\in\mathbb{R},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Використовуючи міркування, аналогічні до тих, які проводились у роботі [9], можна показати, що φ_m задовольняє такі умови:

1) $\|\varphi_m\|_1=1$;

2) $\|S_m(\varphi_m)\|_1\gg\ln(m+1)$, де $S_m(\varphi_m)=\varphi_m*D_m$;

3) $C_5m^{-r}\varphi_m\in\mathbb{B}^r_{1,1}$ при деякому виборі сталої $C_5>0$.

Далі, поклавши $N_k=[2^{\rho_kn}]$, $k=\overline{1,d}$, розглянемо функцію

$$f_3(\boldsymbol{x})=C_62^{-ng(\boldsymbol{R})}\prod_{k=1}^d\varphi_{N_k}(x_k)$$

та покажемо, що вона при деякому виборі сталої $C_6>0$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,1}$.

Маємо

$$\|f_3\|_1\asymp2^{-ng(\boldsymbol{R})}\prod_{k=1}^d\|\varphi_{N_k}\|_1=2^{-ng(\boldsymbol{R})}<1 \tag{37}$$

і

$$|f_3|_{B^{R_j}_{x_j,p,1}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega_{l_j}(f_3,\boldsymbol{e_j},t)_p}{t^{R_j+1}}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sup\limits_{|h_j|\leqslant t}\left\|\sum_{k=0}^{l_j}(-1)^{k+l_j}C^k_{l_j}f_3(\boldsymbol{x}+kh_j\boldsymbol{e_j})\right\|_p}{t^{R_j+1}}\,dt\asymp$$

$$\asymp2^{-ng(\boldsymbol{R})}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^d\|\varphi_{N_k}\|_p\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sup\limits_{|h_j|\leqslant t}\left\|\sum_{k=0}^{l_j}(-1)^{k+l_j}C^k_{l_j}\varphi_{N_j}(x_j+kh_j)\right\|_p}{t^{R_j+1}}\,dt\asymp$$

$$\asymp2^{-ng(\boldsymbol{R})}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega_{l_j}(\varphi_{N_j},t)_p}{t^{R_j+1}}\,dt\asymp2^{-ng(\boldsymbol{R})}N_j^{R_j}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega_{l_j}(N_j^{-R_j}\varphi_{N_j},t)_p}{t^{R_j+1}}\,dt\ll$$

$$\ll2^{-ng(\boldsymbol{R})}2^{ng(\boldsymbol{R})}=1. \tag{38}$$

Отже, враховуючи (37) та (38), із (1) отримуємо, що функція f_3 при відповідному виборі сталої $C_6>0$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,1}$. Звідси

$$\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta})_1\geqslant\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(f_3)_1=\|f_3-S(f_3,\boldsymbol{R},n)\|_1\geqslant\big|\|S(f_3,\boldsymbol{R},n)\|_1-\|f_3\|_1\big|\asymp$$

$$\asymp2^{-ng(\boldsymbol{R})}\left|\prod_{k=1}^d\|S_{N_k}(\varphi_{N_k})\|_1-1\right|\gg2^{-ng(\boldsymbol{R})}\prod_{k=1}^d\ln(N_k+1)\asymp n^d2^{-ng(\boldsymbol{R})}.$$

3. При $(p,q)=(\infty,\infty)$ розглянемо тригонометричний поліном

$$\psi_m(t)=\sum_{|k|=1}^{m}\frac{e^{i(k+2m+2)t}}{m+1-|k|}+\sum_{|k|=m+2}^{2m+1}\frac{e^{i(k+2m+2)t}}{m+1-|k|},\qquad t\in\mathbb{R},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Використовуючи міркування, аналогічні до тих, які проводились у роботі [10], можна показати, що ψ_m задовольняє такі умови:

1) $\|\psi_m\|_\infty=C_7,\ C_7>0$;

2) $\|S_m(\psi_m)\|_\infty\gg\ln(m+1)$, де $S_m(\psi_m)=\psi_m*D_m$;

3) $C_8m^{-r}\psi_m\in\mathbb{B}^r_{\infty,1}$ при деякому виборі сталої $C_8>0$.

Далі, поклавши $N_k=[2^{\rho_k n}]$, $k=\overline{1,d}$, розглянемо функцію

$$f_4(\boldsymbol{x})=C_9 2^{-ng(\boldsymbol{R})}\prod_{k=1}^{d}\psi_{N_k}(x_k),\qquad C_9>0.$$

Так само, як і у випадку 2, одержимо, що f_4 при відповідному виборі сталої $C_9>0$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{\infty,1}$ і при цьому має місце співвідношення

$$\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{\infty,\theta})_\infty\geqslant\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{R}}(f_4)_\infty\gg n^d2^{-ng(\boldsymbol{R})}.$$

Таким чином, оцінки знизу в усіх випадках встановлено, а разом з цим теорему доведено.

***Зауваження* 3.** Для ізотропних класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ порядкову оцінку (36) було отримано у роботах [8, 10]. Зокрема, при $(p,q)\notin\{(1,1),(\infty,\infty)\}$ або $(p,q)=(1,1)$ і $d=1$ це було зроблено у роботі [8], а при $(p,q)=(\infty,\infty)$ або $(p,q)=(1,1)$ і $d\geqslant2$ — в [10].

4. Колмогоровські поперечники класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{p,\theta}}$ у просторах $\boldsymbol{L_q}$. Нагадаємо спочатку означення поперечника, введеного А. М. Колмогоровим [11]. Нехай Φ — центрально-симетрична множина банахового простору $\mathcal{X}$. Величина

$$d_m(\Phi,\mathcal{X}):=\inf_{L_m\subset\mathfrak{L}_m}\sup_{f\in\Phi}\inf_{u\in L_m}\|f-u\|_{\mathcal{X}},$$

де $\mathfrak{L}_m$ — сукупність усіх підпросторів L_m розмірності m у просторі $\mathcal{X}$, називається колмогоровським поперечником множини Φ у просторі $\mathcal{X}$. Якщо існує підпростір L_m^*, на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок), то його називають екстремальним підпростором.

Метою цього пункту є знаходження точних за порядком оцінок величин $d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta},L_q)$ у випадку $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant\theta<\infty$. Зазначимо, що при $\theta=\infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$, порядкові оцінки відповідних величин раніше отримав В. М. Темляков. Цей результат можна сформулювати у вигляді такого твердження (див. [6], розділ 2).

Теорема Г. *Нехай $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ і $g(\boldsymbol{R})>0$. Тоді має місце порядкова оцінка*

$$d_m(\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p,L_q)\asymp m^{-g(\boldsymbol{R})}.$$

Наведемо ще одне допоміжне твердження, яке знадобиться при доведенні отриманого результату.

Теорема Д (див. [6], розділ 2). *Нехай $\varepsilon>0$ і підпростір $\Psi\subset T(\boldsymbol{N},d)$ є таким, що його розмірність $\dim\Psi\geqslant\varepsilon\prod_{j=1}^{d}(2N_j+1)$. Тоді існує поліном $\psi\in\Psi$, який задовольняє умови*

$$\|\psi\|_\infty=1,\qquad\|\psi\|_2\geqslant C(\varepsilon,d)>0.$$

Тепер перейдемо до формулювання та доведення отриманого результату.

Теорема 4. *Нехай* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > 0$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta < \infty$ *має місце порядкова оцінка*

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})}. \tag{39}$$

Доведення. Оцінка зверху в (39) відразу випливає із теореми Г внаслідок вкладення (25), а оцінку знизу достатньо встановити при $\theta = 1$.

Нехай в $L_1(\pi_d)$ задано довільну систему функцій $\{u_j\}_{j=1}^m$. Підберемо число $n = n(m)$ таким чином, щоб

$$\dim T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d) \geqslant 2m \geqslant \dim T([2^{\boldsymbol{\rho}(n-1)}], d).$$

Зрозуміло, що тоді $2^n \asymp m$.

Розглянемо далі підпростір

$$\Psi = \left\{ g \in T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d) \colon (g, u_j) = 0, \ j = \overline{1, m} \right\}.$$

Згідно із теоремою Д, існує поліном $\psi \in \Psi$ такий, що

$$\|\psi\|_\infty = 1, \qquad \|\psi\|_2 \geqslant C_{10} > 0.$$

Покладемо $f_5(\boldsymbol{x}) = C_{11} 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \psi(\boldsymbol{x})$ і покажемо, що f_5 належить $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$ при деякому виборі сталої $C_{11} > 0$.

Оскільки $\sigma(f, \boldsymbol{R}, s) = f * \Big(V_{[2^{\boldsymbol{\rho} s}]} - V_{[2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}]}\Big)$, то внаслідок ортогональності тригонометричної системи функцій $\sigma(f, \boldsymbol{R}, s) = 0$ для довільної функції f, „номери гармонік" якої не належать множині $K(2[2^{\boldsymbol{\rho} s}], d) \backslash K([2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}], d)$. Звідси, зокрема, $\sigma(f_5, \boldsymbol{R}, s) = 0$ при $s \geqslant n+1$. Але тоді, використавши співвідношення (24), будемо мати

$$\|f_5\|_{\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}} \asymp \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma(f_5, \boldsymbol{R}, s)\|_p = \sum_{s=0}^{n} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma(f_5, \boldsymbol{R}, s)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} \|\psi\|_p \leqslant \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} \|\psi\|_\infty = C_{12}, \qquad C_{12} > 0.$$

Отже, $f_5 \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$ при деякому виборі сталої $C_{11} > 0$.

Тепер для довільного полінома u, побудованого на базі системи функцій $\{u_j\}_{j=1}^m$, згідно з нерівністю Гельдера маємо

$$\|f_5 - u\|_q \geqslant \|f_5 - u\|_1 = \|f_5 - u\|_1 \|\psi\|_\infty \geqslant (f_5 - u, \psi) = (f_5, \psi) \asymp$$

$$\asymp 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \|\psi\|_2^2 \gg m^{-g(\boldsymbol{R})}.$$

З останнього співвідношення випливає оцінка знизу в (39).

Теорему доведено.

Зауваження **4.** Для ізотропних класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ оцінку (39) для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ, r, d встановлено у роботах [12 – 14] (див. також [15]).

Зауваження **5.** Порівнюючи теореми 2 і 4, приходимо до висновку, що у випадку $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $g(R) > 0$ підпростір $T([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ є екстремальним підпростором для наближення функцій із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$.

1. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi,\ j = 1, ..., n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
4. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
6. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
8. *Романюк А. С.* Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 263 – 278.
9. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 3. – С. 429 – 442.
10. *Миронюк В. В.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Фур'є у просторі L_p при $p = 1, \infty$ // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1204 – 1213.
11. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – P. 107 – 110.
12. *Романюк А. С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 222 – 236.
13. *Романюк А. С.* О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих пременных // Исследования по теории приближения функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1991. – С. 86 – 92.
14. *Романюк А. С.* Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 1. – С. 71 – 96.
15. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.

Одержано 29.10.13