УДК 517.98+517.954

Ю. В. Богданский, Я. Ю. Санжаревский
(Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ЛАПЛАСИАНОМ ПО МЕРЕ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We study the Dirichlet problem for a specified class of elliptic equations in the region of a Hilbert space, which is agreed with a given Borel measure.

В області гільбертового простору, що погоджена із заданою борелівською мірою, досліджено задачу Діріхле для визначеного класу еліптичних рівнянь.

1. Предварительные сведения. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство $(\dim H \leqslant \infty)$, μ — конечная (неотрицательная) борелевская мера на H.

Обозначим через $C_b = C_b(H)$ пространство всех ограниченных и непрерывных функций $f \colon H \to \mathbb{R}$, через $C_b(H;H)$ пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей $H \to H$, через $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)$) пространство всех функций $f \in C_b$ (соответственно векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)$), дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с непрерывной и ограниченной на всем H производной $f'(\cdot)$ $\big($соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)\big)$.

Пусть G — ограниченная область в пространстве H с границей $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на все H до функций класса C_b^1; символом $C_0^1(G)$ обозначим семейство функций из $C^1(G)$, носители которых лежат в G. Аналогично определяем $C(G)$ и $C(G;H)$.

Через $L_2(G) = L_2(G,\mu)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом измеримых функций на G по отношению к мере $\mu|_G$. Аналогично через $L_2(G;H) = L_2(G;H,\mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых векторных полей на G. Норму в $L_2(G;H)$ задаем формулой $\|\mathbf{Z}\|^2 = \int_G \|\mathbf{Z}(x)\|^2 d\mu$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера).

Граница S области G предполагается гладким вложенным в H подмногообразием коразмерности 1, а поле единичной внешней нормали границы S предполагается продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$.

Пусть $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{n}}$ — поток векторного поля $\mathbf{n}$. Предполагаем дифференцируемость меры μ относительно поля $\mathbf{n}$ в сильном смысле: для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ существует предел $\vartheta(A) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)\big)$, откуда следует, что $\vartheta = \mathrm{d}_{\mathbf{n}}\, \mu$ является борелевской мерой (знакопеременной), абсолютно непрерывной относительно μ. Логарифмическую производную меры μ относительно поля $\mathbf{n}$ обозначим символом $\rho_\mu = \rho_\mu^{\mathbf{n}}$ $\left(= \dfrac{d\vartheta}{d\mu} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{n}\right)$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о „согласованности S с мерой μ” (см. [1]).

Пусть $\varepsilon > 0$. Символом S_ε обозначим ε-окрестность множества S. В работе [2] (формула (13)) доказано, что при согласованности S с мерой μ имеет место равенство $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to \to 0)$, а потому ([1], предложение 1) $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную меру [1, 2], которую обозначим через μ_S.

Рассматривается оператор $\mathbf{grad} : L_2(G) \to L_2(G;H)$ с естественной областью определения $C^1(G)$ ($C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in C(G;\,H)$). Для корректного задания этого оператора следует проверить, что условия $u, v \in C^1(G)$; $u = v (\mathrm{mod}\, \mu)$ влекут за собой равенство $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v\, (\mathrm{mod}\, \mu)$. Данное требование выполнено для тех мер μ, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества U. Последнее условие выполнено для квазиинвариантной меры μ, т. е. такой меры μ, для которой множество квазиинвариантных сдвигов h $\big(\mu_h(A) := \mu(A+h),\ \mu_h \sim \mu\big)$ содержит плотное в H линейное подмногообразие $\mathcal{L}$. Примером такой меры является гауссова мера $\mu = \mu_A$ в H, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Дальнейшие построения предполагают выполнение следующих двух дополнительных условий на меру μ:

а) оператор $\mathbf{grad} : L_2(G) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G;H)$ с областью определения $C^1(G)$ корректно определен (т. е. из условий $u, v \in C^1(G)$, $u = v\ (\mathrm{mod}\, \mu)$ следует, что $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v\, (\mathrm{mod}\, \mu)$) и допускает замыкание;

б) $\rho_\mu^{\mathbf{n}}\big|_G \in L_\infty(G)$.

Модельный пример меры, согласованной с поверхностью S, для которой выполняются также одновременно условия а) и б), предложен в заключительной части работы.

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа γ: $L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S, \mu_S)$ с областью определения $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ (см. [1]). При этом для функций $u \in C^1(G)\colon \gamma(u) = u|_S$; оператор следа γ представляет собой ограниченный оператор из банахова в норме графика пространства $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ в $L_2(S)$.

Оператор $\mathrm{div}\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ определен формулой $\mathrm{div} = -\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\mathrm{Ker}\,\gamma}\big)^*$. Оператор Лапласа введем формулой $\triangle u = \mathrm{div} \circ \overline{\mathbf{grad}}\, u$.

2. Исследование задачи Дирихле. В данном пункте предполагаем согласованность границы S ограниченной области G с мерой μ и выполнение условий а) и б), наложенных на меру μ.

Лемма 1. *Пусть* $u \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$, $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $u \cdot \varphi \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ *и при этом* $\overline{\mathbf{grad}}\,(u\varphi) = u\,\mathbf{grad}\,\varphi + \varphi\,\overline{\mathbf{grad}}\,u$.

Доказательство. Пусть последовательность $u_n \in C^1(G)$ такова, что $u_n \to u$ (в $L_2(G)$), $\mathbf{grad}\, u_n \to \mathbf{Z} = \overline{\mathbf{grad}}\, u$ (в $L_2(G;H)$). Поскольку $\varphi \in L_\infty(G)$, имеют место соотношения $u_n \cdot \varphi \to u \cdot \varphi$, $\mathbf{grad}\,(u_n \cdot \varphi) = \mathbf{grad}\, u_n \cdot \varphi + u_n \cdot \mathbf{grad}\,\varphi \to \varphi \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u + u \cdot \mathbf{grad}\,\varphi$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $u \cdot \varphi \in \mathrm{Ker}\,\gamma$.

Доказательство. Поскольку $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, существует последовательность $u_n \in C^1(G)$, для которой $u_n \to u$, $\mathbf{grad}\, u_n \to \overline{\mathbf{grad}}\, u$, $u_n|_S \to 0$ в $L_2(S)$. Но тогда $u_n\varphi \to u \cdot \varphi$, $\mathbf{grad}\,(u_n \cdot \varphi) \to$ $\to \overline{\mathbf{grad}}\,(u\varphi)$, $(u_n \cdot \varphi)|_S = u_n|_S \cdot \varphi|_S \to 0$ в $L_2(S)$, что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{X} \in D(\mathrm{div})$; $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $\varphi\mathbf{X} \in D(\mathrm{div})$ *и при этом* $\mathrm{div}(\varphi\mathbf{X}\,) =$ $= \big(\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{X}\,\big) + \varphi \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{X}$.

Доказательство. По определению оператора div для каждой функции $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma$ имеет место равенство

$$\int\limits_G \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{X}\big)\, d\mu = -\int\limits_G u\cdot \operatorname{div}\, \mathbf{X}\ d\mu.$$

В силу леммы 2 $\varphi \cdot u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и, следовательно, $\int_G \big(\overline{\mathbf{grad}}\,(u\cdot\varphi),\ \mathbf{X}\big) d\mu = -\int_G u\cdot\varphi\cdot \operatorname{div}\, \mathbf{X}\, d\mu$, откуда, в силу леммы 1, следует равенство

$$\int\limits_G \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\, \varphi\,\mathbf{X}\big)\, d\mu = -\int\limits_G u\big((\,\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{X}\,) + \varphi\cdot \operatorname{div}\, \mathbf{X}\big)\, d\mu,$$

что и доказывает лемму.

Пусть $f \in L_2(G)$, $k \in C^1(G)$, $a \in C(G)$, $k(x) \geqslant \delta > 0\, (\forall x \in G)$, $a(x) \geqslant \alpha > 0\ (\forall x \in G)$.

Пусть $u \in D(\triangle)$. Тогда $\overline{\mathbf{grad}}\, u \in D(\operatorname{div})$, в силу леммы 3 $k\cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u \in D(\operatorname{div})$. Для $u \in D(\triangle)$ рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}\big(k\cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u\big) - a\cdot u = f \tag{1}$$

и поставим вопрос о поиске решения задачи Дирихле для уравнения (1) с краевым условием

$$\gamma(u) = \varphi \tag{2}$$

(здесь $\varphi \in \operatorname{Im}(\gamma)$).

Конечномерный вариант поставленной задачи в случае инвариантной меры исследован, например, в [3].

Рассмотрим сначала случай $\varphi = 0$. Тогда u является решением задачи (1), (2) с $\varphi = 0$ в том и лишь в том случае, когда $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_G v\cdot\Big(\operatorname{div}\big(k\cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u\big) - au\Big)\, d\mu = -\int\limits_G vf\, d\mu. \tag{3}$$

Это следует из вложения $C_0^1(G) \subset \operatorname{Ker}\gamma$ и плотности $C_0^1(G)$ в $L_2(G)$.

Уравнение (3) преобразуем в следующее:

$$\int\limits_G \Big(k\big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \overline{\mathbf{grad}}\, v\big) + a\cdot uv\Big)\, d\mu = -\int\limits_G vf\, d\mu. \tag{4}$$

При данных условиях на функции k и a левая часть уравнения (4) представляет собой скалярное произведение $(u,\, v)_1$ в $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$; норма $\|\cdot\|_1$, индуцированная этим произведением, эквивалентна норме графика. При этом существует число $C > 0$ такое, что при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ выполняются неравенства $\left|\int_G vf d\mu\right| \leqslant \|f\|_{L_2(G)}\|v\|_{L_2(G)} \leqslant \|f\|_{L_2(G)}\cdot C\|v\|_1$.

Теперь ссылка на теорему Рисса $\big($в гильбертовом пространстве $\big(\operatorname{Ker}\gamma, (\cdot,\ \cdot)_1\big)\big)$ позволяет сделать вывод о существовании единственной функции $u \in \operatorname{Ker}\gamma$, которая при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению (4).

Пусть u — решение (4) при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$. Запишем (4) в виде

$$\int\limits_G \big(k\ \overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \overline{\mathbf{grad}}\, v\big)\, d\mu = -\int\limits_G v\,(f + a\,u)\, d\mu,$$

Справедливость последнего равенства при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ означает, что $k\cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u \in D(\operatorname{div})$ и при этом $\operatorname{div}\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u\big) = f + a\, u$.

Поскольку функция $\dfrac{1}{k} \in C^1(G)$, в силу леммы 3 $\overline{\mathbf{grad}}\, u \in D(\operatorname{div})$ и, следовательно, $u \in D(\triangle)$. Тем самым для граничного условия $\gamma(u) = 0$ доказаны существование и единственность решения задачи (1), (2).

Если теперь $\varphi \in \gamma\big(D(\triangle)\big)$, то существует функция $w \in D(\triangle)$, для которой $\varphi = \gamma(w)$. В этом случае $k \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, w \in D(\operatorname{div})$, а потому определено $\mathcal{L}(w)$ и функция $u_1 = u - w$ должна удовлетворять задаче

$$\mathcal{L} u_1 = \operatorname{div}\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u_1\big) - a \cdot u_1 = f - \operatorname{div}\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, w\big) + a\, w, \tag{5}$$

$$\gamma(u_1) = 0. \tag{6}$$

Задача (5), (6) допускает решение описанным выше приемом.

С другой стороны, задача (5), (6) описанным выше приемом сводится к задаче поиска функции $u_1 \in \operatorname{Ker}\gamma$, которая при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_G \Big(k\,\big(\overline{\mathbf{grad}}\, u_1,\ \overline{\mathbf{grad}}\, v\big) + a\, u_1\, v\Big)\, d\mu = -\int\limits_G \Big(v\, f + k\,\big(\overline{\mathbf{grad}}\, w,\ \overline{\mathbf{grad}}\, v\big) + a\, w\, v\Big)\, d\mu. \tag{7}$$

Для произвольной $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma$ существует функция $w \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$, для которой $\gamma(w) = \varphi$. Докажем существование функции $u_1 \in \operatorname{Ker}\gamma$, которая при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению (7). Тогда функцию $u = u_1 + w$ можно считать „слабым решением" задачи (1), (2).

Действительно, существуют числа $C_1,\, C_2 > 0$ такие, что при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ выполнены неравенства

$$\left|\int\limits_G \Big(v\, f + k\,\big(\overline{\mathbf{grad}}\, w,\ \overline{\mathbf{grad}}\, v\big) + a\, w\, v\Big)\, d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f + a\, w\|_{L_2(G)}\, \|v\|_{L_2(G)} + \sup_G k(\cdot) \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\, w\big\|_{L_2(G;H)} \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\, v\big\|_{L_2(G;H)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\, \|v\| + C_2\, \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\, v\big\|$$

и приведенные выше соображения позволяют, на основании теоремы Рисса, сделать вывод о существовании слабого решения задачи (1), (2) для произвольной функции $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma$.

Наконец, единственность решения $\big($если $\varphi \in \gamma\big(D(\triangle)\big)\big)$ (или, если $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma$, слабого решения) задачи (1), (2) следует из единственности решения задачи (1), (2) в случае $\varphi = 0$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть граница S ограниченной области G согласована с мерой μ, а сама мера удовлетворяет условиям* а), б). *Тогда задача* (1), (2) *в случае $\varphi \in \gamma\big(D(\triangle)\big)$ имеет, и притом единственное, решение $u \in D(\triangle)$. Если $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma$, то задача* (1), (2) *имеет, и притом единственное, слабое решение, т. е. существует, и притом единственная, функция $u \in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, удовлетворяющая условию* (2) *и при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ уравнению* (4).

3. Модельный пример. В данном пункте приводится пример меры, согласованной с поверхностью $S = \partial G$, для которой выполнены условия а), б) из п. 1.

Пусть $\mathbf{n} \in C_b^1(H; H)$; Φ_t — поток векторного поля $\mathbf{n}$; μ — (неотрицательная) конечная борелевская мера на H; $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, для которой $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt < \infty$; φ и φ' ограничены на $\mathbb{R}$.

Отображение $\mathbb{R} \times H \ni \langle t, x\rangle \mapsto \Phi_{-t}x \in H$ является непрерывным и потому для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ множество $\big\{\langle t, x\rangle \,\big|\, \Phi_{-t}x \in A\big\}$ $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(H)$-измеримо. Поэтому для всех $A \in \mathfrak{B}(H)$ функция $t \mapsto \mu\big(\Phi_t A\big) = \int_H j_A \circ \Phi_{-t} d\mu$ является $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-измеримой (и ограниченной) [4, с. 225, 226]. Тем самым определен интеграл $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mu\big(\Phi_t A\big) dt$. Формула

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mu\big(\Phi_t A\big)\, dt \tag{8}$$

корректно определяет неотрицательную конечную борелевскую меру на H. Мера μ_φ дифференцируема вдоль векторного поля $\mathbf{n}$, и при этом для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \mu_\varphi\big(\Phi_t A\big) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(s)\, \mu\big(\Phi_s A\big)\, ds.$$

Пусть, дополнительно, существует константа C, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\big|\varphi'(s)\big| \leqslant C\, \varphi(s)$. Тогда для каждого борелевского множества $A \subset H$ имеет место неравенство

$$\left|\, \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\, \mu\big(\Phi_t A\big)\, dt \right| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mu\big(\Phi_t A\big)\, dt,$$

откуда $\big|d\mu_\varphi(A)\big| \leqslant C\, \mu_\varphi(A)$, а потому $\rho^{\mathbf{n}}_{\mu_\varphi} = \dfrac{d(d\mu_\varphi)}{d\mu_\varphi} \in L_\infty(H, \mu_\varphi)$. Примером такой функции φ является сглаженная в окрестности нуля функция

$$\psi(s) = e^{-\alpha\,|s|}, \quad \alpha > 0. \tag{9}$$

Если теперь $\mathbf{n}$ — продолжение на H поля единичной внешней нормали к S, то S согласована с мерой μ_φ и при этом мера μ_φ удовлетворяет условию б).

Пусть в H существует полная система векторов, вдоль которых исходная мера μ L_2-дифференцируема $\Big($т. е. такая система векторов $h \in H$, вдоль которых производная меры $\mathrm{d}_h\, \mu$ имеет плотность $\rho^h_\mu = \dfrac{d(\mathrm{d}_h\, \mu)}{d\mu} \in L_2(H)\Big)$. Примером такой меры является гауссова мера, корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Теорема 2. *Пусть конечная борелевская* (*неотрицательная*) *мера* μ *удовлетворяет приведенному выше условию. Пусть, дополнительно,* $\mu(U) > 0$ *для любого непустого открытого множества* U *в* H. *Тогда мера* μ_φ, *определенная формулой* (8) *с функцией* φ, *представляющей собой сглаженную в окрестности нуля функцию* ψ (*см.* (9)), *согласована с* S *и удовлетворяет условиям* а), б) *из п.* 1.

Доказательство. Осталось проверить лишь корректность и замыкаемость оператора $\mathbf{grad}:$ $L_2(G,\mu_\varphi)\supset C^1(G)\ni u\mapsto \mathbf{grad}\,u\in L_2(G;H,\mu_\varphi)$.

Если U — открытое непустое множество в H, то в силу (8) $\mu_\varphi(U)>0$. Поэтому если $u,v\in$ $\in C_b^1(H)$, $u=v\,(\mathrm{mod}\;\mu)$, то $\mathbf{grad}\,u=\mathbf{grad}\,v\,(\mathrm{mod}\;\mu)$, а поэтому оператор $\mathbf{grad}$ определен корректно.

Из (8) для ограниченных борелевских функций f получим равенство

$$\int\limits_H f\,d\mu_\varphi=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt\int\limits_H f\circ\Phi_{-t}\,d\mu. \tag{10}$$

Формула (10) обобщается на случай неотрицательных функций $f\in L_1(H,\mu_\varphi)$. С этой целью строим последовательность ограниченных измеримых функций f_n, для которых $f_n\nearrow f$. Тогда при каждом $t\in\mathbb{R}$ имеет место сходимость $h_n(t)=\displaystyle\int_H f_n\circ\Phi_{-t}d\mu\nearrow h(t)$, $h(t)\in$ $\in[0;+\infty]$. Поскольку числовая последовательность $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,h_n(t)dt$ ограничена сверху интегралом $\displaystyle\int_H fd\mu_\varphi$, по теореме Б. Леви функция $h(t)$ интегрируема на $\mathbb{R}$ по мере $\varphi\,dt$ и $h(t)$ почти всюду конечна. Итак, $f\circ\Phi_{-t}\in L_1(\mu)$ для почти всех t и равенство (10) справедливо для $f\in L_1(H,\mu_\varphi)$, $f\geqslant 0$.

Пусть $u_m\in C^1(G)$, $u_m\to 0$ в $L_2(G,\mu_\varphi)$, $\mathbf{grad}\,u_m\to\mathbf{Z}$ в $L_2(G;H,\mu_\varphi)$. Докажем, что $\mathbf{Z}=\mathbf{0}\;(\mathrm{mod}\;\mu_\varphi)$.

Допустим противное: пусть $\left\|\,\|\mathbf{Z}\|\,\right\|^2_{L_2(G;H,\mu_\varphi)}=\delta>0$. Поскольку $\mu_\varphi(S)=0$ (следствие согласованности S и μ_φ), выберем такое $\varepsilon>0$, что

$$\int\limits_{G\setminus S_\varepsilon}\|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2\,d\mu_\varphi>\frac{\delta}{2}.$$

Пусть функция $\eta\in C_0^1(G)$ такова, что $0\leqslant\eta(x)\leqslant 1$ и при этом $\eta(x)=0$ при $x\in S_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $\eta(x)=1$ при $x\in G\setminus S_\varepsilon$. Тогда $\eta\,u_m\to 0$ в $L_2(G,\mu_\varphi)$, $\mathbf{grad}\,(\eta\,u_m)=\eta\;\mathbf{grad}\,u_m+u_m\;\mathbf{grad}\,\eta\to$ $\to\eta\,\mathbf{Z}$. При этом $\left\|\,\|\eta\,\mathbf{Z}\|\,\right\|^2_{L_2(G;H,\mu_\varphi)}>\dfrac{\delta}{2}>0$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $u_m\in C_0^1(G)$ и $\mathrm{supp}\,u_m\subset G\setminus S_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Поскольку теперь $u_m\in C_0^1(G)$, применив формулу (10), сходимость $\mathbf{grad}\,u_m\to\mathbf{Z}$ в $L_2(G;H,\mu_\varphi)$ запишем в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt\int\limits_H\left\|(\mathbf{grad}\,u_m)(\Phi_{-t}\,x)-\mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\,x)\right\|^2d\mu\to 0. \tag{11}$$

Переходя к подпоследовательностям из (11), получаем для почти всех t сходимость:

$$\int\limits_H\left\|(\mathbf{grad}\,u_{m_k})(\Phi_{-t}\,x)-\mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\,x)\right\|^2d\mu\to 0,\quad k\to\infty. \tag{12}$$

Однако $\big(\mathbf{grad}\,(u_m\circ\Phi_{-t})\big)(x)=\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\,x)\right]^*(\mathbf{grad}\,u_m)(\Phi_{-t}\,x)$, откуда

$$\left\|\mathbf{grad}\,(u_m\circ\Phi_{-t})(x)-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\,x)\right]^*\mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\,x)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x) \right)^* \right\| \left\| (\,\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\, x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{C\,|t|} \left\| (\,\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\, x)) \right\|,$$

где $C = \sup_H \|\, \mathbf{n}'(\cdot)\|$.

Теперь из (12) делаем вывод о том, что для почти всех t имеет место сходимость

$$\int\limits_H \left\| \mathbf{grad}\,(u_{m_k} \circ \Phi_{-t})(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x) \right]^* \mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\, x) \right\|^2 d\mu \to 0, \quad k \to \infty. \tag{13}$$

Исходное условие $u_{m_k} \to 0$ в $L_2(G, \mu_\varphi)$ из тех же соображений приводит к сходимости (для почти всех t)

$$\int\limits_H u^2_{m_{k_s}} \circ \Phi_{-t}\, d\mu \to 0, \quad s \to \infty. \tag{14}$$

Покажем, что в условиях теоремы оператор $\mathbf{grad} : L_2(H, \mu) \supset C^1_b(H) \ni v \mapsto \mathbf{grad}\, v \in$ $\in L_2(H; H, \mu)$ замыкаем.

Действительно, положим $v_m \to 0$, $\mathbf{grad}\, v_m \to \mathbf{Z}$ (здесь $v_m \in C^1_b(H)$). Тогда для $\psi \in C^1_b(H)$ запишем формулу интегрирования по частям в направлении h $\left(\rho^h_\mu \in L_2(H, \mu)\right)$:

$$\int\limits_H \big(\,\mathbf{grad}\, v_m,\, \psi\, h\big)\, d\mu = -\int\limits_H v_m\, \big(\,\mathbf{grad}\, \psi,\, h\big)\, d\mu - \int\limits_H v_m \cdot \psi \cdot \rho^h_\mu\, d\mu$$

(см., например, [5, с. 179]).

Предельным переходом получим $\int_H \big(\,\mathbf{Z}\,,\, \psi\, h\big) d\mu = 0$, и осталось заметить, что из последнего равенства следует ортогональность $\mathbf{Z}$ в $L_2(H; H, \mu)$ всевозможным линейным комбинациям индикаторов открытых подмножеств в H (с векторными коэффициентами), которые плотны в $L_2(H; H, \mu)$.

Теперь из (13), (14) можно сделать вывод о том, что для почти всех t имеет место равенство

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x) \right]^* \mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\, x) = 0 \pmod{\mu},$$

откуда, в силу невырожденности оператора $\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)$, $\mathbf{Z}\,(\Phi_{-t}\, x) = 0 \pmod{\mu}$. Отсюда

$$\int\limits_H \|\,\mathbf{Z}\,\|^2\, d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_H \|\,\mathbf{Z}\, \circ \Phi_{-t}\|^2\, d\mu = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

1. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
2. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
4. *Богачев В. И.* Основы теории меры. – М.; Ижевск: РХД, 2006. – Т. 1. – 584 с.
5. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.

Получено 15.03.13