УДК 517.95

А. Р. Алиев (Бакин. гос. ун-т, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

In the Sobolev-type space with exponential weight, we obtain sufficient conditions for the well-posed and unique solvability on the entire axis of a fourth-order operator-differential equations whose main part has multiple characteristics. We establish estimates for the norms of the operators of intermediate derivatives related to the conditions of solvability. In addition, we deduce relationships between the exponent of the weight and the lower bound of the spectrum of the main operator appearing in the main part of the equation. The obtained results are illustrated by an example of a problem for partial differential equations.

У просторі типу Соболєва з експоненціальною вагою встановлено достатні умови коректної й однозначної розв'язності на всій осі операторно-диференціального рівняння четвертого порядку, головна частина якого має кратну характеристику. Знайдено оцінки норм операторів проміжних похідних, пов'язаних з умовами розв'язності. Крім того, встановлено зв'язок між показником ваги і нижньою межею спектра основного оператора, що входить до головної частини рівняння. Отримані результати проілюстровано на прикладі задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Как известно, теории рождаются при рассмотрении конкретных модельных задач. В этом смысле теория операторно-дифференциальных уравнений также не является исключением. В работах [1 – 3] широко отражены результаты по операторно-дифференциальным уравнениям, в основном, первого и второго порядков. С точки зрения приложения к ряду задач механики следует отметить работы, посвященные операторно-дифференциальным уравнениям четвертого порядка (см. [4] и приведенную там библиографию).

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$\left(-\frac{d}{dx}+A\right)\left(\frac{d}{dx}+A\right)^3 u(x)+\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{d^{4-j}u(x)}{dx^{4-j}}=f(x), \quad x\in R=(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где $f(x)$, $u(x)$ — H-значные функции, A — самосопряженный положительно определенный оператор с нижней границей спектра λ_0 ($A=A^*\geq\lambda_0 E$ ($\lambda_0>0$), E — единичный оператор), A_j, $j=1,2,3,4,$ — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы. Очевидно, что главная часть уравнения (1) имеет кратную характеристику.

Отметим, что уравнения вида (1) появляются в приложениях, в частности в задачах устойчивости пластинок из пластического материала.

Введем следующие гильбертовы пространства с весом $e^{-\kappa x/2}$, $\kappa\in R$:

$$L_{2,\kappa}(R;H)=\left\{u(x)\colon \|u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big\|u(x)\big\|_H^2 e^{-\kappa x}dx\right)^{1/2}<+\infty\right\},$$

$$W^n_{2,\kappa}(R;H) = \left\{ u(x)\colon \|u\|_{W^n_{2,\kappa}(R;H)} = \right.$$

$$\left. = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^n u\,(x)}{dx^n} \right\|^2_H + \left\| A^n u(x) \right\|^2_H \right) e^{-\kappa x} dx \right)^{1/2} < +\infty \right\}, \quad n \geq 1.$$

В настоящей работе с определенными алгебраическими условиями на операторные коэффициенты доказывается, что при любом $f(x) \in L_{2,\kappa}(R;H)$ уравнение (1) имеет единственное решение $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H)$.

Отметим, что корректная и однозначная разрешимость краевой задачи на полуоси для уравнения (1) изучена в работе [4], а вопросы фредгольмовости краевых задач на полуоси и на конечном интервале для такого рода уравнений рассмотрены в работе [5].

Определение. *Если при любом* $f(x) \in L_{2,\kappa}(R;H)$ *существует вектор-функция* $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H)$, *удовлетворяющая уравнению* (1) *почти всюду*, *причем имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W^4_{2,\kappa}(R;H)} \leq \mathrm{const}\, \|f\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}\,,$$

то будем называть ее регулярным решением уравнения (1), *а само уравнение* (1) — *регулярно разрешимым.*

Сначала исследуем уравнение (1) в случае, когда $A_j = 0,\ j = 1,2,3,4$.

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$\mathrm{P}_0\,(\mu;A) = (-\mu E + A)\,(\mu E + A)^3\,.$$

Обозначим через P_0 оператор, действующий из пространства $W^4_{2,\kappa}(R;H)$ в пространство $L_{2,\kappa}(R;H)$ следующим образом: $P_0 u(x) \equiv \mathrm{P}_0\left(\dfrac{d}{dx};A\right)u(x)$, $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $|\kappa| < 2\lambda_0$. *Тогда оператор* P_0 *осуществляет изоморфизм из пространства* $W^4_{2,\kappa}\,(R;H)$ *на пространство* $L_{2,\kappa}(R;H)$.

Доказательство. Приняв во внимание обозначения, запишем уравнение (1) в случае $A_j = 0,\ j = 1,2,3,4$, в виде

$$\mathrm{P}_0\left(\frac{d}{dx};A\right)u\,(x) = f(x), \tag{2}$$

где $f(x) \in L_{2,\kappa}(R;H)$, $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H)$.

Теперь положим $u(x) = v(x)e^{\kappa x/2}$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\mathrm{P}_0\left(\frac{d}{dx} + \frac{\kappa}{2};A\right)v\,(x) = g\,(x)\,, \tag{3}$$

где $v(x) \in W^4_2(R;H)$, $g(x) = f(x)e^{-\kappa x/2} \in L_2(R;H)$, а $W^4_2(R;H) = W^4_{2,0}(R;H)$, $L_2(R;H) = L_{2,0}(R;H)$ (подробнее о пространствах $L_2(R;H)$, $W^4_2(R;H)$ см. в [6]).

Поскольку отображение $v(x) \to u(x)e^{-\kappa x/2}$ является изоморфизмом между пространствами $W_2^4(R;H)$ и $W_{2,\kappa}^4(R;H)$, для завершения доказательства теоремы достаточно показать изоморфизм $P_{0,\kappa}\colon W_2^4(R;H) \to L_2(R;H)$, где $P_{0,\kappa} \equiv \left(-\left(\dfrac{d}{dx}+\dfrac{\kappa}{2}\right)+A\right)\left(\dfrac{d}{dx}+\dfrac{\kappa}{2}+A\right)^3$.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \geq \lambda_0$. Поскольку в случае $|\kappa| < 2\lambda_0$

$$\left|\mathrm{P}_0\left(i\xi+\frac{\kappa}{2};\lambda\right)\right| = \left|\left(-\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}\right)+\lambda\right)\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}+\lambda\right)^3\right| =$$

$$= \left|\left(-\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\lambda^2\right)\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}+\lambda\right)^2\right| = \left(\left(\xi^2-\frac{\kappa^2}{4}+\lambda^2\right)^2+\xi^2\kappa^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\left(\lambda+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\xi^2\right) \geq \left(\lambda^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)\left(\lambda+\frac{\kappa}{2}\right)^2 \geq \left(\lambda_0^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)\left(\lambda_0+\frac{\kappa}{2}\right)^2 > 0, \quad \xi \in R,$$

из спектрального разложения оператора A следует, что при $|\kappa| < 2\lambda_0$ операторный пучок $\mathrm{P}_0\left(i\xi+\dfrac{\kappa}{2};A\right)$ обратим. Очевидно, что однородное уравнение

$$\mathrm{P}_0\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2};A\right)v\,(x) = 0$$

имеет лишь тривиальное решение из пространства $W_2^4(R;H)$. Применяя же прямое и обратное преобразования Фурье, убеждаемся, что при любом $g\,(x) \in L_2(R;H)$ уравнение (3) имеет решение из пространства $W_2^4(R;H)$, представимое в виде

$$v(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-s)g(s)ds \equiv P_{0,\kappa}^{-1}g,$$

где

$$G(x-s) = \frac{1}{8}\begin{cases}\left(E+2(x-s)A+2(x-s)^2A^2\right)e^{-(x-s)\left(A+\frac{\kappa}{2}E\right)}A^{-3}, & x-s>0,\\ e^{(x-s)\left(A-\frac{\kappa}{2}E\right)}A^{-3}, & x-s<0.\end{cases}$$

Действительно, такое решение $v(x)$ удовлетворяет уравнению (3) почти всюду. А поскольку, оценивая нормы $\left\|A^4\mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\dfrac{\kappa}{2};A\right)\right\|$ и $\left\|\xi^4\mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\dfrac{\kappa}{2};A\right)\right\|$ для $\xi \in R$, имеем

$$\left\|A^4\mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\frac{\kappa}{2};A\right)\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\lambda^4\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}+\lambda\right)^{-3}\left(-\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}\right)+\lambda\right)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\lambda^4\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}+\lambda\right)^{-2}\left(-\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\lambda^2\right)^{-1}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\frac{\lambda^4}{\left(\left(\lambda+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\xi^2\right)\left(\xi^2+\lambda^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)} \leq \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\frac{\lambda^4}{\left(\lambda+\frac{\kappa}{2}\right)^2\left(\lambda^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{\lambda_0^4}{\left(\lambda_0^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)\left(\lambda_0+\frac{\kappa}{2}\right)^2},\,1\right\},$$

$$\left\|\xi^4 \mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\frac{\kappa}{2};A\right)\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\xi^4\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}+\lambda\right)^{-3}\left(-\left(i\xi+\frac{\kappa}{2}\right)+\lambda\right)^{-1}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\frac{\xi^4}{\left(\left(\lambda+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\xi^2\right)\left(\xi^2+\lambda^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)} \leq \frac{\xi^4}{\left(\left(\lambda_0+\frac{\kappa}{2}\right)^2+\xi^2\right)\left(\xi^2+\lambda_0^2-\frac{\kappa^2}{4}\right)} \leq 1,$$

то с учетом теоремы Планшереля

$$\|v\|^2_{W_2^4(R;H)} = \|A^4 v\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|\frac{d^4 v}{dx^4}\right\|^2_{L_2(R;H)} =$$

$$= \left\|A^4\hat{v}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|\xi^4\hat{v}\,(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} \leq$$

$$\leq \sup_{\xi\in R}\left\|A^4 \mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\frac{\kappa}{2};A\right)\right\|^2_{H\to H}\|\hat{g}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)} +$$

$$+\sup_{\xi\in R}\left\|\xi^4 \mathrm{P}_0^{-1}\left(i\xi+\frac{\kappa}{2};A\right)\right\|^2_{H\to H}\|\hat{g}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)} \leq$$

$$\leq \mathrm{const}\,\left\|\hat{g}(\xi)\right\|^2_{L_2(R;H)} = \mathrm{const}\,\left\|g(x)\right\|^2_{L_2(R;H)},$$

где $\hat{v}\,(\xi)$ и $\hat{g}\,(\xi)$ — преобразования Фурье функций $v\,(x)$ и $g\,(x)$ соответственно. Следовательно, $v(x)\in W_2^4(R;H)$.

Покажем ограниченность оператора $P_{0,\kappa}: W_2^4(R;H)\to L_2(R;H)$. Используя неравенства из анализа, имеем

$$\|P_{0,\kappa}v\|^2_{L_2(R;H)} = \left\|\left(-\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)+A\right)\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}+A\right)^3 v\right\|^2_{L_2(R;H)} =$$

$$= \left\|-\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v - 2A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v + 2A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v + A^4 v\right\|^2_{L_2(R;H)} =$$

$$= \|A^4 v\|^2_{L_2(R;H)} + \left\|\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v\right\|^2_{L_2(R;H)} + 4\left\|A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v\right\|^2_{L_2(R;H)} +$$

$$+4\left\|A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v\right\|^2_{L_2(R;H)} + 4\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v, A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v\right)_{L_2(R;H)} -$$

$$-4\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v, A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v\right)_{L_2(R;H)}-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v, A^4 v\right)_{L_2(R;H)}-8\,\mathrm{Re}\left(A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v, A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v\right)_{L_2(R;H)}-$$

$$-4\,\mathrm{Re}\left(A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v, A^4 v\right)_{L_2(R;H)}+4\,\mathrm{Re}\left(A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v, A^4 v\right)_{L_2(R;H)}\leq$$

$$\leq 6\left\|\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^4 v\right\|^2_{L_2(R;H)}+12\left\|A\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^3 v\right\|^2_{L_2(R;H)}+$$

$$+12\left\|A^3\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)v\right\|^2_{L_2(R;H)}+6\left\|A^4 v\right\|^2_{L_2(R;H)}.$$

Далее, используя теорему о промежуточных производных [6] (гл. 1), получаем

$$\|P_{0,\kappa}v\|^2_{L_2(R;H)}\leq \mathrm{const}\,\|v\|^2_{W_2^4(R;H)}.$$

Таким образом, оператор $P_{0,\kappa}$ ограничен, взаимно однозначно действует из пространства $W_2^4(R;H)$ на пространство $L_2(R;H)$ и по теореме Банаха об обратном операторе является изоморфизмом между этими пространствами.

Теорема доказана.

Замечание. При $\kappa=\pm 2\lambda_0$ оператор P_0 не обратим. Более того, в этом случае оператор P_0 не фредгольмов. Доказательство этого факта можно провести, как в [5] в случае положительной полуоси R_+.

Как известно, операторы промежуточных производных

$$A^j\frac{d^{4-j}}{dx^{4-j}}\colon W_{2,\kappa}^4(R;H)\to L_{2,\kappa}(R;H),\quad j=1,2,3,4, \tag{4}$$

непрерывны, а поскольку из теоремы 1 следует, что норма $\|P_0u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}$ эквивалентна исходной норме $\|u\|_{W_{2,\kappa}^4(R;H)}$ в пространстве $W_{2,\kappa}^4(R;H)$, то нормы операторов (4) можно оценить и относительно $\|P_0u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}$.

Теорема 2. *Пусть $|\kappa|<2\lambda_0$. Тогда для любого $u(x)\in W_{2,\kappa}^4(R;H)$ имеют место следующие неравенства*:

$$\left\|A^j\frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}\leq c_j\,\|P_0u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)},\quad j=1,2,3,4, \tag{5}$$

где $c_1=c_3=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1/2}$, $c_2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1/2}$, $c_4=\left(1-\dfrac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1}$.

Доказательство. Обозначим $z(x) = \left(\dfrac{d}{dx}+A\right)^2 u(x)$. Тогда из (2) относительно $z(x)$ имеем уравнение

$$-\frac{d^2z(x)}{dx^2}+A^2z(x)=f(x), \quad x\in R. \tag{6}$$

После замены $v\left(x\right)=z(x)e^{-\kappa x/2}$ из уравнения (6) получаем

$$-\left(\frac{d}{dx}+\frac{\kappa}{2}\right)^2 v(x)+A^2v(x)=g(x), \quad x\in R, \tag{7}$$

где $v(x)\in W_2^2(R;H)$, $g(x)=f(x)e^{-\kappa x/2}\in L_2(R;H)$, а $W_2^2(R;H)=W_{2,0}^2(R;H)$.

Умножая обе части уравнения (7) скалярно на A^2v в пространстве $L_2(R;H)$, имеем

$$\left(-\frac{d^2v}{dx^2},A^2v\right)_{L_2(R;H)}+\left(-\kappa\frac{dv}{dx},A^2v\right)_{L_2(R;H)}+\left(-\frac{\kappa^2}{4}v,A^2v\right)_{L_2(R;H)}+$$

$$+\left(A^2v,A^2v\right)_{L_2(R;H)}=\left(g,A^2v\right)_{L_2(R;H)}.$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\operatorname{Re}\left(g,A^2v\right)_{L_2(R;H)}=\left\|A\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}-\frac{\kappa^2}{4}\left\|Av\right\|^2_{L_2(R;H)}\geq$$

$$\geq\left\|A\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}\geq\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}\leq\left\|g\right\|_{L_2(R;H)}\left\|A^2v\right\|_{L_2(R;H)},$$

т. е.

$$\left\|A^2v\right\|_{L_2(R;H)}\leq\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1}\left\|g\right\|_{L_2(R;H)}. \tag{9}$$

С другой стороны, из неравенства (8) следует, что для любого $\varepsilon>0$

$$\left\|A\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L_2(R;H)}+\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}\leq\left\|g\right\|_{L_2(R;H)}\left\|A^2v\right\|_{L_2(R;H)}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left\|g\right\|^2_{L_2(R;H)}+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|A^2v\right\|^2_{L_2(R;H)}.$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1}$, находим

$$\left\|A\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L_2(R;H)}\leq\frac{1}{4}\left(1-\frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1}\left\|g\right\|^2_{L_2(R;H)}. \tag{10}$$

Поскольку $g(x) = f(x)e^{-\kappa x/2}$, $v(x) = z(x)e^{-\kappa x/2}$, принимая во внимание, что $z(x) \in W^2_{2,\kappa}(R;H)$, из (9) и (10) имеем

$$\left\|A^2 z\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-2} \|f\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)}, \tag{11}$$

$$\left\|A\frac{dz}{dx}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} + \frac{\kappa^2}{4}\|Az\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1} \|f\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)}. \tag{12}$$

Из неравенств (11) и (12), учитывая, что $z(x) = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^2 u(x)$, а $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H)$, получаем

$$\left\|A^2\frac{d^2u}{dx^2}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} + 2\left\|A^3\frac{du}{dx}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} + \left\|A^4 u\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-2} \|f\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)}, \tag{13}$$

$$\left\|A\frac{d^3u}{dx^3}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} + 2\left\|A^2\frac{d^2u}{dx^2}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} + \left\|A^3\frac{du}{dx}\right\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1} \|f\|^2_{L_{2,\kappa}(R;H)}. \tag{14}$$

В результате из неравенств (13) и (14) следуют оценки

$$\left\|A\frac{d^3u}{dx^3}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1/2} \|P_0 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)},$$

$$\left\|A^2\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1/2} \|P_0 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)},$$

$$\left\|A^3\frac{du}{dx}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1/2} \|P_0 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)},$$

$$\left\|A^4 u\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \left(1 - \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2}\right)^{-1} \|P_0 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}.$$

Теорема доказана.

Теперь исследуем полное уравнение (1).

Лемма. *Пусть операторы* $A_j A^{-j}$, $j = 1,2,3,4$, *ограничены в* H. *Тогда оператор* P_1, *действующий из пространства* $W^4_{2,\kappa}(R;H)$ *в пространство* $L_{2,\kappa}(R;H)$ *следующим образом*:

$$P_1 u(x) \equiv \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{d^{4-j}u(x)}{dx^{4-j}}, \quad u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R;H),$$

также ограничен.

Доказательство. Для любого $u(x) \in W_{2,\kappa}^4(R;H)$

$$\|P_1 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} = \left\| \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \sum_{j=1}^{4} \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} \left\| A^j \frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}.$$

Учитывая теорему о промежуточных производных [6] (гл.1), из последнего неравенства имеем

$$\|P_1 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \mathrm{const}\, \|u\|_{W_{2,\kappa}^4(R;H)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $A = A^* \geq \lambda_0 E$ $(\lambda_0 > 0)$, $|\kappa| < 2\lambda_0$ *и операторы* $A_j A^{-j}$, $j = 1,2,3,4$, *ограничены в* H, *причем выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} < 1,$$

где числа c_j, $j = 1,2,3,4$, *определяются в теореме* 2. *Тогда уравнение* (1) *регулярно разрешимо.*

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде операторного уравнения

$$P_0 u(x) + P_1 u(x) = f(x),$$

где $f(x) \in L_{2,\kappa}(R;H)$, $u(x) \in W_{2,\kappa}^4(R;H)$.

Из теоремы 1 следует, что оператор P_0 имеет ограниченный обратный оператор P_0^{-1}, действующий из пространства $L_{2,\kappa}(R;H)$ в пространство $W_{2,\kappa}^4(R;H)$. Тогда после замены $u(x) = P_0^{-1} w(x)$, где $w(x) \in L_{2,\kappa}(R;H)$, получаем следующее уравнение в $L_{2,\kappa}(R;H)$:

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right) w(x) = f(x).$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы норма оператора $P_1 P_0^{-1}$ меньше единицы. Действительно,

$$\left\| P_1 P_0^{-1} w \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} = \|P_1 u\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \sum_{j=1}^{4} \left\| A_j \frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{4} \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} \left\| A^j \frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}. \qquad (15)$$

Принимая во внимание оценки (5) в неравенстве (15), имеем

$$\left\| P_1 P_0^{-1} w \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} \|w\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}.$$

Значит,

$$\left\| P_1 P_0^{-1} \right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)\to L_{2,\kappa}(R;H)} \leq \sum_{j=1}^{4} c_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} < 1,$$

и поэтому оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в пространстве $L_{2,\kappa}(R;H)$. Следовательно, $u(x)$ можно определить формулой

$$u(x) = P_0^{-1}\left(E + P_1P_0^{-1}\right)^{-1} f(x),$$

причем

$$\|u\|_{W^4_{2,\kappa}(R;H)} \leq \left\|P_0^{-1}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)\to W^4_{2,\kappa}(R;H)} \left\|\left(E + P_1P_0^{-1}\right)^{-1}\right\|_{L_{2,\kappa}(R;H)\to L_{2,\kappa}(R;H)} \|f\|_{L_{2,\kappa}(R;H)} \leq$$

$$\leq \mathrm{const}\, \|f\|_{L_{2,\kappa}(R;H)}\,.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты проиллюстрируем на примере задач для уравнений в частных производных. Рассмотрим на полосе $R\times[0,\pi]$ задачу

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 u\,(x,y) + p_1\,(y)\,\frac{\partial^5 u\,(x,y)}{\partial y^2 \partial x^3} +$$

$$+ p_2\,(y)\,\frac{\partial^6 u\,(x,y)}{\partial y^4 \partial x^2} + p_3\,(y)\,\frac{\partial^7 u\,(x,y)}{\partial y^6 \partial x} + p_4\,(y)\,\frac{\partial^8 u\,(x,y)}{\partial y^8} = f\,(x,y)\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^{2i} u\,(x,0)}{\partial y^{2i}} = \frac{\partial^{2i} u\,(x,\pi)}{\partial y^{2i}} = 0, \quad i = 0,1,2,3, \tag{17}$$

где $p_j(y),\ j=1,2,3,4,$ — ограниченные на отрезке $[0,\pi]$ функции, $f(x,y)\in L_{2,\kappa}\big(R;L_2[0,\pi]\big)$. Задачу (16), (17) можно свести к операторно-дифференциальному уравнению (1). Здесь $H = L_2\,[0,\pi]\,,\ A_1 = p_1(y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2},\ A_2 = p_2(y)\dfrac{\partial^4}{\partial y^4},\ A_3 = p_3(y)\dfrac{\partial^6}{\partial y^6},\ A_4 = p_4(y)\dfrac{\partial^8}{\partial y^8}$. Оператор A определен в $L_2\,[0,\pi]$ равенством $Au = -\dfrac{d^2u}{dy^2}$ с условиями $u\,(0) = u\,(\pi) = 0$. Ясно, что в этом случае $\lambda_0 = 1$. Применяя теорему 3, убеждаемся, что если $|\kappa|<2$, то при условии

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\kappa^2}{4}\right)^{-1/2}\left(\sup_{y\in[0,\pi]}|p_1(y)| + \frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{y\in[0,\pi]}|p_2(y)| + \sup_{y\in[0,\pi]}|p_3(y)|\right) +$$

$$+\left(1 - \frac{\kappa^2}{4}\right)^{-1}\sup_{y\in[0,\pi]}|p_4(y)| < 1$$

задача (16), (17) имеет единственное решение из пространства $W^{4,8}_{x,y,2,\kappa}\big(R;L_2[0,\pi]\big)$.

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
4. *Aliev A. R.* On a boundary-value problem for one class of differential equations of the fourth order with operator coefficients // Azerb. J. Math. – 2011. – **1**, № 1. – P. 145 – 156.
5. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – **14**. – С. 140 – 224.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

Получено 08.01.13